TRAITÉ
DE
NOMOGRAPHIE

ÉTUDE GÉNÉRALE DE LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE COTÉE
DES ÉQUATIONS A UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES
APPLICATIONS PRATIQUES;

PAR

MAURICE D'OCAGNE,

INSPECTEUR GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES,
PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Deuxième édition, entièrement refondue, avec de nombreux compléments.



PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1921

TRAITÉ

DE

NOMOGRAPHIE

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C[ie],
65161 Quai des Grands-Augustins, 55.

TRAITÉ

DE

NOMOGRAPHIE

ÉTUDE GÉNÉRALE DE LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE COTÉE
DES ÉQUATIONS A UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES
APPLICATIONS PRATIQUES;

PAR

MAURICE D'OCAGNE,
INSPECTEUR GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES,
PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Deuxième édition, entièrement refondue, avec de nombreux compléments.



PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1921

INTRODUCTION [1].

La Nomographie a pour objet l'étude générale de la représentation graphique cotée des équations à n variables, en vue de la construction de tables graphiques traduisant les lois (νόμος) mathématiques dont ces équations constituent l'expression analytique. Ces tables, dites *nomogrammes*, permettent, au moyen d'une simple lecture, guidée par la constatation immédiate d'une certaine relation de position entre éléments géométriques cotés, d'avoir la valeur d'une de ces n variables qui correspond à un système de valeurs données pour les $n - 1$ autres.

Cette discipline spéciale est née du besoin qui s'impose à tous les techniciens d'échapper à la sujétion de calculs laborieux, fatigants et sujets à erreur, grâce à l'emploi de tables de résultats tout calculés pour les relations mathématiques auxquelles il leur faut fréquemment recourir.

Or, les tables purement numériques ne se prêtent pas à un usage courant pour plusieurs raisons : leur établissement comporte souvent des opérations de calcul assez laborieuses; l'interpolation y exige de petits calculs supplémentaires; enfin, et surtout — c'est un point sur lequel il convient d'insister — elles ne peuvent être conçues pratiquement que dans le cas de deux entrées; l'introduction ne fût-ce que d'une troisième entrée exige la formation d'une série de

(1) Entièrement différente de celle qui figurait en tête de la première édition et qui avait un caractère plus strictement historique, cette Introduction résume, à notre point de vue, la philosophie du sujet. Quelques détails historiques, empruntés à l'ancienne Introduction, ont été reportés, sous forme de renvois, dans le corps du volume.

tables à double entrée, chacune de celles-ci étant cotée au moyen de la valeur correspondante de la troisième entrée; outre l'encombrement qui en résulte, on reconnaît aisément qu'un tel dispositif a l'inconvénient de ne se prêter, d'une manière pratique, ni à la détermination de la variable constituant la troisième entrée, si elle est prise pour inconnue, ni à l'interpolation portant, dans tous les cas, sur cette troisième entrée.

Un exemple va nous permettre de rendre cette considération plus frappante : on a parfois, en vue de certains problèmes d'Hydraulique ou de Résistance des matériaux, à résoudre des équations complètes du troisième degré

$$z^3 + nz^2 + pz + q = 0.$$

Supposons que l'on veuille fournir, sous forme de tables numériques, les racines positives d'une telle équation [1] pour toutes les valeurs des trois coefficients n, p, q variant de -10 à 10. Il faudra, d'une part, construire autant de tables à double entrée que l'on voudra considérer de valeurs distinctes de n. Si, par exemple, on fait varier n d'unité en unité de -10 à 10, cela en fera vingt et une. Sur chacune de ces tables, dans la case placée à la rencontre de la rangée répondant à chaque valeur de p, par exemple, et de la colonne répondant à chaque valeur de q, il faudra inscrire les valeurs des racines z correspondantes, elles-mêmes obtenues par d'assez pénibles calculs. Il n'y a pas lieu d'insister sur la complication d'un tel travail non plus que sur la difficulté d'opérer, avec de pareilles tables, des interpolations portant à la fois sur les trois coefficients.

Que l'on se reporte maintenant à la figure 124 du présent Volume (n° 104). C'est la solution la plus simple que fournisse la Nomographie pour le même problème. Il suffit, avec ce nomogramme, de tirer une droite entre les points cotés au moyen des valeurs de p et de q respectivement, sur les deux échelles latérales, et de lire les cotes z des droites parallèles à ces échelles qui passent par les points de rencontre de la droite ainsi tirée et de la courbe cotée au moyen

---

[1] Les racines négatives pourraient toujours être obtenues, en valeur absolue, comme racines positives de la transformée en $-z$.

de la valeur de n. Quant aux interpolations portant aussi bien sur z que sur les trois coefficients, elles se font à vue sur un tel tableau avec la plus grande facilité, ainsi qu'on s'en rendra compte de façon plus précise par la suite.

Mais il y a plus; alors que le calcul des racines à inscrire sur les tables numériques ci-dessus visées exigerait un labeur et un temps considérables, la construction du nomogramme représenté par la figure 124, à la fois très expéditive et très facile par le procédé indiqué au n° 104 (puisqu'elle n'exige que quelques projections successives faites à partir d'une échelle métrique) peut être effectuée par un bon dessinateur en une seule séance d'une heure ou deux tout au plus.

Cet exemple fait bien sentir, de prime abord, pensons-nous, quelques-uns des avantages très sensibles qui s'attachent à l'emploi des nomogrammes : rapidité d'établissement, facilité et précision de l'interpolation, et, par-dessus tout, possibilité d'étendre le nombre des entrées ([1]), même au delà de trois, alors qu'on ne saurait songer, avec les tables numériques, à franchir cette limite.

*
* *

Les premiers nomogrammes, établis dans le cas de deux entrées, à la fin du XVIIIe siècle ([2]), procèdent d'une idée qui ne s'est pas présentée sous cette forme à leurs auteurs, mais qu'il est néanmoins commode de formuler ainsi : les trois variables z_1, z_2, z_3, que constituent les deux entrées et la fonction, étant prises pour des coordonnées cartésiennes x, y, z, l'équation qui les lie définit alors une surface que l'on peut représenter par la projection orthogonale de ses courbes de niveau en z, effectuée sur le plan des xy.

Cette façon de présenter les choses est à la fois simple et frappante;

([1]) Nous signalerons encore, comme exemple particulièrement typique des avantages attachés à la méthode nomographique, celui relatif au tir de l'Artillerie, que l'on trouvera plus loin (Chap. V, Sect. III C; *voir* notamment n° 122).

([2]) *Voir* le premier renvoi du n° 16.

elle a toutefois l'inconvénient de masquer les extensions possibles de la méthode nomographique, faute à l'image géométrique sur laquelle elle se fonde de se prêter à une convenable généralisation.

Ce premier mode de figuration, applicable à toute équation à trois variables, est resté le seul usité, et encore de façon assez restreinte, jusqu'à ce que Lalanne l'ait complété par son ingénieuse idée de la *graduation des coordonnées*, née en 1843, et qui consiste à faire correspondre aux variables z_1 et z_2 des coordonnées x et y qui ne leur soient plus simplement proportionnelles, mais qui en soient des fonctions convenablement choisies, de façon à obtenir, pour les lignes correspondant à une même valeur de z_3 (les *isoplèthes* de cette variable, suivant la locution adoptée par Lalanne), non plus les courbes auxquelles aurait conduit le mode de représentation purement cartésien d'abord envisagé, mais de simples lignes droites chaque fois que la chose est possible. Une telle transformation, baptisée par son auteur *anamorphose géométrique*, en introduisant dans la construction des nomogrammes une très notable simplification dans un grand nombre de cas de la pratique, a sensiblement contribué à la diffusion de leur emploi. Rappelons, en particulier, que c'est ainsi que Lalanne a pu construire les tableaux graphiques bien connus qui ont servi pour les calculs de terrassements que comportait l'établissement de notre premier réseau de chemins de fer, exécuté en vertu de la loi du 11 juin 1842, tableaux qui, d'ailleurs, sont restés depuis lors longtemps classiques.

Mais si cet artifice venait réaliser, dans un grand nombre de cas, une amélioration appréciable dans la construction des nomogrammes, il n'apportait aucune modification à leur essence même, chacun d'eux se composant toujours de deux faisceaux de perpendiculaires aux axes des x et des y correspondant aux variables z_1 et z_2 et formant quadrillage ([1]), et d'un système d'isoplèthes (z_3) tracées sur ce qua-

([1]) Ainsi que nous le tenons de la bouche de Lalanne lui-même, c'est en raison de l'aspect de damier (ἄϐαξ) de ces tableaux que ce savant ingénieur leur a appliqué le terme d'*abaque*, étendu depuis lors par nous-même, dans l'Ouvrage **O.4** (de la liste qui suit cette Introduction), ainsi que dans la 1[re] édition du présent Traité, à toute espèce de table graphique cotée, et adopté à notre suite par de nombreux

drillage, curvilignes dans un cas, rectilignes dans l'autre, la relation de position à observer pour la lecture du nomogramme restant la même dans tous les cas, savoir le concours en un même point des lignes cotées au moyen des valeurs de z_1, z_2 et z_3.

Il était tout naturel de pousser plus loin encore la généralisation, relativement au côté constructif des nomogrammes, en adoptant pour lignes cotées (z_1) et (z_2) non plus seulement des perpendiculaires aux axes, mais des systèmes de droites quelconques, comme Massau l'a fait le premier en 1885, ou même en faisant correspondre à l'une ou l'autre des variables un système de cercles ([1]).

Pour ce qui est de la généralisation relative au nombre des variables, ce mode de représentation par lignes concourantes venait se heurter au même obstacle que les tables numériques par suite de l'impossibilité de faire figurer sur un plan un système doublement infini de lignes, dépendant, en plus de la variable z_3, d'une nouvelle variable z_4; et *a fortiori* pour un plus grand nombre de variables.

Ce n'était que dans des cas très spéciaux qu'on pouvait, grâce à certains artifices, atteindre à un nombre d'entrées supérieur à trois.

Le développement pris par la théorie nomographique a permis, depuis lors, de ramener ces artifices (comme le glissement du transparent et l'introduction des échelles binaires dans les *abaques hexagonaux* imaginés en 1885 par M. Lallemand) à cet unique principe : une équation à n variables n'est susceptible de représentation par lignes concourantes que si, moyennant l'introduction appropriée de variables auxiliaires. elle peut être remplacée par une suite d'équations ne contenant chacune que trois variables, ce qui peut s'exprimer en disant qu'elle est *dissociée* en équations à trois variables ([2]).

Or, on rencontre, et même très fréquemment, dans les applications, des équations à plus de trois variables non susceptibles d'une telle dissociation; l'équation complète du troisième degré ci-dessus envisagée en est notamment un exemple; il fallait donc, pour arriver

---

auteurs qui ont continué à s'y tenir, alors qu'il nous a paru préférable de lui substituer, dans le cas général, le terme plus correct de *nomogramme*.

([1]) N[os] 6 et 16 de l'Ouvrage **O.4**.

([2]) *Voir* plus loin n° 52.

à les représenter sur un plan, introduire à la base même du mode de représentation choisi une modification plus profonde que celle résultant d'une simple anamorphose; c'est là la réforme capitale qu'a permis de réaliser le principe des *points alignés* dont l'apparition eut lieu en 1884 dans le Mémoire **O.1**.

*
* *

Pour avoir une juste notion du champ d'utilisation de ce principe, il est tout d'abord indispensable de savoir que l'immense majorité des équations rencontrées dans les applications pratiques (99 pour 100 peut-être) sont susceptibles moyennant, en de nombreux cas, l'intervention d'une anamorphose, d'être représentées par trois systèmes de droites concourantes. Cette indication fait immédiatement ressortir la portée à peu près générale, dans le domaine de la Nomographie, du nouveau principe qui consiste tout uniment à *transporter les représentations graphiques du domaine ponctuel dans le domaine tangentiel*. L'idée est simple assurément, mais assez éloignée des habitudes d'esprit de ceux qui n'usent ordinairement des Mathématiques qu'en vue de fins pratiques, pour que l'on s'explique aisément qu'elle ne soit pas intervenue plus tôt en cet ordre de recherches.

Quoi qu'il en soit, une transformation dualistique quelconque appliquée à un nomogramme à droites concourantes, lui substituant un nomogramme à points alignés, permet de réaliser *ipso facto* les précieuses améliorations que voici : simplification de construction, puisqu'à chaque nombre ne correspond plus qu'un seul point au lieu d'une ligne, et, pour la même raison, plus grande netteté de lecture et plus grande précision de l'interpolation à vue incontestablement plus facile à effectuer entre les points d'une échelle à support quelconque qu'entre les droites d'un faisceau à enveloppe quelconque; mais, par-dessus tout, possibilité, grâce à l'introduction des points à deux cotes, définis par un réseau, qui constituent l'image d'*un système doublement infini d'éléments*, de représenter certaines équations, à plus de trois variables, d'une forme extrêmement

fréquente dans la pratique, et *non dissociables en équations à trois variables seulement*, alors que seules celles qui offraient ce caractère pouvaient être représentées par lignes concourantes. Aussi peut-on très légitimement avancer que *c'est le principe des points alignés qui, pour la première fois, a permis de réduire effectivement à une représentation plane un nombre de dimensions supérieur à trois*. Et c'est justement l'équation complète du troisième degré, mentionnée plus haut, qui, dans la Note **O.3**, en a fourni le premier exemple.

Lorsqu'on ne raisonne plus *in abstracto* et que l'on en vient à mettre la main à la pâte, en vue des réalisations pratiques, d'autres desiderata surgissent, dont le pur théoricien n'a cure, et dont néanmoins il n'est pas possible de ne pas tenir compte. Une fois reconnu l'intérêt de recourir à une transformation dualistique, le pur mathématicien déclarera qu'il n'y a, pour ce faire, qu'à interpréter les coordonnées intervenant dans la question comme des coordonnées tangentielles. Or, de telles coordonnées prennent ordinairement pour lui la forme de *coordonnées plückériennes*, inverses de l'abscisse et de l'ordonnée à l'origine, changées de signe, d'une droite quelconque rapportée à des axes cartésiens. Un tel emploi des coordonnées plückériennes présente un inconvénient majeur dont, en pratique, on a tôt fait d'être frappé; c'est précisément que ces coordonnées sont des *inverses de segments de droite*. Si l'on veut faire usage de coordonnées tangentielles non plus seulement comme moyen de démonstration, mais comme instrument de construction effective, on se convainc de la nécessité de leur donner, si possible, la *forme directe de segments*. Or, de telles coordonnées tangentielles dualistiques existent; ce sont celles dont, sous le nom de *coordonnées parallèles*, et précisément en vue d'une telle application, nous avons fait une étude approfondie de façon à permettre, si besoin est, la discrimination immédiate des êtres géométriques définis par leur moyen [1].

---

[1] Cette étude, d'abord parue, en 1884, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3e série, t. III, p. 400, 456, 516), a été ensuite reproduite dans notre brochure : *Coordonnées parallèles et axiales* (Gauthier-Villars, 1885), avec le

Il est bien clair qu'une fois acquise la notion des nomogrammes à points alignés, on peut en poursuivre l'étude à l'aide des coordonnées cartésiennes, comme nous l'avions nous-même très explicitement indiqué dans la première édition du présent Traité, p. 134 (1). Il nous a paru néanmoins préférable, tant pour les besoins de notre enseignement que dans nos diverses publications, de nous en tenir à l'emploi des coordonnées parallèles, d'abord à cause de l'exacte corrélation qui en résulte entre les représentations par droites concourantes et par points alignés, et aussi pour une autre raison plus pratique tenant à ce que, neuf fois sur dix, à tout le moins, la meilleure disposition à adopter pour les nomogrammes à points alignés est celle qui comporte deux échelles rectilignes parallèles (2) et qu'en pareil cas, l'emploi des coordonnées parallèles conduit tout directement, sans aucune transformation préalable et sans tâtonnement, à la fixation de cette disposition, ainsi qu'à un procédé très commode de construction des échelles (n° 61).

C'est, sans aucun conteste, aujourd'hui, la méthode des points alignés qui, entre les mains des techniciens de toute spécialité, se montre la plus féconde de toutes celles que l'on distingue particulièrement dans le champ de la Nomographie (3). Sans doute verra-t-on là

Mémoire O.1 traitant de l'application de ce système spécial de coordonnées au nouveau procédé de calcul graphique à l'occasion duquel nous l'avions imaginé. Nous sommes revenu à diverses reprises sur ce sujet dans les *Nouvelles Annales* (1887, p. 493; 1890, p. 445; 1892, p. 70). Nous avons reconnu depuis lors que l'idée de ces coordonnées s'était autrefois présentée à Chasles (*Correspondance mathématique* de Quételet, t. VI, 1829, p. 81), sans que l'illustre géomètre en ait développé la théorie.

(1) *Voir* plus loin (n° 62).

(2) *Voir* plus loin (Chap. IV, Sect. II A et B, Sect. III A; Chap. V, Sect. I et II).

(3) Il nous a été donné de réunir une ample collection de ces applications spéciales dont la simple liste fournirait à elle seule la matière d'un petit opuscule. Ces applications se rapportent non seulement à toutes les branches de la Physique, de l'Astronomie et de la Mécanique appliquées, mais aussi aux Chemins de fer, aux Constructions navales, à l'Artillerie, à l'Aviation, aux calculs financiers ou d'assurances, etc.

Nous croyons devoir signaler à part les travaux suivants, où de telles applications sont développées avec une certaine ampleur :

J. Eichhorn, *Nomograms for the properties of Steam, Ammonia, Compressed Air, etc.* (Chicago, 1911-1918).

la meilleure confirmation qui puisse être donnée de sa valeur pratique.

*
* *

Mais le champ de la Nomographie s'est encore élargi du fait de diverses extensions qui, pour ne pas correspondre à des cas rencontrés aussi fréquemment dans les applications, n'en méritent pas moins d'être prises en sérieuse considération; dans cette catégorie se rangent les modes de liaison entre points cotés réalisés au moyen d'index mobiles autres que de simples droites (Chap. VI, Sect. I), les systèmes cotés mobiles que l'on fixe, en vue de la lecture, dans une position spéciale dépendant de certaines variables (Chap. VI, Sect. II), etc.

Cette multiplicité de ressources, tenant à la variété des procédés à mettre en œuvre, exigeait, pour se prêter, en quelque sorte, à une exploitation courante, que tous ces procédés vinssent se ranger dans un exposé d'ensemble, rationnellement ordonné, reposant sur le plus petit nombre possible de principes distincts et développé, à partir de

---

L. Jacob, *Solutions nomographiques des problèmes de Balistique extérieure* (Paris, 1919).

M. Kraïtchik, *Sur quelques applications de la Nomographie* (Bruxelles, 1918).

M. Kraïtchik, *Les tables graphiques financières* (Paris, 1920).

J. Mounier, *Les graphiques du patron* (Paris, 1920).

E. Perret, *Note sur l'application de la Nomographie aux principales tables nautiques* (Paris, 1905).

G. Pesci, *Diverses applications à la navigation* (*Rivista Marittima*, 1896, 1897, 1898, 1899).

G. Pesci et G. Ronca, *Abbachi per il tiro* (Livourne, 1902).

L. Potin, *Solutions nomographiques de questions relatives aux chemins de fer* (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1911).

R. Poussin, *Sur l'application des procédés graphiques aux calculs d'assurances* (Paris, 1904).

R. Seco de la Garza, *Les nomogrammes de l'ingénieur* (Paris, 1912).

E.-E. Seefehlner, *Zeichnerische Rechenbehelfe für den Entwurf und den Betrieb elektrischer Bahnen* (*Electrotechnische Zeitschrift*, Berlin, 1921).

R. Soreau, *Contribution à la théorie et aux applications de la Nomographie* (Paris, 1901).

J.-M. Steevensz, *Grafieken voor hydraulische Berekeningen* (*Vereeniging van Waterstaats ingenieurs*. 1920).

F.-J. Vaës, *Technische Rekenplaten* (*Kon. Inst. van Ingenieurs*, 1904).

C.-E. Wolff, *Diagrams for Egyptian Engineers* (Le Caire, 1903).

là, suivant une marche systématique. Telle a été l'idée mère d'où est sortie la discipline spéciale, embrassant tout cet ordre d'études, que nous avons constituée sous le nom de *Nomographie*.

L'adaptation systématique de principes, empruntés aux Mathématiques pures, à un ordre déterminé d'applications, a déjà donné naissance à de telles disciplines dont le prototype est la *Géométrie descriptive* de Monge, et dont, au milieu du XIXe siècle, un autre exemple mémorable a été fourni par la *Statique graphique* de Culmann; c'est Maurice Lévy — on voudra bien nous permettre de le rappeler — qui est l'auteur de ce rapprochement entre la Nomographie, d'une part, la Géométrie descriptive et la Statique graphique, de l'autre (1). Il convient, au reste, de joindre aussi à ce groupe la remarquable *Intégration graphique* de Massau (2), dont nous nous sommes efforcé, pour notre part, de simplifier les éléments en leur donnant une forme plus strictement didactique dans la première Partie de notre Volume **O.51** et dans notre *Cours de l'École Polytechnique* (3).

Cette codification d'ensemble de tous les modes précédemment proposés de construction de nomogrammes a, pour une bonne part, été rendue possible, grâce à un large appel fait à la notion de la *disjonction des variables*, c'est-à-dire de la formation d'équations, de forme donnée, liant ces variables à des paramètres dont l'élimination reproduise l'équation à représenter, et qui, interprétés comme des coordonnées, dans tel ou tel système, donnent naissance à un nomogramme de tel ou tel type. Elle se complète par l'introduction en ce domaine de notions dont, *a priori*, l'intérêt semble purement spéculatif et qui n'apparaissent, par conséquent, pas d'abord comme devant se prêter à des applications pratiques; telles, par exemple, celle

(1) *Génie civil*, t. XXXV, 1899, p. 425.

(2) *Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications*, paru dans les *Annales de l'Assoc. des Ingénieurs de Gand* (1878, 1884, 1886, 1887, 1890). Il n'est que juste de rappeler également ici le *Calcul par le trait* de Cousinery, premier essai, datant de 1840, d'une synthèse générale des principes régissant l'exécution des calculs au moyen d'épures à construire pour chaque état particulier des données.

(3) *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, t. II, Chap. IX (Gauthier-Villars, 1917-1918).

de la dualité qui, comme on vient de le dire, a donné naissance aux nomogrammes à points alignés; celle de l'homographie envisagée sous sa forme la plus générale, qui permet de donner du premier coup à un nomogramme la disposition la plus favorable; celle aussi des valeurs critiques des variables indépendantes rendant une fonction indéterminée, qui se prête à la construction directe de certains nomogrammes sans disjonction préalable effective, etc., etc. On peut sans doute avancer qu'en cela, la Nomographie fait, en réalité, aux Mathématiques pures des emprunts plus variés que les autres disciplines à côté desquelles elle vient se ranger.

Mais, de plus, cette codification d'ensemble devait fatalement faire naître l'idée d'embrasser d'un coup d'œil tous les modes possibles de représentation plane susceptibles d'être utilisés, de prévoir d'avance et de classer rationnellement toutes les variétés concevables de nomogrammes applicables quel que soit le nombre des variables. De là la théorie morphologique générale des nomogrammes, dont le principe a été donné dès 1898 dans la Note **O.23** et le Mémoire **O.25**, et qui constitue comme une sorte de couronnement de l'édifice.

Esquissée pour la première fois en 1891 dans la brochure **O.4**, la Nomographie a été largement développée en 1899 dans la première édition du présent Traité; certaines modifications, ainsi que d'importants compléments y ont été apportés dans **O.40** et **O.51**. La partie la plus élémentaire en a été détachée dans **O.60** (1). La présente

(1) Divers résumés plus ou moins succincts des principes de la Nomographie ont été, à la suite de nos publications, donnés en plusieurs langues. Nous citerons :

En allemand, *Ueber die Nomographie von M. d'Ocagne*, par F. Schilling (Leipzig, 1900); *Einführung in die Nomographie*, par P. Luckey (Berlin, 1918).

En anglais, *Graphs and Abacuses*, par R. de Beaurepaire (Madras, 1907); *Graphical Methods*, par C. Runge (New-York, 1912); *Nomography or the graphic representation of formulae*, par R.-K. Hezlet (Woolwich, 1913).

En arabe, *Al Nomografia*, par F. Boulad (Le Caire, 1908).

En espagnol, *Nomografia*, par R. Seco de la Garza (Madrid, 1910); *Cálculo gráfico y Nomografia*, traduction littérale de **O.51**, par L. Guttierez del Arroyo (Madrid, 1914).

En hollandais, *Nomographie*, par F.-J Vaës (Extrait de *Marineblad*, Rotterdam, 1901-1902).

édition provient d'une refonte générale de ces divers exposés, guidée par la longue expérience d'un enseignement oral souvent renouvelé depuis trente ans non seulement dans nos cours normaux de l'École Polytechnique et de l'École des Ponts et Chaussées, mais encore dans un cours libre de la Sorbonne (1907) ou même dans certaines séries de conférences qu'on a bien voulu nous demander de divers côtés ([1]).

Il est bien entendu qu'il s'agit ici d'un exposé de grande ampleur, dépassant, par conséquent, les stricts besoins du lecteur uniquement soucieux des applications les plus simples et les plus courantes; de tels besoins se trouvent, au reste, largement satisfaits par la façon très détaillée dont, en cet exposé d'ensemble, sont traitées les applications de ce genre (notamment au Chapitre IV, Sect. I, II A et B, III A, et au Chapitre V). Mais, pas plus dans cette édition que dans la précédente, nous n'avons jugé à propos de passer sous silence, bien qu'en y insistant moins, les parties du sujet qui peuvent apparaître comme d'un intérêt moins immédiatement tangible; les exemples qui s'y rapportent, puisés, comme tous les autres, dans la pratique de diverses techniques, suffisent à attester qu'on aurait tort de les négliger, et qui sait, au reste, si, dans l'avenir, les occasions d'y avoir recours ne se multiplieront pas ?

Quant à la théorie morphologique qui termine le Volume, il nous eût semblé fâcheux, par un souci exagéré de n'avoir égard qu'à ce

---

En italien, *Cenni di Nomografia*, par G. Pesci (Livourne, 1901); *La Nomografia*, par G. Ricci (Rome, 1901).

En polonais, *Wyklady nomografii*, par W. Láska (Lemberg, 1904); *O Nomografii*, par F. Ulkowski (Lemberg, 1905).

En roumain, *Nomografia*, par J. Jonesco (Bucarest, 1900).

En russe, *Les principes du calcul nomographique*, par N. Gercevanoff (Saint Pétersbourg, 1906).

([1]) Notamment à l'École supérieure d'Électricité de Paris (1906), à l'Institut impérial des Voies de communication de Saint-Pétersbourg (1910), à l'Université d'Édimbourg (1914), à la Section technique de l'Artillerie (1919), à l'Université internationale de Bruxelles (1920). Deux de ces séries de conférences ont donné naissance aux brochures **O. 59** et **O. 60**. Les éléments de la Nomographie ont pénétré aujourd'hui dans le programme permanent d'un grand nombre d'Écoles techniques de la France et de l'étranger.

qui est pratiquement indispensable, de la laisser de côté, comme si elle ne devait être tenue que pour un luxe inutile, Il nous suffira, pour légitimer la place que nous avons cru devoir lui maintenir, de faire observer qu'une classification rationnelle, fondée sur une algorithmie des plus simples, qui embrasse d'avance toutes les ramifications possibles d'un sujet, n'est pas tant à dédaigner, ne fût-ce que pour l'ordre qu'elle introduit forcément dans nos idées, même quand nous nous limitons à la partie de ce sujet qui peut, dès maintenant, être regardée comme revêtue d'un caractère d'immédiate utilité, sans compter que, pour tout esprit scientifique soucieux du progrès de nos connaissances, en toute direction, indépendamment de leur portée pratique, il n'est pas sans intérêt d'acquérir, grâce à cette théorie, la notion générale de *toutes les possibilités* que peut offrir la méthode graphique pour la représentation des équations à un nombre quelconque de variables.

LISTE DES PUBLICATIONS DE L'AUTEUR

RELATIVES A LA NOMOGRAPHIE ([1]).

ABRÉVIATIONS.

A. C. A. M...	Annales du Conservatoire des Arts et Métiers.
A. F. A. S...	Association française pour l'avancement des Sciences.
A. M.........	Acta mathematica (Stockholm).
A. P. C......	Annales des Ponts et Chaussées.
B. A.........	Bulletin des Sciences astronomiques.
B. A. T. M...	Bulletin de l'Association technique maritime.
B. D.........	Bulletin des Sciences mathématiques, de M. Darboux.
C. I. M.......	Congrès international des mathématiciens.
C. R.........	Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.
E. M.........	Enseignement mathématique.
G. C.........	Génie civil.
J. E. P.......	Journal de l'École Polytechnique.
N. A.........	Nouvelles Annales de Mathématiques.
R. G. S......	Revue générale des Sciences pures et appliquées.
R. Q. S......	Revue des Questions scientifiques (Bruxelles).
S. M.........	Bulletin de la Société mathématique de France.
S. P. M. K...	Bulletin de la Société physico-mathématique de Kazan.
S. S. B.......	Annales de la Société scientifique de Bruxelles.
Z. S.........	Zeitschrift für Mathematik und Physik.

Travaux antérieurs à la 1re édition du présent Traité.

1\. 1884. — Procédé nouveau de calcul graphique (*A. P. C.*, nov., p. 531). [Note reproduite dans *Coordonnées parallèles et axiales*, p. 73.]

([1]) Les travaux énumérés dans cette liste seront désignés, dans le corps de l'Ouvrage, par la lettre **O** suivie de leur numéro d'ordre. Pour les citations bibliographiques relatives aux Recueils dont les titres figurent en tête de cette liste, on se référera aux abréviations adoptées ici et dont la plupart sont empruntées à l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

2. 1890. — Méthode de calcul graphique fondée sur l'emploi des coordonnées parallèles (*G. C.*, t. XVII, p. 343).

3. 1891. — Sur la représentation plane des équations à quatre variables (*C. R.*, t. CXII, p. 421).

4. » — NOMOGRAPHIE. LES CALCULS USUELS EFFECTUÉS AU MOYEN DES ABAQUES. ESSAI D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE (Gauthier-Villars).

5. » — La Nomographie (*R. G. S.*, p. 604).

6. 1892. — Le calcul sans opération. La Nomographie (*R. Q. S.*, t. XXXII, p. 48).

7. 1893. — Sur une méthode nomographique générale (*C. R.*, t. CXVII, p. 216 et 277).

8. » — Le calcul simplifié au moyen des procédés mécaniques et graphiques (*A. C. A. M.*) [tiré à part sous forme de brochure], 2e édition, en 1905, dans la *Bibliothèque générale des Sciences.*

9. » — Problème d'Algèbre relatif à la Nomographie (*N. A.*, 3e sér., t. XII, p. 469).

10. » — Sur les équations représentables par trois systèmes rectilignes de points isoplèthes (*Mathematical papers read at the international Mathematical Congress held in connexion with the world's Columbian Exposition*, *Chicago*, p. 258).

11. 1894. — Abaque en points isoplèthes de l'équation de Képler (*S. M.*, t. XXII, p. 197).

12. » — Abaque général de la Trigonométrie sphérique (*B. A.*, t. XI, p. 5).

13. » — Abaques de déblai et remblai en points isoplèthes (*A. P. C.*, mars, p. 467).

14. » — Conférences sur la Nomographie, faites aux élèves de l'École Polytechnique (Autographie).

15. 1896. — Abaque de l'équation des marées diurnes et semi-diurnes (*C. R.*, t. CXXII, p. 298).

16. » — Sur les équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés (*C. R.*, t. CXXIII, p. 988).

17. 1896. — Sur l'emploi des systèmes réguliers de points cotés dans la représentation des équations (*Ibid.*, p. 1254).

18. » — Sur la représentation nomographique des équations du second degré à trois variables (*S. M.*, t. XXIV, p. 81).

19. » — Application générale de la Nomographie au calcul des profils de remblai et déblai (*A. P. C.*, mars, p. 406). [Tiré en brochure.]

20. » — Sur la représentation par des droites et par des cercles des équations du deuxième degré à trois variables (*S. P. M. K.*, 2e sér., t. VI, p. 93).

21. 1897. — Sur la représentation des équations du second ordre par des droites et par des cercles (*S. M.*, t. XXV, p. 9).

22. » — Théorie des équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés (*A. M.*, t. XXI, p. 301).

23. 1898. — Sur la méthode nomographique la plus générale résultant de la position relative de deux plans superposés (*C. R.*, t. CXXVI, p. 397).

24. » — Sur quelques applications pratiques de la méthode des points cotés (*R. G. S.*, t. IX, p. 116).

25. » — Application de la méthode nomographique la plus générale résultant de la superposition de deux plans aux équations à trois et à quatre variables (*S. M.*, t. XXVI, p. 16).

26. » — Une leçon sur les abaques (*J. E. P.*, 2e sér., 4e C., p. 205).

27. » — Sur les abaques à points cotés pour équations à trois et quatre variables (*S. S. B.*, t. XXII, Ire Partie, p. 78).

28. » — Sur les questions de Mathématiques pures que soulève l'étude de la Nomographie (*B. D.*, XII_2, p. 177).

29. » — Sur les types les plus généraux d'équations représentables par des systèmes cotés de cercles et de droites (*Z. S.*, t. LXIII, p. 269).

30. » — Abaque de la nouvelle formule de M. Bazin, relative aux canaux découverts (*A. P. C.*, 1er trim., p. 304).

Travaux postérieurs à la 1re édition du présent Traité.

31. 1900. — Sur l'application de la Nomographie à la prédiction des occultations d'étoiles par la Lune (*C. R.*, t. CXXX, p. 554).

32. » — Sur les divers modes d'application de la méthode graphique à l'art du calcul (*C. I. M.*, Paris, p. 419).

33. » — La Nomographie dans l'enseignement (*E. M.*, t. II, p. 207).

34. » — Sur la résolution nomographique de l'équation du septième degré (*C. R.*, t. CXXXI, p. 522).

35. 1901. — Sur quelques principes élémentaires de Nomographie (*B. D.*, t. XXIV, p. 286).

36. 1902. — Sur la résolution nomographique des équations algébriques (*N. A.*, 4e sér., t. II, p. 49).

37. » — Sur quelques travaux récents relatifs à la Nomographie (*B. D.*, t. XXVI, p. 67).

38. » — Sur la résolution nomographique du triangle de position pour une latitude donnée (*C. R.*, t. CXXXV, p. 728).

39. 1903. — Sur une classification nouvelle des modes de représentation nomographique des équations à un nombre quelconque de variables (*C. R.*, t. CXXXVI, p. 33).

40. » — Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie (*J. E. P.*, 2e sér., t. VIII, p. 97).

41. 1904. — Sur la résolution nomographique des triangles sphériques (*C. R.*, t. CXXXVIII, p. 70).

42. » — Coup d'œil sur la théorie la plus générale de la Nomographie (*A. F. A. S.*, *Congrès d'Angers*, p. 180).

43. » — Sur la résolution nomographique générale des triangles sphériques (*S. M.*, t. XXXII, p. 196).

44. 1905. — Sur la méthode nomographique des points alignés (*A. F. A. S.*, *Congrès de Cherbourg*, p. 1).

45. 1906. — Sur un théorème de J. Clark (*C. R.*, t. CXLII, p. 988).

46. 1907. — Sur la représentation par points alignés de l'équation d'ordre nomographique 3 la plus générale (*C. R.*, t. CXLIV, p. 190).

47. » — Sur la représentation de l'équation d'ordre nomographique 3 la plus générale par un nomogramme conique (*C. R.*, t. CXLIV, p. 895).

48. » — Sur la représentation des équations d'ordre nomographique 4 à 3 et 4 variables (*C. R.*, t. CXLIV, p. 1027).

49. » — Les progrès récents de la méthode nomographique des points alignés (*R. G. S.*, t. XVIII, p. 392).

50. » — Sur les équations d'ordre nomographique 3 et 4 (*S. M.*, t. XXXV, p. 173).

51. 1908. — Calcul graphique et Nomographie (*Bibliothèque de mathématiques appliquées* de l'*Encyclopédie scientifique*, Doin). — 2e édition en 1914.

52. 1909. — Sur la représentation nomographique des équations à quatre variables (*C. R.*, t. CXLVIII, p. 1244).

53. 1910. — Sur le tracé pratique de certaines courbes transcendantes (*A. P. C.*, fasc. IV, p. 114; avec une addition en 1914, fasc. I, p. 160).

54. 1911. — Détermination nomographique du chemin parcouru par un navire en cours de mouvement varié (*C. R.*, t. CLII, p. 506).

55. » — Construction du nomogramme représentatif du mouvement varié d'un navire donné entre des vitesses données (*B. A. T. M.*, n° 22).

56. » — Application de la méthode des points alignés au calcul des poutres en béton armé (*A. P. C.*, fasc. II, p. 432).

57. 1912. — Sur la réduction des équations à trois variables aux formes canoniques que comporte la méthode des points alignés (*C. R.*, t. CLV, p. 1140).

58. 1913. — Sur l'application générale de la méthode des points alignés aux problèmes qui se ramènent à des résolutions de triangles sphériques (*C. R.*, t. CLVI, p. 1593).

59. 1914. — Deux conférences sur la Nomographie :

I. Principes de Nomographie. — II. Application des nomogrammes à alignement aux différents cas de résolution des triangles sphériques (Conférences données les 28 et 29 juillet 1914 à l'Université d'Édimbourg, publiées dans *E. M.*, 1916, p. 373, et 1917, p. 20).

60. 1920. — Principes usuels de Nomographie avec application a divers problèmes concernant l'Artillerie et l'Aviation (Gauthier-Villars).

61. » . — Pratique courante de la méthode nomographique des points alignés à propos de ses applications de guerre (*C. I. M.*, Strasbourg).

TRAITÉ

DE

NOMOGRAPHIE

CHAPITRE I.

REPRÉSENTATION DANS LE CAS DE DEUX VARIABLES.

I. — Échelles fonctionnelles.

1. *Échelle normale d'une fonction.* — Soit $f(z)$ une fonction de la variable z, prise dans un intervalle où elle est uniforme, c'est-à-dire n'a pour chaque valeur de z qu'une seule valeur bien déterminée.

Portons sur un axe Ox, à partir de l'origine O (*fig.* 1), les longueurs

$$x = \mu f(z), \qquad x' = \mu f(z'), \qquad x'' = \mu f(z''), \qquad \ldots,$$

μ étant une longueur arbitrairement choisie, et inscrivons, à côté des

Fig. 1.

points qui limitent ces segments, points qui seront marqués d'un trait, aussi fin que possible, perpendiculaire à l'axe, les valeurs correspondantes z, z', z'', ... de la variable (1).

---

(1) La première idée d'une échelle de ce genre, construite dans un cas particulier, semble due à Gunter, au début du XVIIe siècle (*voir* le renvoi du n° 5, 2°).

L'ensemble des points cotés ainsi obtenus constitue *l'échelle de la fonction* $f(z)$. La longueur μ est dite le *module* de cette échelle.

Cette échelle sera limitée à deux valeurs particulières a et b de la variable z.

Partant de la limite inférieure a, on pourra construire l'échelle sans faire intervenir l'origine O. Il suffira, en effet, pour obtenir les points z, z', z'', ... et b de porter sur l'axe, à partir du point coté a, choisi arbitrairement, les segments

$$\begin{aligned}
\delta &= \mu[f(z\,)-f(a)],\\
\delta' &= \mu[f(z')-f(a)],\\
\delta'' &= \mu[f(z'')-f(a)],\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\mathrm{L} &= \mu[f(b)\,-f(a)];
\end{aligned}$$

L est la *longueur* de l'échelle; a et b sont ses *limites*.

Si, pour la construction de l'échelle, on fait croître la variable z par *échelons* égaux à un nombre rond (1, 2, 5, 10, ...) d'unités d'un certain ordre décimal, on obtient une échelle *normale* de la fonction. C'est le cas de beaucoup le plus fréquent. Dans le choix de l'échelon, il faut avoir soin que les points les plus rapprochés sur l'échelle considérée laissent entre eux un intervalle voisin d'une certaine limite fixée par l'expérience et que nous appellerons le *minimum d'intervalle graphique* de l'échelle.

Dans la plupart des cas, ce minimum d'intervalle graphique sera fixé au *millimètre* ([1]). Il pourra parfois être abaissé au-dessous. On reviendra plus loin sur ce point (n° 4).

Remarque. — Si la fonction $f(z)$, après avoir crû dans un certain sens, se met, à partir d'une certaine valeur de z, à croître dans l'autre sens, il sera nécessaire de reporter, à partir de cette valeur de z, l'échelle de la fonction d'un côté à l'autre de l'axe ou sur un second axe parallèle au premier. Cette circonstance se présente, au reste, rarement dans les applications.

2. *Analyse de la graduation.* — On réalisera, en général, par tâtonnement, la condition relative au minimum d'intervalle. Il est facile néan-

([1]) Disons une fois pour toutes que si, sur certaines figures de cet Ouvrage, on rencontre des divisions beaucoup plus petites, cela tient à ce que ces figures ont été obtenues au moyen d'originaux que les nécessités du format ont conduit à réduire par la photographie.

moins d'indiquer une marche rationnelle à suivre pour que la graduation obtenue satisfasse à cette condition ([1]).

Nous supposons $a < b$. Admettons, en outre, pour fixer les idées, que de a à b, les accroissements de la fonction, correspondant à des accroissements égaux de la variable, aillent constamment en diminuant en valeur absolue. C'est, par exemple, le cas pour la fonction $\sqrt{z}$, de o à ∞.

S'ils allaient constamment en augmentant en valeur absolue, comme pour la fonction z^2, de o à ∞, il faudrait, dans la marche qui va être indiquée, partir de b au lieu de a.

Si, enfin, ils allaient alternativement en diminuant et en augmentant, on fractionnerait l'intervalle total en intervalles partiels pour lesquels le sens de leur variation resterait le même.

Plaçons-nous donc dans la première hypothèse et, prenant, par exemple, le millimètre comme unité de longueur, posons ([2])

$$\mu|f(b) - f(a)| = L,$$

la longueur L étant environ celle que nous voulons donner à l'échelle. De là nous tirons le module μ correspondant, puis nous arrondissons la valeur trouvée, de façon à avoir pour ce module une valeur commode, ce qui conduit à une valeur de L voisine de celle que nous avions prise d'abord.

Soit, pour fixer les idées, la fonction $\sqrt{z}$ à représenter de $z = 1$ à $z = 100$. Adoptons, pour notre échelle, une longueur voisine de 200^{mm}. Pour cela, posons

$$\mu(\sqrt{100} - \sqrt{1}) = 200^{mm},$$

d'où

$$\mu = \frac{200}{9} = 22^{mm},22\ldots.$$

Nous prendrons évidemment ici $\mu = 25^{mm}$, d'où résultera pour L la valeur

$$L = 25 \times 9 = 225^{mm}.$$

La valeur de μ étant ainsi déterminée, si nous désignons, en outre, par m le minimum d'intervalle graphique, nous poserons

$$\mu|f(a) - f(a - i)| = m.$$

De là, par les procédés de l'Algèbre, soit directement, soit par approximations successives, suivant la nature de la fonction $f(z)$, nous tirerons la valeur de i. Cette valeur tombera entre $\frac{1}{10^{n+1}}$ et $\frac{1}{10^n}$.

([1]) Les passages n'ayant, comme celui-ci, qu'un caractère accessoire, de même que les exemples d'application, sont imprimés en petits caractères.

([2]) La notation $|X|$ indique la valeur absolue de X. On prendra donc la différence $f(a) - f(a - \varepsilon)$ ou $f(a - \varepsilon) - f(a)$ suivant que de $a - \varepsilon$ à a la fonction est croissante ou décroissante.

Considérant les trois intervalles définis par

$$\frac{1}{10^{n+1}}, \quad \frac{2}{10^{n+1}}, \quad \frac{5}{10^{n+1}}, \quad \frac{1}{10^{n}},$$

nous verrons dans lequel de ces intervalles sera comprise la valeur de i. Nous commencerons dès lors à faire croître z par *échelons* successifs égaux à la limite supérieure de cet intervalle; si donc i tombe dans le premier intervalle, nous commencerons par faire croître z, à partir de a, de $\frac{2}{10^{n+1}}$ en $\frac{2}{10^{n+1}}$. Si i tombe dans le deuxième intervalle, nous ferons croître z de $\frac{5}{10^{n+1}}$ en $\frac{5}{10^{n+1}}$. Si i tombe dans le troisième intervalle, nous ferons croître z de $\frac{1}{10^{n}}$ en $\frac{1}{10^{n}}$.

De cette façon, nous sommes assurés que, jusqu'en un point qui sera déterminé plus loin, les premiers intervalles de l'échelle seront supérieurs à m.

Revenons à notre exemple de la fonction $\sqrt{z}$. Ici, puisque $\mu = 25$, nous avons, en prenant $m = 1^{\text{mm}}$,

$$25(\sqrt{1} - \sqrt{1 - i}) = 1,$$

d'où

$$1 - i = \left(\frac{24}{25}\right)^2 \quad \text{et} \quad i = 0,0784.$$

Comme on a

$$0,05 < 0,0784 < 0,1,$$

nous commencerons à faire croître z de $0,1$ en $0,1$.

Si nous représentons par θ_1 la valeur de l'échelon adopté, nous pourrons continuer à nous servir de cet échelon jusqu'à la valeur a_1 de z telle que

$$\mu|f(a_1) - f(a_1 - \theta_1)| > m > \mu|f(a_1 + \theta_1) - f(a_1)|.$$

Pour plus de régularité, nous ferons coïncider le point dit de *césure* où s'effectuera le changement d'échelon avec la valeur ronde de z immédiatement inférieure à la valeur a_1 définie par la double inégalité ci-dessus.

Si la valeur a_1 est légèrement inférieure à la valeur ronde la plus voisine, on pourra tout aussi bien effectuer la césure à cette valeur ronde parce qu'en somme la détermination du minimum d'intervalle graphique n'a rien d'absolu et qu'on peut, sans inconvénient, descendre un peu au-dessous du millimètre ([1]).

Si nous revenons encore à notre exemple de $\sqrt{z}$ avec $\mu = 25^{\text{mm}}$, nous voyons que l'échelon de $0,1$, que nous avons adopté à partir de la valeur 1, ne devrait

---

([1]) C'est pour cette raison qu'au n° 1 nous avons dit que l'intervalle entre les points les plus rapprochés devait rester *voisin* du millimètre et non lui rester *supérieur* d'une façon absolue.

être théoriquement conservé que jusqu'à la valeur a_1 telle que

$$25(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_1 - 0,1}) > 1 > 25(\sqrt{a_1 + 0,1} - \sqrt{a_1}),$$

ce qui donne $a_1 = 1,6$, car on a

$$25(\sqrt{1,6} - \sqrt{1,5}) = 1,005,$$
$$25(\sqrt{1,7} - \sqrt{1,6}) = 0,972.$$

Mais ici on conservera évidemment l'échelon de 0,1 jusqu'à $z = 2$, pour prendre à partir de cette valeur l'échelon de 0,2.

On voit que l'écartement entre les points 1,9 et 2 sera égal à

$$25(\sqrt{2} - \sqrt{1,9}) \quad \text{ou} \quad 0^{\text{mm}},895,$$

dimension très admissible.

En résumé, considérant la suite

$$\frac{2}{10^{n+1}}, \quad \frac{5}{10^{n+1}}, \quad \frac{10}{10^{n+1}}, \quad \frac{2}{10^n}, \quad \frac{5}{10^n}, \quad \frac{10}{10^n}, \quad \ldots,$$

appelons θ_1 l'échelon initial déterminé ci-dessus, qui est une des trois premières fractions écrites, et représentons par

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \theta_3, \quad \ldots$$

ce que devient la suite précédente lorsqu'on la fait commencer à ce terme.

Nous nous servirons, à partir de a, de l'échelon θ_1 jusqu'à la valeur ronde a_1 pour laquelle le produit

$$\mu | f(a_1) - f(a_1 - \theta_1) |$$

est le plus voisin de m, ce que nous exprimerons par la notation

$$\mu | f(a_1) - f(a_1 - \theta_1) | = m \pm \varepsilon.$$

Nous emploierons ensuite l'échelon θ_2 jusqu'à la valeur a_2 pour laquelle, avec la notation précédente, on aura

$$\mu | f(a_2) - f(a_2 - \theta_2) | = m \pm \varepsilon,$$

et ainsi de suite.

Sous une forme encore plus condensée, nous pourrons énoncer la règle à laquelle nous avons abouti sous la forme suivante :

Données :

Fonction $f(z)$;
Limites a et b;
Longueur approchée de l'échelle L_0;
Minimum de l'intervalle graphique m.

Opérations :

1° Donner au module μ la valeur *arrondie* satisfaisant à l'équation

$$\mu|f(b)-f(a)| = L_0 \pm \varepsilon.$$

2° Déterminer le premier échelon θ_1 en prenant celle des trois quantités

$$\frac{2}{10^{n+1}}, \quad \frac{5}{10^{n+1}}, \quad \frac{10}{10^{n+1}}$$

qui est immédiatement supérieure à la valeur i définie par

$$\mu|f(a)-f(a-i)| = m \pm \varepsilon.$$

Soit

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \theta_3, \quad \theta_4, \quad \theta_5, \quad \ldots$$

la portion de la suite

$$\frac{2}{10^{n+1}}, \quad \frac{5}{10^{n+1}}, \quad \frac{1}{10^n}, \quad \frac{2}{10^n}, \quad \frac{5}{10^n}, \quad \ldots,$$

qui commence à θ_1.

3° Déterminer les points de césure a_1, a_2, a_3, ... par les équations

$$\mu|f(a_1)-f(a_1-\theta_1)| = m \pm \varepsilon,$$
$$\mu|f(a_2)-f(a_2-\theta_2)| = m \pm \varepsilon,$$
$$\mu|f(a_3)-f(a_3-\theta_3)| = m \pm \varepsilon,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dès lors, la graduation procédera par échelons θ_1 de a à a_1, par échelons θ_2 de a_1 à a_2, par échelons θ_3 de a_2 à a_3, ..., et ainsi de suite jusqu'à b. Rien d'ailleurs n'empêche, si les nombres a_{i-1} et a_i semblent trop rapprochés, de sauter θ_i et de passer immédiatement à θ_{i+1}.

Remarque. — En raison de l'égalité des échelons successifs dans chaque section de la graduation, il est inutile d'inscrire les cotes de tous les points constituant cette graduation. Il suffira d'inscrire ces cotes de distance en distance, de telle façon qu'il n'y ait point d'hésitation à déterminer mentalement les cotes des points intermédiaires. C'est ainsi que, sur un double-décimètre, la chiffraison en centimètres suffit, la lecture étant d'ailleurs rendue plus facile par l'allongement des traits correspondant aux demi-centimètres. Un artifice analogue pourra toujours être mis en œuvre avec toute autre graduation.

3. *Construction géométrique d'une échelle.* — Pour construire

l'échelle de la fonction $f(z)$, on peut avoir recours à la courbe C dont l'équation est

$$x = \mu f(y).$$

Il suffit de prendre sur la courbe le point dont l'ordonnée est égale à z pour que l'extrémité de son abscisse donne sur Ox le point coté z de l'échelle demandée.

Si la courbe C peut être obtenue point par point au moyen d'une construction géométrique simple, son tracé dispense de tout calcul.

Supposons, par exemple, que la fonction dont on désire l'échelle soit $\sqrt{a^2 - z^2}$, a étant une constante; dans ce cas, le module μ étant pris égal à 1, la courbe C, définie par l'équation

$$x^2 = a^2 - y^2,$$

sera un cercle de rayon a ayant son centre à l'origine; son tracé est immédiat.

Sans que la construction soit toujours d'une aussi grande simplicité, on conçoit, par cet exemple, le parti que l'on pourra, le cas échéant, retirer d'une construction géométrique.

Le plus souvent, on procédera de la façon suivante : ayant déterminé directement un certain nombre de points de l'échelle, de cote ronde, on élèvera en ces points, perpendiculairement à l'axe portant l'échelle, des ordonnées proportionnelles à leurs cotes. Les extrémités de ces ordonnées seront autant de points de la courbe C. On tracera dès lors cette courbe et l'on s'en servira ainsi qu'il vient d'être dit pour obtenir les points de l'échelle, intermédiaires entre ceux qui ont été obtenus directement.

La détermination des points de césure successifs se fera ici avec une grande facilité. On donnera à l'ordonnée y des accroissements successifs égaux à un certain échelon jusqu'à ce que l'accroissement correspondant de l'abscisse x tombe au-dessous du minimum d'intervalle graphique choisi. On adoptera alors un échelon supérieur au précédent et on le conservera jusqu'à ce que la même circonstance se reproduise; et ainsi de suite.

Ce procédé géométrique permettra d'ailleurs de construire l'échelle d'une fonction définie par une courbe C obtenue expérimentalement.

4. *Interpolation à vue.* — Un point étant pris sur l'axe de

l'échelle, en dehors des points qui constituent sa graduation, on pourra se proposer d'évaluer approximativement la valeur correspondante de la variable z. Cette évaluation porte le nom d'*interpolation à vue*.

Les deux points de la graduation qui comprennent le point considéré fournissent des valeurs approchées par excès et par défaut de la valeur cherchée, au degré d'approximation défini par l'échelon correspondant.

La question qui se pose consiste à apprécier l'appoint à ajouter à la valeur approchée par défaut pour avoir la valeur cherchée.

Cet appoint s'estime au jugé d'après l'allure de la graduation aux environs du point considéré.

Soit, par exemple, à lire la cote du point M sur l'échelle de la figure 2. On aura sensiblement pour cette cote la valeur 3,47.

Sur l'échelle de la figure 2 *bis*, on aurait 3,45.

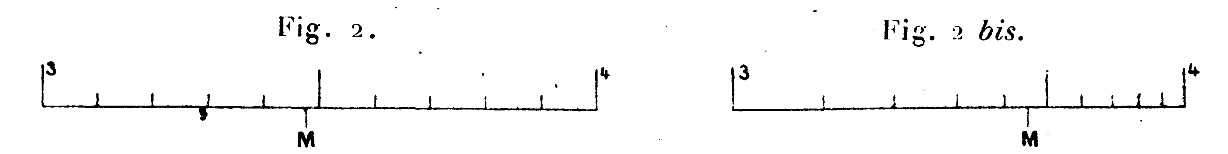


Fig. 2. Fig. 2 *bis*.

On voit que le degré de précision de ce genre d'interpolation dépend du plus ou moins d'habitude du lecteur.

Toutefois l'expérience prouve qu'un lecteur tant soit peu exercé arrive à ne pas se tromper du $\frac{1}{10}$ de l'échelon lorsque l'intervalle graphique n'est pas sensiblement inférieur à 1^{mm}.

Avec un intervalle de $0^{mm},5$, l'approximation sur laquelle on peut compter n'est pas supérieure au $\frac{1}{5}$.

Cela montre qu'il n'y a pas de sérieux avantage à employer des intervalles inférieurs à 1^{mm}.

Il y aurait sur ce point particulier à faire une étude qui relève de la physiologie. Il semble probable que le degré d'approximation relatif est à peu près constant pour des divisions supérieures à 1^{mm} environ et qu'il décroît, à partir de là, avec une assez grande rapidité.

Remarque. — Les échelles construites dans la pratique, sous les dimensions qui ont été reconnues commodes, n'assurent, en général, la connaissance que de trois chiffres significatifs (exceptionnellement quatre); encore le dernier chiffre n'est-il fourni que par l'interpola-

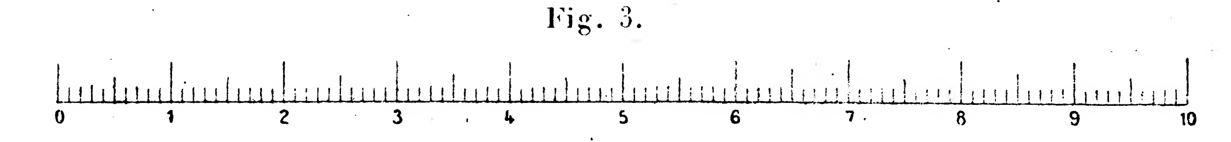
tion à vue, ainsi que cela a lieu avec les graduations du double-décimètre ou de la règle à calcul. Ce degré d'approximation suffit d'ailleurs dans une foule d'applications, et notamment dans l'immense majorité de celles qui relèvent de l'art de l'ingénieur.

3. *Échelles usuelles.* — Les échelles les plus fréquemment employées dans les applications ([1]) sont les suivantes :

1° *Échelle métrique.* — On a une telle échelle quand la fonction $f(z)$ se réduit à z; ici les points que l'on obtient en faisant croître z par échelons égaux sont régulièrement espacés sur la droite portant cette échelle.

Le type d'une telle échelle est fourni par la graduation du double-décimètre (*fig.* 3); il est inutile d'y insister.

Fig. 3.

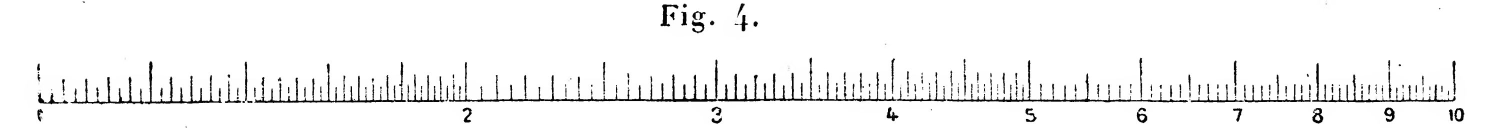


La distance constante entre points dont la cote diffère d'une unité donne dans ce cas le module de l'échelle.

2° *Échelle logarithmique.* — C'est l'échelle de la fonction $\log z$. Un exemple très courant en est fourni par la graduation de la règle à calcul ordinaire ([2]) (*fig.* 4).

Sur cette graduation l'intervalle entre les points 1 et 10 est

Fig. 4.



de 125^{mm}, et les échelons sont de 0,02 de 1 à 2, de 0,05 de 2 à 5, enfin de 0,1 de 5 à 10.

Voici au surplus comment l'analyse de cette graduation peut être faite conformément au procédé qui se trouve résumé à la fin du n° 2.

([1]) La construction de ces échelles s'effectue très rapidement lorsqu'on dispose de tables numériques, qui se rencontrent aujourd'hui dans un grand nombre de manuels, telles que : tables des carrés, des cubes, des racines carrées et cubiques, des inverses et des logarithmes des nombres; tables des lignes trigonométriques naturelles et de leurs logarithmes.

([2]) La première échelle logarithmique semble avoir été construite par Gunter (1581-1626). *Voir* la brochure **O.8**, p. 56.

Prenons

$$L = 125^{mm}, \qquad m = 0^{mm},5.$$

Le module est donné par

$$\mu(\log 10 - \log 1) = 125^{mm},$$

d'où

$$\mu = 125^{mm}.$$

Pour déterminer θ_1 nous avons l'équation

$$125[\log 1 - \log(1 - i)] = 0,5,$$

d'où

$$\log(1 - i) = -0,004 = \bar{1},996$$

et

$$1 - i = 0,988,$$
$$i = 0,012.$$

Comparant cette quantité aux trois suivantes

$$0,02, \qquad 0,05, \qquad 0,1,$$

nous voyons qu'ici il faut prendre

$$\theta_1 = 0,02$$

et, par suite,

$$\theta_2 = 0,05,$$
$$\theta_3 = 0,1.$$

Les valeurs a_1, a_2, a_3 sont alors données par les équations

$$125[\log a_1 - \log(a_1 - 0,02)] = 0,5,$$
$$125[\log a_2 - \log(a_2 - 0,05)] = 0,5,$$
$$125[\log a_3 - \log(a_3 - 0,1\ )] = 0,5,$$

ou

$$\log \frac{a_1}{a_1 - 0,02} = \log \frac{a_2}{a_2 - 0,05} = \log \frac{a_3}{a_3 - 0,1} = 0,004,$$

ou encore

$$\frac{a_1}{a_1 - 0,02} = \frac{a_2}{a_2 - 0,05} = \frac{a_3}{a_3 - 0,1} = 1,01,$$

ou enfin

$$\frac{a_1}{0,02} = \frac{a_2}{0,05} = \frac{a_3}{0,1} = \frac{1,01}{0,01} = 101;$$

d'où, pour les points de césure, en arrondissant comme il a été dit,

$$a_1 = 2,$$
$$a_2 = 5,$$
$$a_3 = 10,$$

Un autre modèle usuel de règle à calcul porte une échelle

logarithmique pour laquelle l'intervalle de 1 à 10 (fractionné en deux tronçons superposés sur la règle) a une longueur de 1^m. Sur cette règle l'échelon est de 0,002 de 1 à 2, de 0,005 de 2 à 5, et de 0,01 de 5 à 10.

Il est essentiel de remarquer que, si l'on prolonge l'échelle logarithmique au delà de 10, elle se reproduira de 10 à 100 avec la même longueur et les mêmes intervalles, mais ceux-ci correspondant à des échelons dix fois plus grands; de même de 100 à 1000 avec des échelons encore dix fois plus grands, et ainsi de suite. En d'autres termes, sur l'échelle de 1 à 10, d'abord construite, les unités peuvent être prises comme se rapportant à un ordre décimal quelconque, c'est-à-dire que le degré d'approximation *relatif* est constant.

La justification de cette remarque résulte de ce que

$$\mu \log(10^n z) = \mu(n + \log z),$$

en sorte que, de 10^{n-1} à 10^n, l'échelle est la même que de 1 à 10. Il suffit seulement de supposer l'origine rejetée à la distance $n\mu$ de l'origine primitive dans le sens négatif.

6. *Échelles dérivées. Étalons de graduation.* — Lorsqu'on possède une échelle de la fonction $f(z)$, il est très facile de construire l'échelle de la nouvelle fonction obtenue en y remplaçant z par une certaine fonction de z et, plus particulièrement, par $pz + q$, ce qui est le cas le plus ordinaire.

La nouvelle échelle est alors dite *dérivée* de la première, et celle-ci prend le nom d'*étalon*. Les échelles construites précédemment, si on les envisage à ce point de vue, seront donc appelées : *étalon métrique*, *étalon logarithmique*.

Supposons, par exemple, qu'on ait à construire sur un axe l'échelle de la fonction $\log(pz + q)$. On part de la valeur $z = a$ et l'on commence à construire l'échelle avec un certain échelon θ.

Ayant appliqué l'étalon logarithmique le long de l'axe à graduer, on marque d'abord un trait en face du point de l'étalon dont la cote est $pa + q$, puis, à partir de là, d'autres traits en face des points de cet étalon pris de $p\theta$ en $p\theta$. Comme, en général, $p\theta$ a une valeur simple telle que 0,1, 0,2, 0,5, cette opération se fait très rapidement. Elle n'est, en tout cas, pas plus compliquée que celle qui consiste à

porter sur un axe la graduation $pz + q$ au moyen de l'étalon métrique.

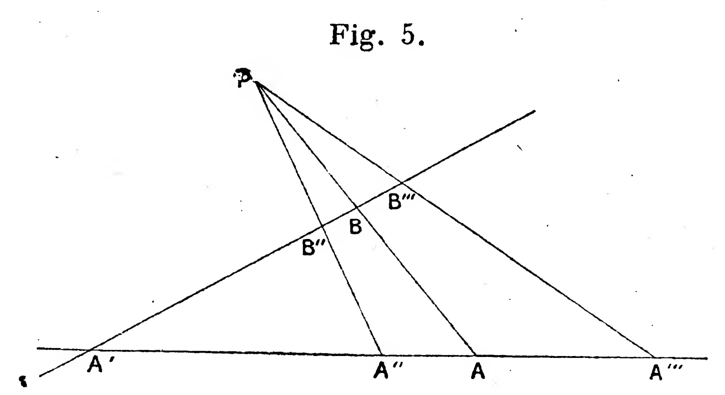
On pourra même énoncer cette opération en disant tout simplement que l'*on porte la graduation* $pz + q$ *au moyen d'un étalon logarithmique*.

Tout dessinateur de nomogramme devant aujourd'hui avoir sous la main un étalon logarithmique (¹) aussi bien qu'un étalon métrique, on voit qu'*au point de vue de la simplicité de la construction il sera indifférent d'adopter une solution comportant le tracé de l'échelle soit de* $f(z)$, *soit de* $\log f(z)$. On trouvera dans la suite de l'Ouvrage de nombreuses occasions d'appliquer cette remarque, l'emploi des échelles logarithmiques y étant très fréquent.

7. *Échelles transformées. Échelles projectives.* — On peut également déduire de l'échelle de $f(z)$ les échelles des fonctions $R[f(z)]$, R étant une fonction rationnelle, par application de transformations géométriques simples; les nouvelles échelles ainsi obtenues sont alors dites *transformées* de la première.

L'exemple le plus simple qui puisse être donné d'une telle transformation est celui de l'échelle projective la plus générale de celle de $f(z)$, qui prend le nom d'*échelle homographique* lorsque $f(z)$ se réduit à z.

Fig. 5.



Une telle échelle est définie par l'équation

$$F(z) = \frac{mf(z) + n}{pf(z) + q} \qquad \text{avec} \qquad \delta = mq - np \neq 0.$$

(¹) La maison Tavernier-Gravet a construit, d'après nos conseils, une règle portant à la fois, des étalons logarithmiques de modules respectivement égaux à 50^{cm}, 25^{cm}, $12^{cm},5$, $\frac{25^{cm}}{3}$, qui répondent à tous les besoins pratiques.

Fig. 6.

On sait, et d'ailleurs il est immédiat de vérifier, que le rapport anharmonique de quatre valeurs quelconques de $F(z)$ est le même que celui des quatre valeurs correspondantes de $f(z)$. Il s'ensuit que les ponctuelles constituées par les deux échelles sont projectives l'une de l'autre et, par suite, que, si les rayons déterminés par trois couples de points correspondants passent par un même point P, il en est de même de tous les autres rayons analogues.

Soient donc A', A'', A''' trois points directement déterminés de l'échelle de $F(z)$, correspondant respectivement aux valeurs z', z'', z''' de la variable (*fig.* 5). Sur un axe quelconque passant par A' portons l'échelle de la fonction $f(z)$ dont nous possédons l'étalon, de telle sorte que son point coté z' tombe en A', et soient B'' et B''' les points cotés z'' et z'''. Le point de rencontre P de $A''B''$ et $A'''B'''$ constitue dès lors le centre à partir duquel, pour la position envisagée, l'échelle de $F(z)$ est effectivement projective de celle de $f(z)$. Dès lors, le rayon issu de P qui passe par le point B coté z sur la seconde donne sur la première le point A coté avec la même valeur de z.

Soit, par exemple, à construire l'*échelle segmentaire* portée par le segment de droite A_0A_∞, telle que le point coté z sur cette échelle soit le point A tel que $\frac{A_0A}{AA_\infty} = -z$. Sur cette échelle le point coté o est en A_0, le point coté ∞ en A_∞, le point A_1 coté 1 au milieu de A_0A_∞. Par A_0 faisons passer un axe quelconque sur lequel nous porterons une échelle métrique ayant son point coté o en A_0, son point coté 1 en B_1. Le centre P sera dans ce cas à la rencontre de la droite A_1B_1 et de la parallèle à A_0B_1 menée par A_∞; la projection de l'échelle métrique faite à partir de ce point P sur A_0A_∞ fournit l'échelle segmentaire demandée (*fig.* 6). On remarquera que la construction générale conduit ici à celle même que donnerait le simple emploi de la Géométrie élémentaire.

8. *Échelles isogrades.* — Nous avons supposé jusqu'ici que l'échelle était construite pour des valeurs de la variable croissant par échelons égaux. Cela conduit pour toute échelle autre

qu'une échelle métrique, à des intervalles inégaux entre les points marqués. Rien n'empêche, si l'on préfère avoir des points régulièrement espacés, de satisfaire à cette condition en sacrifiant alors l'égalité des échelons. On obtient ainsi ce que nous appelons une échelle *isograde*.

Fig. 7.

1,00 1,04 1,09 1,15 1,21 1,26 1,32 1,38 1,45 1,52 1,58 1,66 1,74 1,82 1,91 2,00 2,09 2,19 2,29 2,40 2,52 2,64 2,76 2,89 3,02 3,16 3,33 3,47 3,63 3,81 3,99 4,17 4,37 4,58 4,79 5,02 5,25 5,50 5,76 6,03 6,31 6,61 6,92 7,25 7,59 7,95 8,32 8,71 9,12 9,55 10

Le principe de la construction d'une telle échelle est bien simple. Partant de la valeur a, et s'étant donné, outre le module μ, l'intervalle constant i entre les points de division successifs, on détermine les cotes z', z'', z''', ... de ces points par les équations

$$\frac{i}{\mu} = f(z') - f(a) = f(z'') - f(z') = f(z''') - f(z'') \quad \ldots.$$

La détermination de z', z'', z''', ... se fera très aisément si l'on possède une table de la fonction $f(z)$. On n'aura qu'à relever les valeurs de l'argument correspondant à des valeurs de la fonction croissant en progression arithmétique.

La figure 7 donne l'échelle logarithmique isograde construite de 0 à 10 avec $\mu = 125^{mm}$, $i = 2^{mm},5$.

Le défaut d'une telle disposition est d'exiger une chiffraison complète, au lieu que, avec les échelles normales, comme nous l'avons indiqué dans la remarque finale du n° **2**, on peut n'inscrire des chiffres que de loin en loin, comme sur un double-décimètre. Nous en signalerons plus loin un avantage (n° **27**, 2°).

II. — Équations à deux variables.

Convenons tout d'abord d'une notation qui nous servira uniformément dans toute la suite de cet Ouvrage pour l'exposé des principes et des méthodes *in abstracto*.

Les variables entrant dans une équation seront représentées par la lettre z affectée d'indices correspondants : z_1, z_2, z_3, ..., et les lettres désignant des fonctions de ces variables seront affectées des indices de toutes les variables dont dépendent ces fonctions; ainsi, f_1 désignera une fonction de la seule variable z_1; f_2, une fonction de la seule variable z_2; f_{12}, une fonction des variables z_1 et z_2; f_{123}, une fonction des variables z_1, z_2, z_3; et ainsi de suite.

9. *Représentation par échelles accolées.* — Cela posé, considérons une équation de la forme

$$z_2 = f_1,$$

qui est très fréquente dans la pratique.

Supposons construites, de part et d'autre d'un même axe et à partir de la même origine, les échelles

$$x = \mu z_2 \quad \text{et} \quad x = \mu f_1.$$

Dès lors, deux valeurs de z_1 et de z_2, se correspondant en vertu de l'équation précédente, seront inscrites en face d'un même point de l'axe supportant les deux échelles. Il suffira donc, étant donnée l'une d'elles, z_1 par exemple, de *lire la valeur de z_2 correspondant, sur la seconde échelle, au point coté z_1 sur la première.*

Si z_1 a pour limites a_1 et b_1, on construira l'échelle (z_1) entre ces limites et l'échelle (z_2) entre les valeurs correspondantes a_2 et b_2, données par

$$a_2 = f_1(a_1), \qquad b_2 = f_1(b_1).$$

EXEMPLES :

1° *Nombre probable des écarts.* — Si la fonction $\Theta(t)$ est définie par l'égalité (¹)

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du,$$

on sait que le nombre probable N, sur 1000, des écarts inférieurs, en valeur absolue, à celui dont le rapport à l'écart probable est ρ, est donné par

$$N = 1000\,\Theta(\rho).$$

Prenant comme module $\mu = 0^{mm},13$, on représentera cette formule en construisant sur un même axe les deux échelles

$$x = 0^{mm},13\,N \quad \text{et} \quad x = 130^{mm}\,\Theta(\rho).$$

On obtient ainsi la figure 8, empruntée au *Traité de nivellement de haute précision*, de M. Lallemand (²).

2° *Dépression de l'horizon de la mer.* — La formule qui fait connaître,

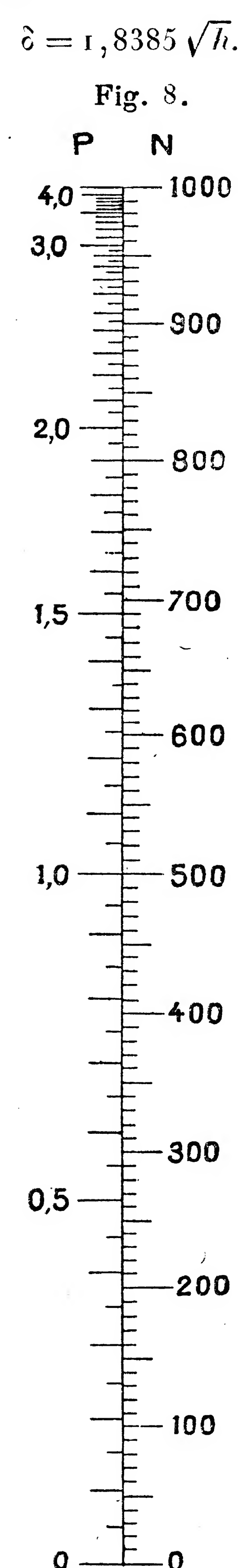
(¹) On possède les tables de cette fonction. *Voir* notamment le *Calcul des probabilités* de J. Bertrand, p. 329.

(²) Page 227 du tirage à part de cet Ouvrage, extrait du Volume : *Lever des plans et nivellement* de l'*Encyclopédie des Travaux publics* (1889), et page 575 de ce Volume.

en minutes, la dépression δ de l'horizon de la mer en fonction de l'altitude h, en mètres, de l'œil de l'observateur au-dessus du niveau de la mer, lorsqu'on tient compte de la réfraction, est

$$\delta = 1,8385\sqrt{h}.$$

Fig. 8.



Si, prenant pour module $\mu = 8^{\text{mm}}$, on construit sur le même axe les deux échelles

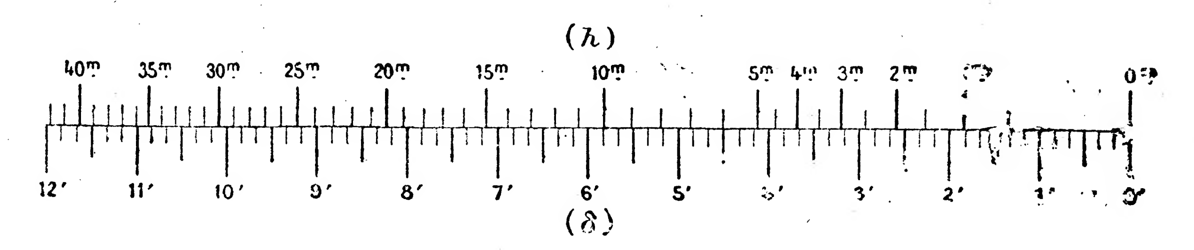
$$x = 8^{\text{mm}}\,\delta$$

et

$$x = 14^{\text{mm}},708 \sqrt{h},$$

on obtient la figure 9, empruntée au Mémoire de M. Favé sur les Éphémérides graphiques (¹).

Fig. 9.



Les calculs nautiques s'effectuant encore à l'aide de la division sexagésimale du cercle, l'intervalle correspondant à chaque minute d'angle a été divisé en six parties égales, de sorte que l'échelle de la dépression est divisée de 10 en 10 secondes. D'après ce que nous avons dit à propos de l'interpolation à vue (n° 4), un bon lecteur obtiendra donc sur cette échelle la dépression à 1 seconde près.

Par exemple, pour $h = 15^{\text{m}}$, il lira $\delta = 7'7''$.

Remarque. — Nous avons supposé les deux échelles portées sur le même axe, mais nous pouvons tout aussi bien les supposer portées sur deux axes parallèles, les points se correspondant de l'un à l'autre sur des perpendiculaires à leur direction commune, qu'on pourra mener par les points de division de l'une des deux échelles, (z_2) par exemple.

10. *Inversion des échelles.* — Reprenant l'équation

$$z_2 = f_1,$$

supposons qu'on la résolve par rapport à z_1. Elle devient alors

$$z_1 = f_2.$$

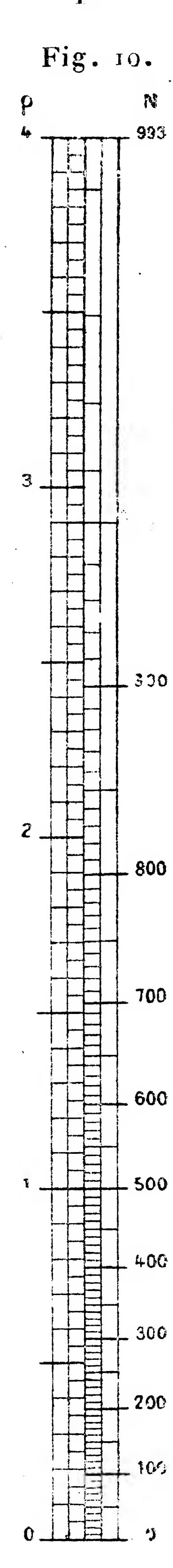
Les fonctions f_1 et f_2 sont dites *inverses* l'une de l'autre.

On pourrait représenter l'équation mise sous cette nouvelle forme ainsi qu'on l'a fait précédemment, mais si la première représentation a déjà été effectuée, l'établissement de la seconde est immédiat. Il suffit, en effet, après avoir disposé le long d'un axe une échelle

(¹) *Annales hydrographiques*; 1894.

métrique z_1, d'inscrire de l'autre côté de l'axe les valeurs correspondantes de z_2, relevées sur les premières échelles accolées.

Fig. 10.



Les échelles qui accompagnent l'échelle métrique sur l'une et sur l'autre représentation sont dites, comme les fonctions correspondantes, *inverses* l'une de l'autre.

Par exemple, si l'on opère ainsi l'inversion de l'échelle de la figure 8, on obtient celle de la figure 10, qui se rencontre dans le *Cours d'Artillerie* du commandant Jouffret [1].

11. *Accolement de deux échelles fonctionnelles.* — L'équation entre z_1 et z_2 peut encore être mise sous la forme

$$f_1 = f_2,$$

soit qu'on ne puisse, par les procédés de l'Algèbre élémentaire, dégager du signe fonctionnel ni z_1 ni z_2, soit qu'on ait intérêt à adopter pour l'une des variables une échelle spéciale. Il arrivera notamment que, en vue d'avoir pour l'une des variables une approximation relative constante, on la représentera par une échelle logarithmique.

La représentation, dans cette hypothèse, s'obtient tout aussi facilement. Il suffit de construire, de part et d'autre d'un même axe, les échelles définies par

$$x = \mu f_1 \quad \text{et} \quad x = \mu f_2.$$

Voici, à titre d'exemple, la représentation de l'équation

$$\tan g\,\alpha_1 = \sin \alpha_2,$$

obtenue par M. Lallemand avec $\mu = 0^{m},1$ (*fig.* 11).

Si, l'équation étant mise sous la forme

$$(1) \qquad z_1 = f_2,$$

on adopte pour la variable z_1 l'échelle

$$(2) \qquad x = \varphi_1,$$

l'échelle de la variable z_2 s'obtiendra par l'élimination de z_1 entre les équations (1) et (2), ce qui donnera

$$x = \varphi_2.$$

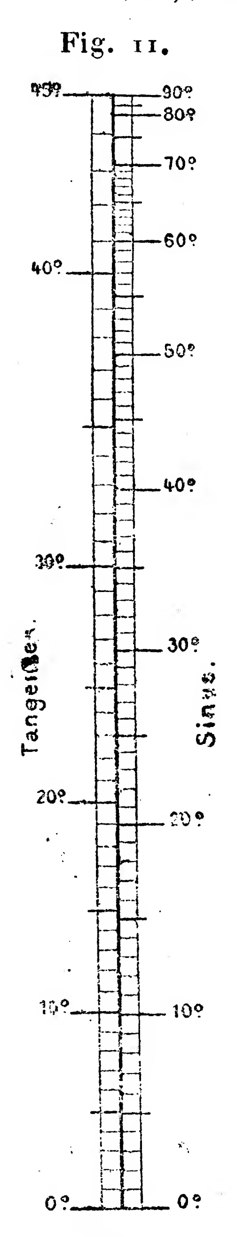
Si l'élimination peut se faire sous cette forme explicite, on est

---

(1) *Cours d'Artillerie : Les Projectiles*, p. 118. (Fontainebleau, 1881.) Le commandant Jouffret considérant non pas la valeur absolue des écarts, mais ces écarts eux-mêmes pris avec leur signe, l'échelle se reproduit symétriquement de part et d'autre du zéro, les cotes de l'échelle du nombre probable des coups étant réduites de moitié.

ramené au cas précédent. Sinon, après avoir construit l'échelle (z_1), on calcule les valeurs de z_1 qui, en vertu de l'équation (1), correspondent à un certain nombre de valeurs de z_2 et, en face des points ainsi obtenus sur l'échelle (z_1), on inscrit ces valeurs de z_2.

Fig. 11.



On obtient de cette façon l'échelle (z_2) sans avoir eu à effectuer l'élimination algébrique destinée à faire connaître l'équation (3).

Exemple : *Erreur probable d'une nivelée.* — Dans la détermination de l'erreur accidentelle probable d'une nivelée par diagrammes anamorphosés, l'abscisse X et l'ordonnée Y, à l'origine, de la droite de répartition, sont données, en décimillimètres, par les formules

$$(1) \qquad X = 6,44\eta\sqrt{2,823 - \log\eta},$$

$$(2) \qquad Y = \frac{665}{\eta},$$

en fonction de l'erreur probable η, qui est représentée par une échelle logarithmique.

La représentation de l'équation (2) s'obtient immédiatement, μ étant le module, au moyen des formules

$$x = \mu \log \eta, \qquad x = \mu \log(665 - \log Y).$$

En prenant $\mu = 11^{\text{cm}}$, on obtient ainsi l'échelle de gauche de la figure 12 [1].

Pour construire directement l'échelle (X) de l'équation (1), il faudrait, après avoir éliminé η entre cette équation et l'équation

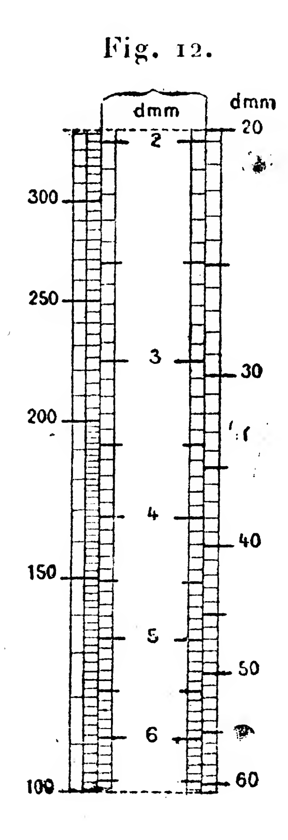
$$x = \mu \log \eta,$$

ce qui donne

$$X = 6{,}44 \times 10^{\frac{x}{\mu}} \sqrt{2{,}823 - \frac{x}{\mu}},$$

tirer de là x sous forme explicite, ce qui ne se peut pas. On est donc obligé de procéder comme il vient d'être dit, c'est-à-dire de calculer les valeurs de X pour un certain nombre de valeurs de η et de marquer les points correspondants en se servant de l'échelle de η. On obtient ainsi l'échelle de droite de la figure 12.

Fig. 12.



Remarque. — Nous avons supposé jusqu'ici que les échelles

---

[1] Cette figure reproduit la figure 77 du *Traité de nivellement de haute précision* de M. Lallemand.

étaient toujours construites sur des droites. C'est en effet ce qu'il y a de plus simple; mais rien, le cas échéant, ne s'opposerait à ce qu'elles fussent disposées le long d'une courbe, si, par exemple, les valeurs de l'une des variables provenaient d'une première représentation où cette variable serait nécessairement représentée par des points cotés distribués sur une certaine courbe.

12. *Représentation cartésienne métrique.* — On peut affecter à chacune des deux variables une échelle métrique en établissant le lien entre points correspondants par l'intermédiaire d'une courbe, selon la méthode cartésienne.

Imaginons que l'on porte sur deux axes rectangulaires Ox et Oy les échelles

$$x = \mu_1 z_1 \quad \text{et} \quad y = \mu_2 z_2,$$

et que, par les points de division marqués sur chacun de ces axes, on leur élève des perpendiculaires.

Si les valeurs z_1 et z_1 satisfont ensemble à l'équation

$$(1) \qquad F_{12} = 0,$$

les perpendiculaires élevées aux axes correspondants par les points cotés z_1 et z_2 se coupent en un certain point. Les points répondant ainsi aux divers couples de valeurs z_1 et z_2 satisfaisant à l'équation (1) sont distribués sur une certaine courbe C qui, rapportée aux axes Ox et Oy, a pour équation

$$F_2\left(\frac{x}{\mu_1}, \frac{y}{\mu_2}\right) = 0.$$

Les divers points de la courbe C, déterminés individuellement, sont facilement marqués sur le plan, grâce au quadrillage ci-contre défini, et l'on voit que la courbe C obtenue par jonction de tous ces points au moyen d'un trait continu suffit à constituer une représentation de l'équation (1).

Si l'on se donne l'une des variables, z_1 par exemple, on n'a qu'à prendre le point où la courbe C est rencontrée par la perpendiculaire à Ox passant par le point de cet axe coté z_1 et à lire la cote z_2 du pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur Oy.

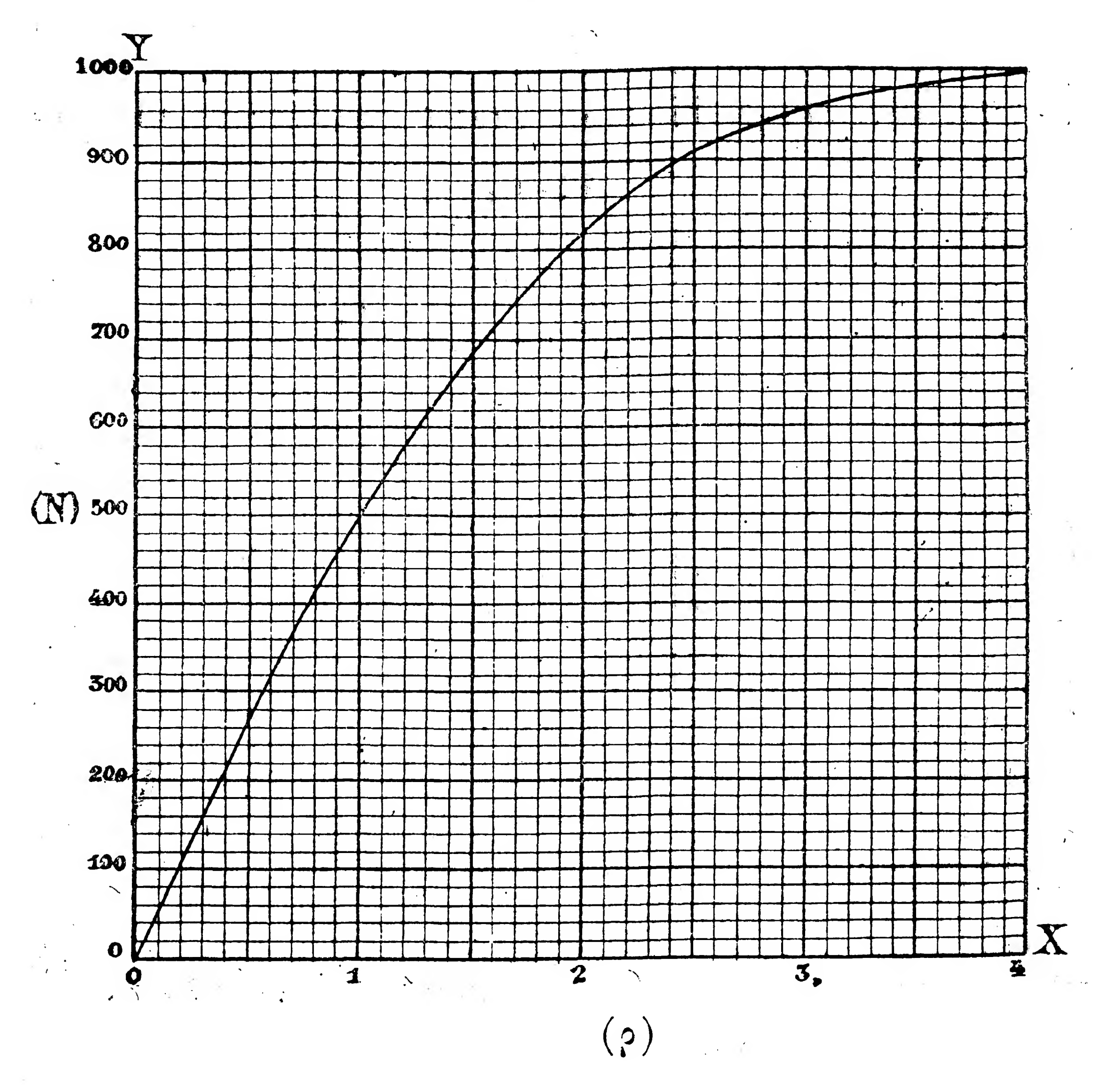
Il ne sera d'ailleurs pas nécessaire de tracer ces perpendiculaires. Si, par hasard, elles coïncident avec deux des droites du quadrillage,

cela va de soi. S'il n'en est pas ainsi, on peut, par la pensée, les intercaler entre celles-ci, effectuant de la sorte sur le quadrillage une interpolation à vue, analogue à celle dont nous avons déjà parlé (n° 4) à propos des simples échelles.

La figure 13 donne une telle représentation pour l'équation

$$N = 1000\,\Theta(\rho)$$

Fig. 13.



déjà envisagée au n° 9, établie avec les modules $\mu_1 = 1^{\text{cm}}$ pour Ox, $\mu_2 = 0^{\text{cm}},004$ pour Oy.

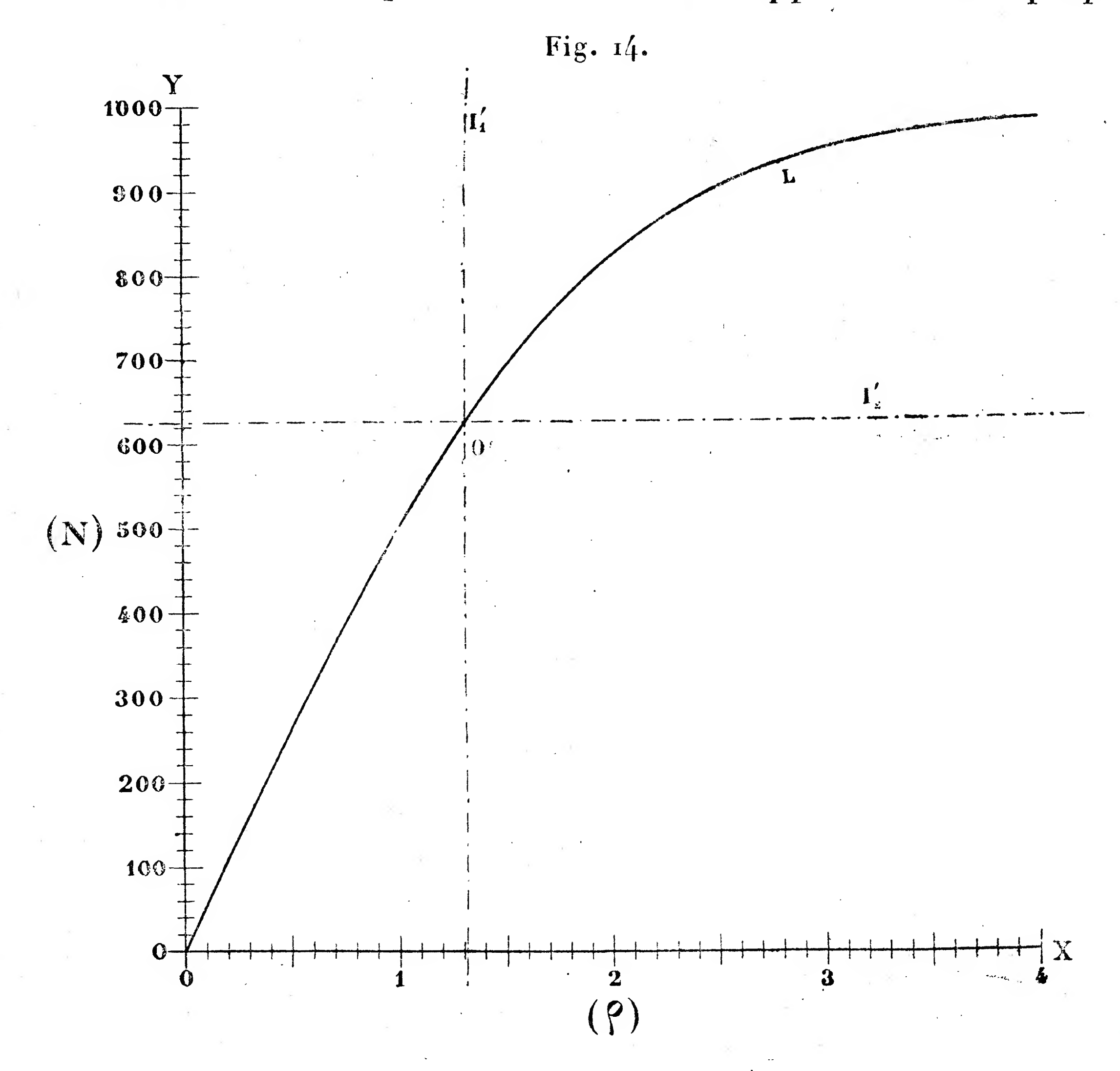
Remarque. — Si la variable z_1 a pour limites les valeurs a_1 et b_1, il n'y a lieu de tracer la courbe C qu'entre les perpendiculaires à Ox correspondant aux points $x = \mu_1 a_1$ et $x = \mu_1 b_1$. Les perpendiculaires abaissées sur Oy des extrémités de cet arc de courbe déterminent les limites correspondantes a_2 et b_2 de la variable z_2.

13. *Emploi d'un transparent.* — Pour éviter à la fois le tracé d'un système de droites parallèles et la nécessité d'effectuer, le cas échéant, une interpolation à vue entre ces droites, il est tout naturel d'avoir recours à une droite tracée sur un transparent mobile, mais convenablement orienté, qu'on fera glisser sur le tableau.

Selon le cas, on se servira de cet artifice pour l'un des deux ou pour les deux systèmes de droites parallèles constituant le quadrillage défini au numéro précédent.

Dans les deux cas, le transparent portera deux axes rectangulaires qui seront dits ses *index*. Si l'on fait glisser l'un d'eux le long de l'axe Ox, les diverses positions de l'autre suppléeront aux perpendiculaires à cet axe non tracées. On en trouvera un exemple plus loin (n° **22**; 3°).

Fig. 14.



Si, en maintenant ses index respectivement parallèles aux axes Oz et Oy, on déplace le transparent de façon que son *centre* (point de rencontre des index) reste sur la courbe C, on voit que, pour

chacune de ces positions, les cotes des points où les index couperont les échelles des axes fourniront un système de valeurs correspondantes.

Pour maintenir l'orientation du transparent, on peut tracer sur le tableau une série de parallèles à la direction de l'un des axes, laissant entre elles des intervalles égaux assez petits, 5^{mm} par exemple. L'index du transparent parallèle à l'axe considéré tombera entre deux de ces parallèles, et l'on sait que l'œil apprécie très exactement le parallélisme de deux droites peu écartées l'une de l'autre.

On peut aussi constituer le transparent au moyen d'une matière rigide et mince (verre, corne, celluloïd, etc.) ayant deux bords rigoureusement parallèles aux deux index. Dans ce cas, après avoir mis l'index I_2 en coïncidence avec Ox, de façon que le centre du transparent se trouve au point coté z_1, on applique une règle contre le bord du transparent parallèle à I_1 et l'on fait glisser ce transparent le long de cette règle jusqu'à ce que son centre soit venu sur la courbe C. L'index I_2 rencontre alors l'axe Oy en un point dont la cote fait connaître z_2.

La figure 14 reproduit la représentation de la figure 13, modifiée comme il vient d'être dit. La position du transparent, correspondant à l'exemple numérique $\rho = 1{,}3$, $N = 620$, est indiquée en pointillé.

14. *Emploi d'une échelle mobile.* — Supposons que, dans le mouvement qui vient d'être décrit, le transparent entraîne l'axe Ox. On voit alors que l'on devra l'arrêter dans une position telle que le point de l'axe Ox coté z_1 se trouve sur la courbe C. Cela suggère l'idée de cette autre disposition.

On ne laisse subsister sur le tableau que l'axe Oy, avec sa graduation, et la courbe C, et on le complète par un transparent portant deux axes, l'un $O'y'$, non gradué, destiné à diriger les mouvements du transparent en glissant le long de Oy, l'autre, $O'x'$, perpendiculaire au premier, portant la graduation (z_1) précédemment marquée sur Ox.

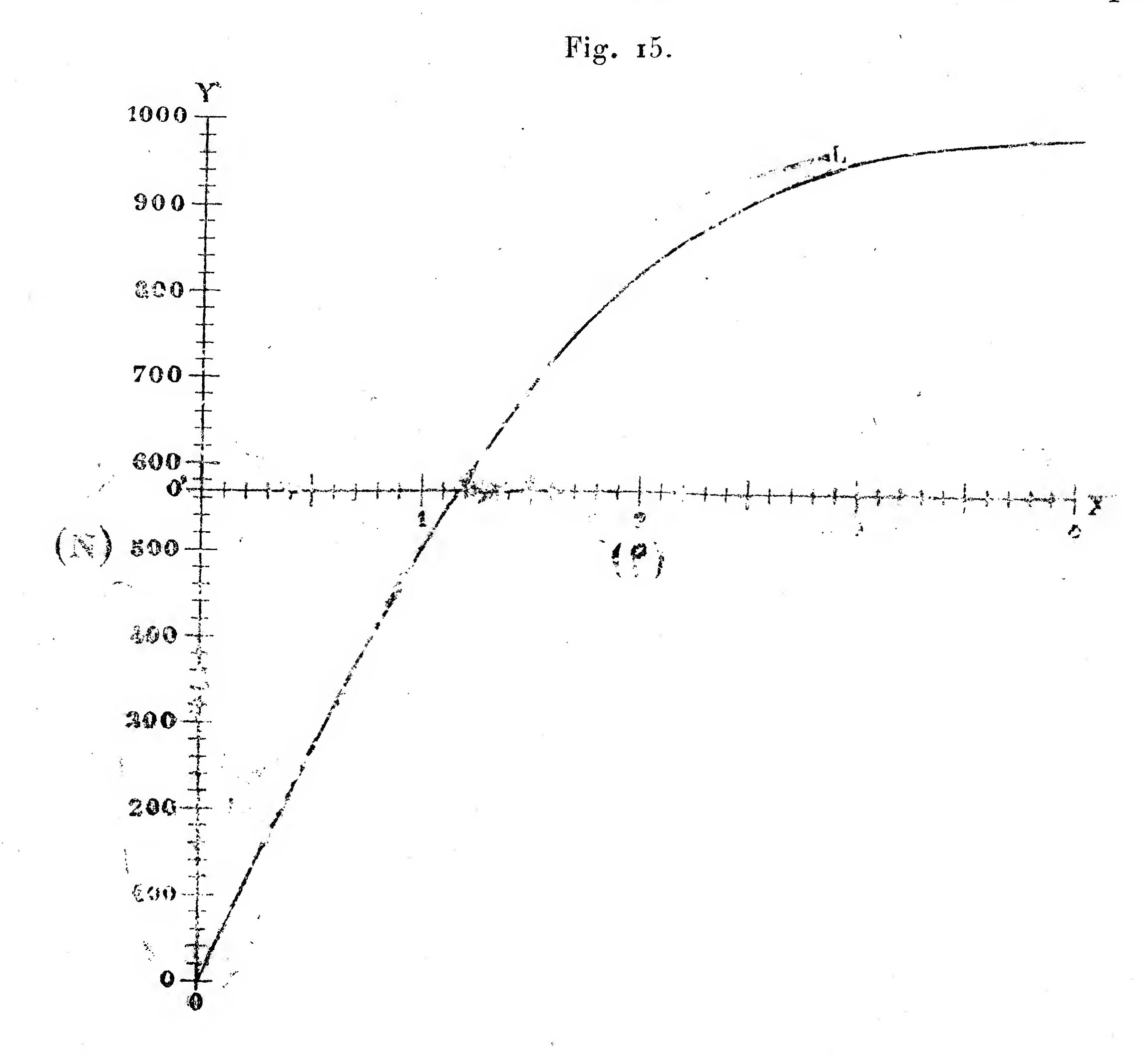
Le mode d'emploi du tableau est alors le suivant :

On fait glisser le transparent en maintenant $O'y'$ en coïncidence avec Oy jusqu'à ce que le point z_1 de l'axe $O'x'$ se trouve sur

la courbe C. *La cote du point de* Oy *avec lequel coïncide* O' *est alors égale à* z_2.

On pourrait évidemment rendre mobile l'axe Oy au lieu de Ox. La figure 15 montre ce que devient, avec cette nouvelle disposi-

Fig. 15.

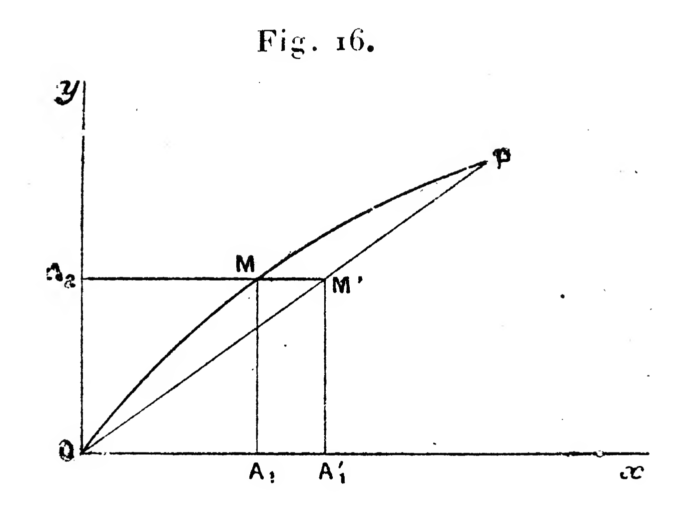


tion, la représentation donnée par la figure 14. Il ne faut pas perdre de vue, en examinant cette figure, que l'axe $O'x'$ est lié à un axe $O'y'$ qu'on peut faire glisser le long de Oy.

15. *Anamorphose.* — Nous avons supposé les variables z_1 et z_2 représentées respectivement sur les axes Ox et Oy par des échelles métriques. C'est évidemment ce qui est le plus simple ; mais on peut, dans certains cas particuliers, être amené à adopter d'autres échelles. Il n'y aurait alors rien à changer à ce qui précède ; on aurait encore recours à la courbe lieu du point de rencontre des perpendiculaires aux axes Ox et Oy, élevées par les points cotés z_1 et z_2 ; seulement cette courbe ne serait pas la même que dans le cas précédent.

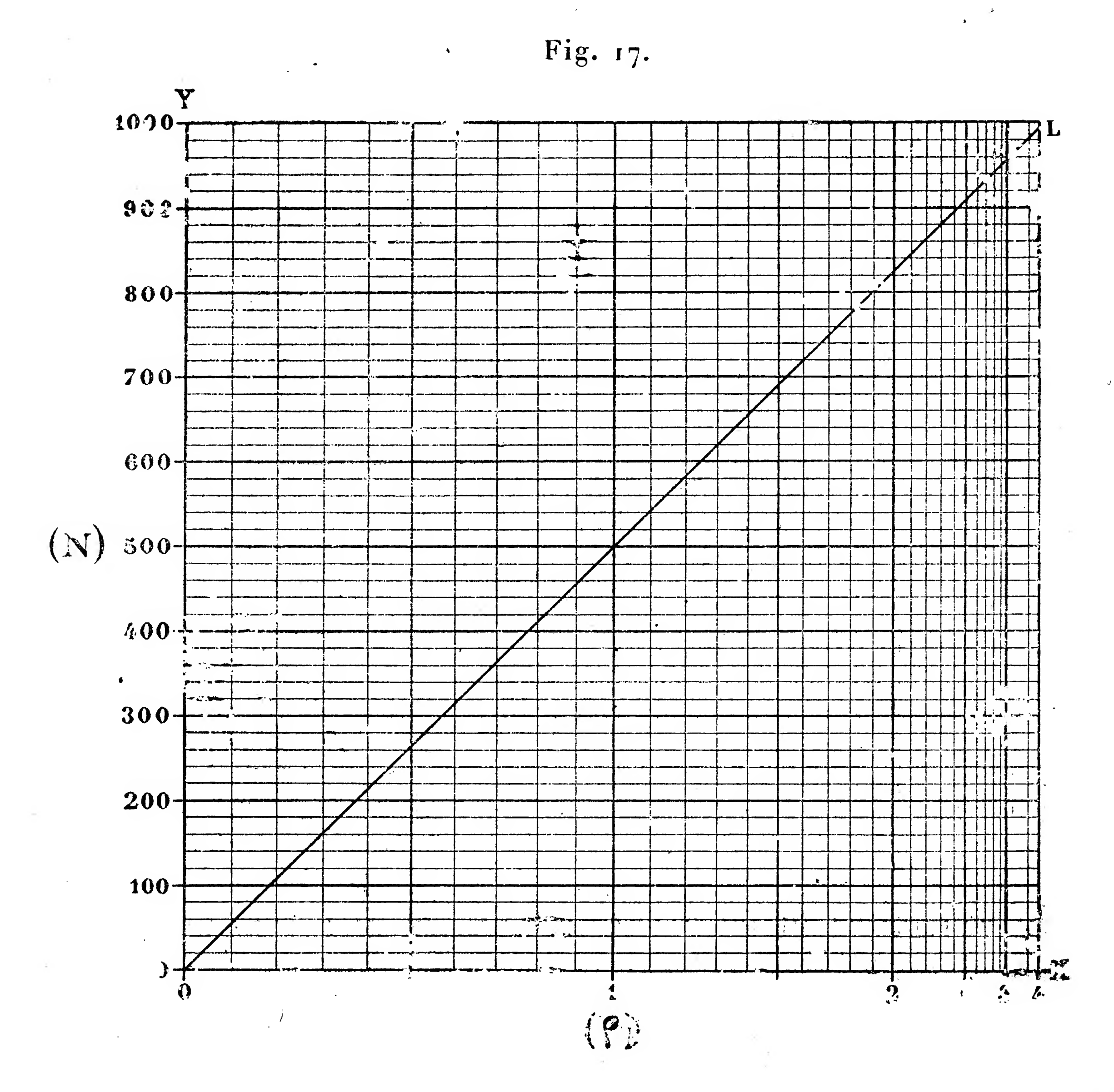
On peut, en particulier, toujours substituer une droite à la courbe

Fig. 16.



qui serait construite au moyen de deux échelles métriques en transformant convenablement une de ces échelles.

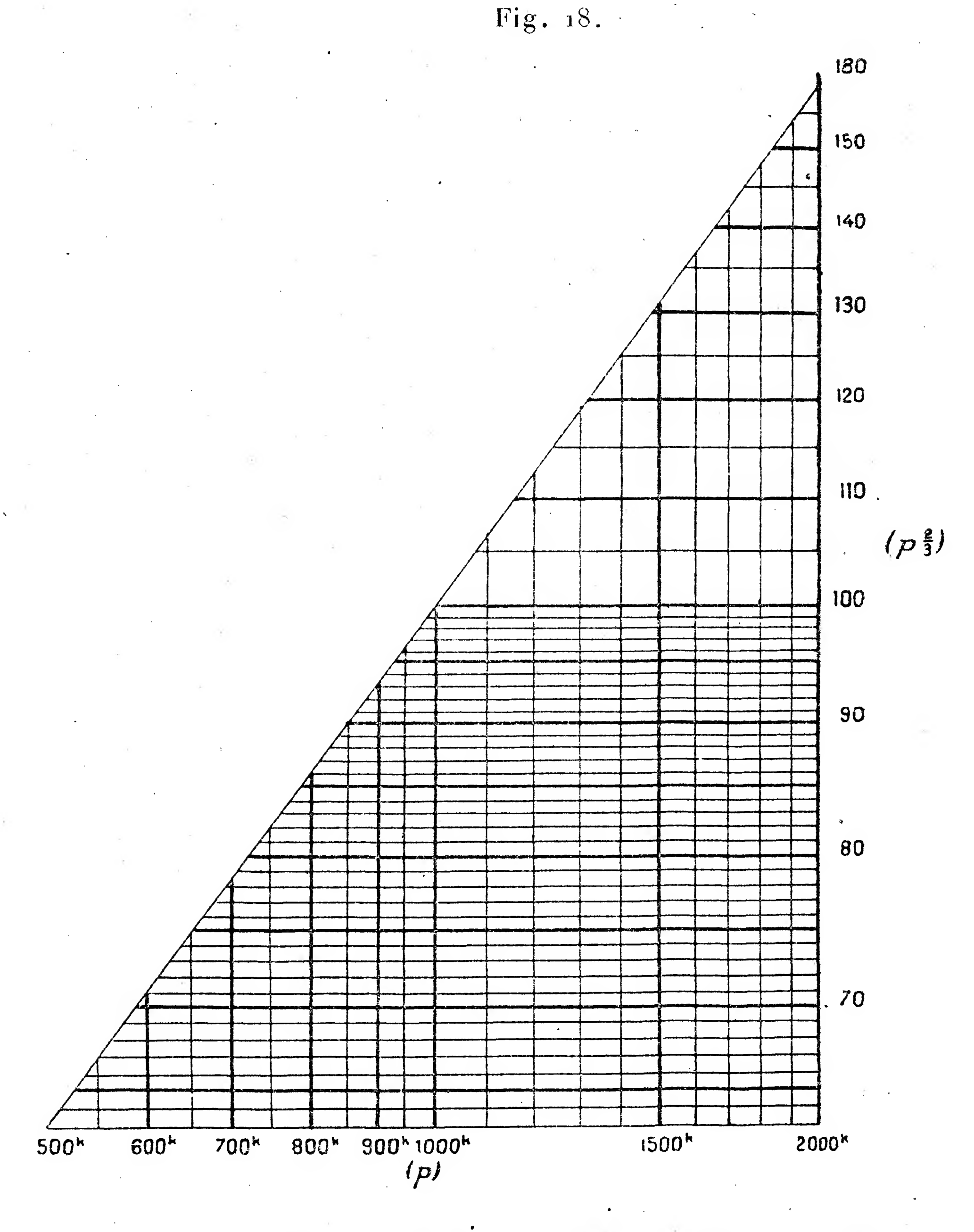
Fig. 17.



Soit, par exemple (*fig.* 16), OP la courbe obtenue avec des échelles métriques portées sur Ox et Oy. Les points A_1 et A_2 res-

pectivement cotés z_1 et z_2 correspondent au point M de la courbe OP. Pour substituer à la courbe OMP la droite OM′P, choisie d'ailleurs au hasard, il suffit de modifier l'échelle portée sur Ox en transportant la cote z_1, d'abord inscrite à côté du point A_1, au point A'_1 obtenu en prolongeant la perpendiculaire A_2M à Oy jusqu'en son

Fig. 18.



point de rencontre M′ avec la droite OP et abaissant du point P la perpendiculaire $M'A'_1$ sur Ox.

Cette transformation, qui substitue la droite OM′P à la courbe OMP, est ce que Lalanne a appelé une *anamorphose géométrique*, ainsi qu'on le verra plus loin (nº 23).

Appliquée à la figure 13, l'anamorphose donne la figure 17.

Voici un autre exemple emprunté à la *Pratique du calcul des planchers* du capitaine du Génie Grison (¹) :

Ce tableau, reproduit par la figure 18, fait connaître la valeur de

$$q = p^{\frac{2}{3}}$$

en fonction de celle de p, pour p variant de 500 à 2000.

(¹) Brochure autographiée à l'École du Génie de Grenoble (1891). Le tableau du capitaine Grison s'étend en réalité de $p = 50$ à $p = 2000$.

CHAPITRE II.

REPRÉSENTATION PAR LIGNES CONCOURANTES DANS LE CAS DE TROIS VARIABLES.

I. — Abaques cartésiens.

16. *Abaques cartésiens à trois variables* [1]. — Soit à construire un diagramme coté pour l'équation

$$F_{123} = 0. \tag{1}$$

L'idée qui se présente tout d'abord à l'esprit est celle-ci : donnons à l'une des variables, de préférence à celle qui sera le plus généralement calculée en fonction des deux autres [2], z_3, par exemple,

---

(1) Il semble bien que ce soit Pouchet qui, dans son *Arithmétique linéaire* (1795), ait tenté le premier de faire systématiquement usage d'un abaque cartésien. La même idée se rencontre pourtant déjà dans les *Longitud Tables* et *Horary Tables* de Margetts, publiés à Londres en 1791 ; on la retrouve ensuite dans les travaux de d'Obenheim, officier du Génie (*Balistique*, 1814; *Mémoire sur la planchette du canonnier*, 1818); de Piobert, officier d'Artillerie (*Mémorial de l'Artillerie*, 1826) ; de Bellencontre, également officier d'Artillerie (*Mémorial de l'Artillerie*, 1830) ; d'Allix, ingénieur de la Marine (*Nouveau système de tarifs*, 1840). C'est Terquem qui fit remarquer, à propos des publications de d'Obenheim et de Bellencontre (*Mémorial de l'Artillerie*, 1830), la généralité de ce mode de représentation des équations à trois variables, en l'assimilant à celui des surfaces topographiques au moyen de la projection de leurs courbes de niveau, dont les inventeurs furent Philippe Buache (*Essai de Géographie physique* dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1752), Ducarla (*Expression des nivellements*, 1782) et Dupain-Triel (*Méthode nouvelle de nivellement*, 1804). D'après M. Favaro, l'emploi des courbes de niveau, dans certains cas particuliers, se rencontre chez divers auteurs plus anciens : Bassantin (*Astronomique Discours*, 1557); le P. Jean-François (*Art du fontainier*, 1665).

(2) Bien qu'un nomogramme à trois variables permette, en général, indifféremment le calcul d'une des variables en fonction des deux autres, il convient, principalement pour la limitation du tableau, de distinguer celles que l'on a le plus habituellement à considérer comme indépendantes. Dans la pratique, ce choix n'est pas douteux, attendu que, dans la plupart des formules représentées, c'est toujours la même variable qui est prise pour inconnue.

une valeur déterminée. Nous avons alors une équation entre les deux variables z_1 et z_2, que nous pourrons représenter, ainsi que cela a été indiqué au n° 12, au moyen d'une courbe tracée sur le quadrillage défini par les formules

$$(z_1) \qquad x = \mu_1 z_1,$$
$$(z_2) \qquad y = \mu_2 z_2,$$

μ_1 et μ_2 étant des modules choisis en vue de la meilleure disposition.

L'équation de cette courbe sera

$$(z_3) \qquad F_{123}\left(\frac{x}{\mu_1}, \frac{y}{\mu_2}, z_3\right) = 0.$$

Cette courbe, le long de laquelle l'élément z_3 conserve une même valeur, a été dite par Lalanne une *courbe d'égal élément*, puis par l'auteur allemand Vogler une *courbe isoplèthe* (ἴσος, égal; πλῆθος, quantité). Ce dernier terme a été depuis lors adopté par Lalanne. Nous dirons tout simplement une *courbe cotée*.

Construisons de même les courbes répondant à une série de valeurs de z_3, croissant par échelons réguliers, en ayant soin d'*inscrire à côté de chacune d'elles la valeur de z_3 correspondante*.

Remarquons d'ailleurs qu'il suffira de tracer la portion de chaque courbe comprise à l'intérieur du rectangle formé par les perpendiculaires élevées respectivement à Ox et à Oy par les points correspondant aux valeurs limites a_1 et b_1 de z_1, a_2 et b_2 de z_2, qui sont des données de la question, puisque nous avons supposé que z_1 et que z_2 étaient les variables indépendantes.

Nous obtenons donc, à l'intérieur d'un rectangle quadrillé (*fig.* 19), un système de courbes cotées qui nous fournit la représentation demandée dans les limites admises pour les variables indépendantes. Ce rectangle quadrillé figurant une sorte de damier (en grec, ἄβαξ), Lalanne a donné à ce genre de diagramme le nom d'*abaque* [1].

Faisant une fois pour toutes la convention de désigner par les termes d'*horizontale* et de *verticale* les parallèles respectives à Ox et à Oy, nous pourrons énoncer le mode d'emploi d'un tel abaque,

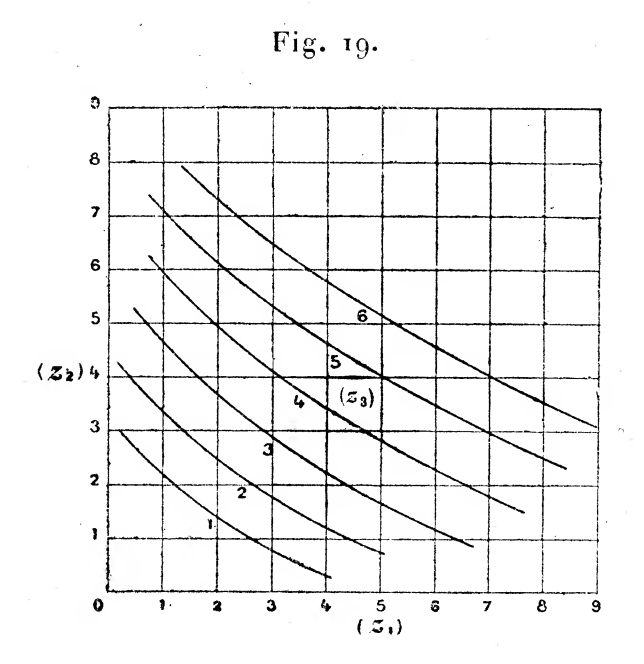
---

[1] *Voir* le cinquième renvoi de l'Introduction.

en vue d'obtenir la valeur de z_3 lorsqu'on s'est donné z_1 et z_2 de la manière suivante : *lire la cote z_3 de la courbe passant par le point de rencontre de la verticale cotée z_1 et de l'horizontale cotée z_2.*

Par exemple, sur la figure 19, pour $z_1 = 2$, $z_2 = 5$, on a $z_3 = 4$.

Fig. 19.



Il va sans dire que cette lecture suppose, le cas échéant, le secours d'une interpolation à vue. Par exemple, sur la figure 19, pour $z_1 = 4{,}5$, $z_2 = 2{,}5$, on lirait $z_3 = 3{,}5$.

Nous avons admis que l'équation considérée servait de préférence à calculer z_3 en fonction de z_1 et z_2, mais on voit immédiatement que l'abaque permet tout aussi bien d'obtenir z_1 ou z_2 lorsque l'autre de ces deux variables est donnée ainsi que z_3.

Par exemple, z_2 et z_3 étant donnés, *on aura z_1 en lisant la cote de la verticale passant par le point de rencontre de l'horizontale cotée z_2 et de la courbe cotée z_3.*

Les abaques ainsi constitués, dérivant directement de l'application des coordonnées cartésiennes, sont dits *abaques cartésiens*. Terquem a remarqué qu'ils peuvent être considérés comme fournissant la représentation par courbes de niveau de la surface définie par l'équation (1) où z_1, z_2 et z_3 sont prises pour des coordonnées cartésiennes de l'espace.

Remarque. — Les courbes (z_3) ont une enveloppe dont l'équation s'obtient, comme on sait, en éliminant z_3 entre l'équation (z_3) et sa

dérivée par rapport à z_3

$$\frac{\partial}{\partial z_3} F_{123}\left(\frac{x}{\mu_1}, \frac{y}{\mu_2}, z_3\right) = 0.$$

Mais il sera généralement superflu de déterminer cette enveloppe d'ailleurs bien souvent extérieure à la partie utile de l'abaque, limitée à l'aire du rectangle ci-dessus défini.

17. *Rattachement au principe des échelles accolées.* — A simple titre de curiosité, nous ferons remarquer que le principe de la représentation des équations à trois variables, obtenu ci-dessus par la voie la plus naturelle, peut également se dégager du mode de représentation des équations à deux variables, exposé au n° 9, lorsqu'on tient compte de la remarque qui termine ce numéro.

Donnant à z_1 dans l'équation (1) du numéro précédent *une valeur particulière* z_1^0, nous avons à représenter une équation entre les deux variables z_2 et z_3

(1) $$F(z_1^0, z_2, z_3) = 0.$$

Pour cela, portons respectivement, sur l'axe Oy et sur la parallèle à cet axe dont l'abscisse est

(2) $$x = \mu_1 z_1^0,$$

les graduations (z_2) et (z_3) définies par

(3) $$y = \mu_2 z_2$$

et

(4) $$y = \varphi(z_3, z_1^0),$$

cette dernière équation étant celle qu'on obtient en explicitant par rapport à y l'équation

(4′) $$F\left(z_1^0, \frac{y}{\mu_2}, z_3\right) = 0.$$

Lorsque nous donnerons à z_1^0 d'autres valeurs, la graduation de Oy ne variera pas et nous aurons de nouvelles graduations sur d'autres verticales, en vertu des équations (2) et (4).

Nous pourrons joindre par une même courbe tous les points qui, sur ces verticales, correspondent à une même valeur de z_3, valeur qui servira de cote à cette courbe.

L'équation d'une telle courbe s'obtient par l'élimination de z_1^0 entre (2)

et (4) ou, ce qui revient au même, entre (2) et (4'). Elle est donc

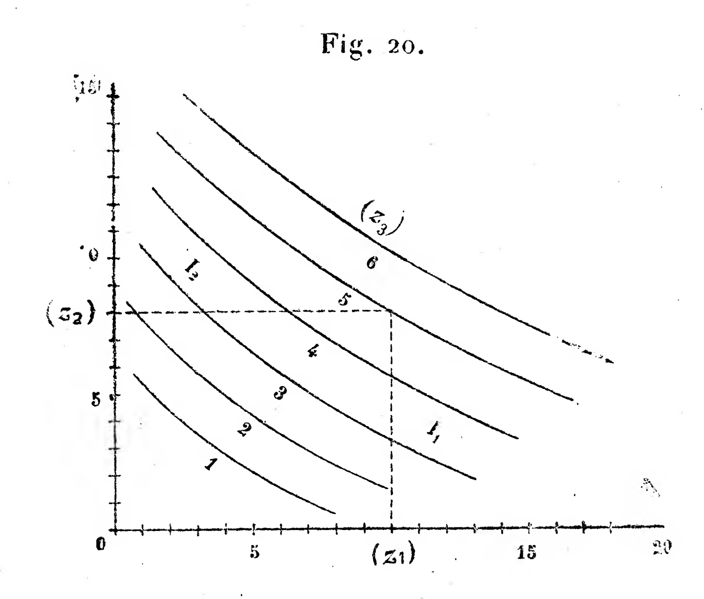
$$F\left(\frac{x}{\mu_1}, \frac{y}{\mu_2}, z_3\right) = 0.$$

On voit qu'on retrouve bien ainsi les courbes précédentes. Il se rencontrera d'ailleurs des cas où l'on aura avantage, pour la construction de l'abaque, à suivre la marche résultant de ce mode d'exposition (¹).

18. *Emploi d'un transparent ou d'une échelle mobile.* — On pourra ici encore recourir à l'emploi d'un transparent tel qu'il a été décrit au n° **13**.

Le mode d'emploi de l'abaque sera alors le suivant (*fig.* 20) :

Fig. 20.



Le transparent étant orienté, faire passer les index I_1 *et* I_2 *respectivement par les points cotés* z_1 *et* z_2 *sur* Ox *et* Oy; *la cote de la courbe sur laquelle se trouve alors le centre du transparent fait connaître* z_3.

Par exemple, sur la figure 20, pour $z_1 = 10$, $z_2 = 8$, on a $z_3 = 5$.

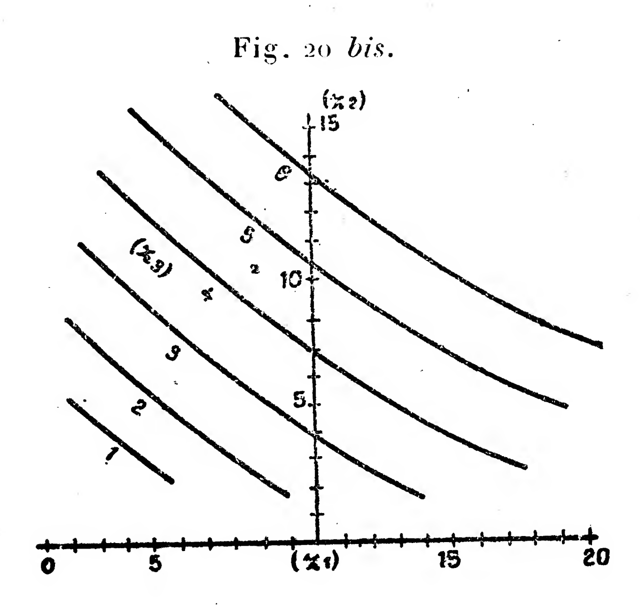
On pourra aussi, comme cela a été indiqué au n° **14**, permettre à l'un des axes Ox ou Oy, le second par exemple, de glisser sur lui-même. Dans ce cas, le mode d'emploi devient le suivant (*fig.* 20 *bis*) :

On amène l'origine O' *de l'axe mobile* $O'y'$ *au point* z_1 *de*

(¹) On en retrouvera un exemple au n° 7 de **O.60** à propos de l'abaque des écarts probables du tir sur terrain incliné, construit par le lieutenant d'artillerie Jean Aubert (aujourd'hui ingénieur des Ponts et Chaussées).

l'axe Ox. Le point z_2 de l'axe O'y' tombe alors sur une courbe dont la cote fait connaître z_3.

Fig. 20 *bis*.



Sur la figure 21, pour $z_1 = 10$, $z_2 = 4$, on a $z_3 = 3$.

19. *Exemples.* — Les exemples d'application de cette méthode sont extrêmement nombreux. Ils comprennent notamment tous les tableaux graphiques construits depuis les premiers essais de Pouchet jusqu'aux travaux de Lalanne, dont quelques-uns ont été cités dans le premier renvoi du n° 16.

Nous signalerons ici le tableau de multiplication de Pouchet, et l'abaque construit par MM. Favé et Rollet de l'Isle pour les problèmes du point à la mer (¹).

1° *Premier type d'abaque de multiplication.* — La multiplication se traduit par l'équation

$$z_1 z_2 - z_3 = 0.$$

(¹) Il est essentiel de remarquer que la méthode s'applique sans nulle difficulté lorsque les trois variables sont liées par une loi qui n'est connue qu'empiriquement. En effet, à chaque couple de valeurs de deux des variables z_1 et z_2, prises comme indépendantes, correspond le point du quadrillage situé au croisement de la verticale (z_1) et de l'horizontale (z_2). Supposons que nous inscrivions en ce point la valeur correspondante de z_3. Nous n'aurons plus ensuite qu'à joindre, par une ligne continue, tous les points répondant à une même valeur de z_3 pour avoir la courbe cotée (z_3), de même qu'en unissant sur un plan topographique les points de même cote par un trait continu on obtient ses courbes de niveau.

Les applications de cette méthode sont très fréquentes. On trouvera quelques détails, à ce sujet, dans le *Calcul graphique* de Favaro (traduction Terrier, p. 154 et suiv.) et dans l'important Ouvrage que Marey a consacré à la *Méthode graphique dans les Sciences expérimentales* (Iʳᵉ Partie, Chap. V). *Voir* aussi l'exemple cité dans le renvoi précédent.

Voici comment les équations (1) et (2) permettent de résoudre les cinq premier cas [1]

1er *cas* :	Pour	$\alpha_3 \equiv a,\quad \alpha_1 \equiv b,$	on a	$\alpha_2 \equiv c,\quad \alpha_4 \equiv B,$
	»	$\alpha_1 \equiv c,\quad \alpha_2 \equiv b,$	»	$\alpha_4 \equiv C,$
2e *cas* :	»	$\alpha_1 \equiv b,\quad \alpha_2 \equiv c,$	»	$\alpha_3 \equiv a,\quad \alpha_4 \equiv B,$
	»	$\alpha_1 \equiv c,\quad \alpha_2 \equiv b,$	»	$\alpha_4 \equiv C,$
3^e *cas* :	»	$\alpha_3 \equiv a,\quad \alpha_4 \equiv B,$	»	$\alpha_1 \equiv b,\quad \alpha_2 \equiv c,$
	»	$\alpha_1 \equiv c,\quad \alpha_2 \equiv b,$	»	$\alpha_4 \equiv C,$
4^e *cas* :	»	$\alpha_1 \equiv c,\quad \alpha_4 \equiv B,$	»	$\alpha_3 \equiv a,\quad \alpha_2 \equiv c,$
	»	$\alpha_1 \equiv c,\quad \alpha_2 \equiv b,$	»	$\alpha_4 \equiv C,$
5e *cas* :	»	$\alpha_2 \equiv b,\quad \alpha_4 \equiv C,$	»	$\alpha_3 \equiv a,\quad \alpha_1 \equiv c,$
	»	$\alpha_2 \equiv b,\quad \alpha_2 \equiv c,$	»	$\alpha_4 \equiv B.$

Il suffit donc de superposer, sur un même quadrillage, les abaques des équations (1) et (2) pour pouvoir résoudre à vue, au moyen du tableau à quatre systèmes de lignes cotées ainsi obtenu, les cinq cas indiqués ci-dessus.

En prenant tout simplement pour lignes cotées (α_1) et (α_2)

(α_1) $$y = \mu\alpha_1,$$

(α_2) $$x = \mu\alpha_2,$$

ce qui donne

(α_3) $$\cos\frac{y}{\mu}\cos\frac{x}{\mu} = \cos\alpha_3,$$

(α_4) $$\cot\frac{y}{\mu}\sin\frac{x}{\mu} = \cot\alpha_4,$$

on obtient l'abaque de la figure 22, construit par MM. Favé et Rollet de l'Isle, ingénieurs hydrographes, en vue de l'application suivante [2] :

Dans la détermination du point à la mer par la hauteur des astres, on a à résoudre le triangle pôle-zénith-astre PZE (*fig.* 22 *bis*) connaissant la distance polaire PE $= \delta$, la colatitude PZ $= \lambda$ et l'angle horaire ZPE $= \mathcal{H}$. Il s'agit d'obtenir la distance zénithale ZE $= z$ et l'azimut BZE $=$ A, ou son supplément PZE [3].

On peut, pour effectuer cette résolution, appliquer le procédé de Towson, qui a déjà donné lieu aux tables de Lord Kelvin (Sir William Thomson) et qui consiste à mener par le point E le grand cercle EB normal au méridien PZ.

---

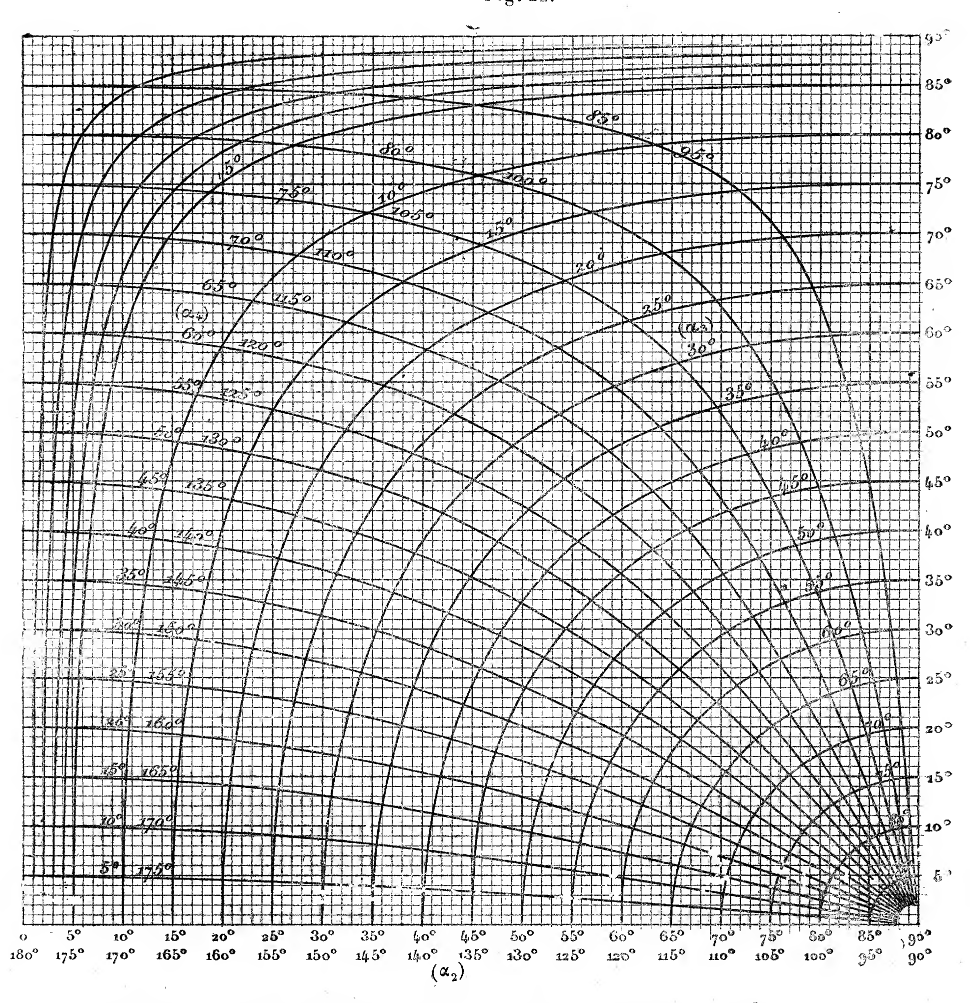
(1) On trouvera plus loin (n°s 103 et 115) des nomogrammes permettant de résoudre tous les cas possibles relatifs aux triangles sphériques quelconques.

(2) *Annales hydrographiques*, 1892.

(3) C'est cet angle que, dans leur Mémoire, MM. Favé et Rollet de l'Isle représentent par Az.

Dans le triangle rectangle PBE nous pouvons, connaissant δ et AH, calculer PB $= m$ et BE $= n$. C'est ici le troisième cas de résolution, et, en nous

Fig. 22.



reportant au tableau ci-dessus, nous voyons qu'il suffit de prendre

$$\alpha_3 = \delta, \qquad \alpha_4 = \mathit{AH},$$

pour que l'abaque donne

$$\alpha_1 = n, \qquad \alpha_2 = m.$$

Nous connaissons alors, dans le triangle rectangle ZBE,

$$\text{BE} = n \qquad \text{et} \qquad \text{ZB} = m - \lambda,$$

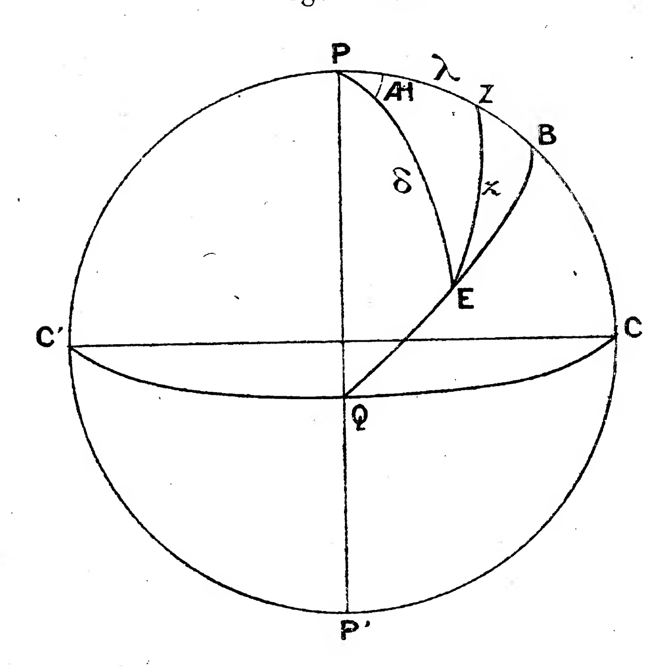
et nous devons calculer z et A. C'est ici le deuxième cas de résolution et le même tableau nous montre que pour

$$\alpha_1 = n, \qquad \alpha_2 = m - \lambda,$$

l'abaque donne

$$\alpha_3 = z, \qquad \alpha_4 = \text{A}.$$

Fig. 22 *bis*.



En résumé, l'emploi de l'abaque pour obtenir z et A, connaissant δ, Æ et λ, sera le suivant :

Ayant pris le point de rencontre des courbes $\alpha_3 = \delta$, *et* $\alpha_4 = \text{Æ}$, *on suit l'horizontale de ce point, jusqu'au point dont la distance au premier, comptée sur cette horizontale, est égale à* λ. *Les deux courbes passant par ce nouveau point donnent* $\alpha_3 = z$ *et* $\alpha_4 = \text{A}$.

En prenant sur les axes Ox et Oy des échelles de 2^{mm} pour 10′, et, traçant les courbes de 10′ en 10′, on obtient facilement l'approximation de la minute qui suffit pour les besoins de la navigation. La figure 22 *ter* reproduit, à grandeur d'exécution, un fragment de 10° carrés de l'abaque de MM. Favé et Rollet de l'Isle. L'interpolation parallèlement aux axes s'opère au moyen d'un transparent sur lequel un carré de 1° de côté est subdivisé en carrés de 10′ de côté.

Pour les différents usages auxquels cet abaque peut se prêter pour les besoins de la navigation, nous renvoyons au Mémoire des auteurs où la question est traitée dans les plus grands détails.

20. *Superposition des graduations; multiplicateurs correspondants.* — Supposons qu'une équation entre les trois variables z_1, z_2, z_3 soit telle que, si l'on a

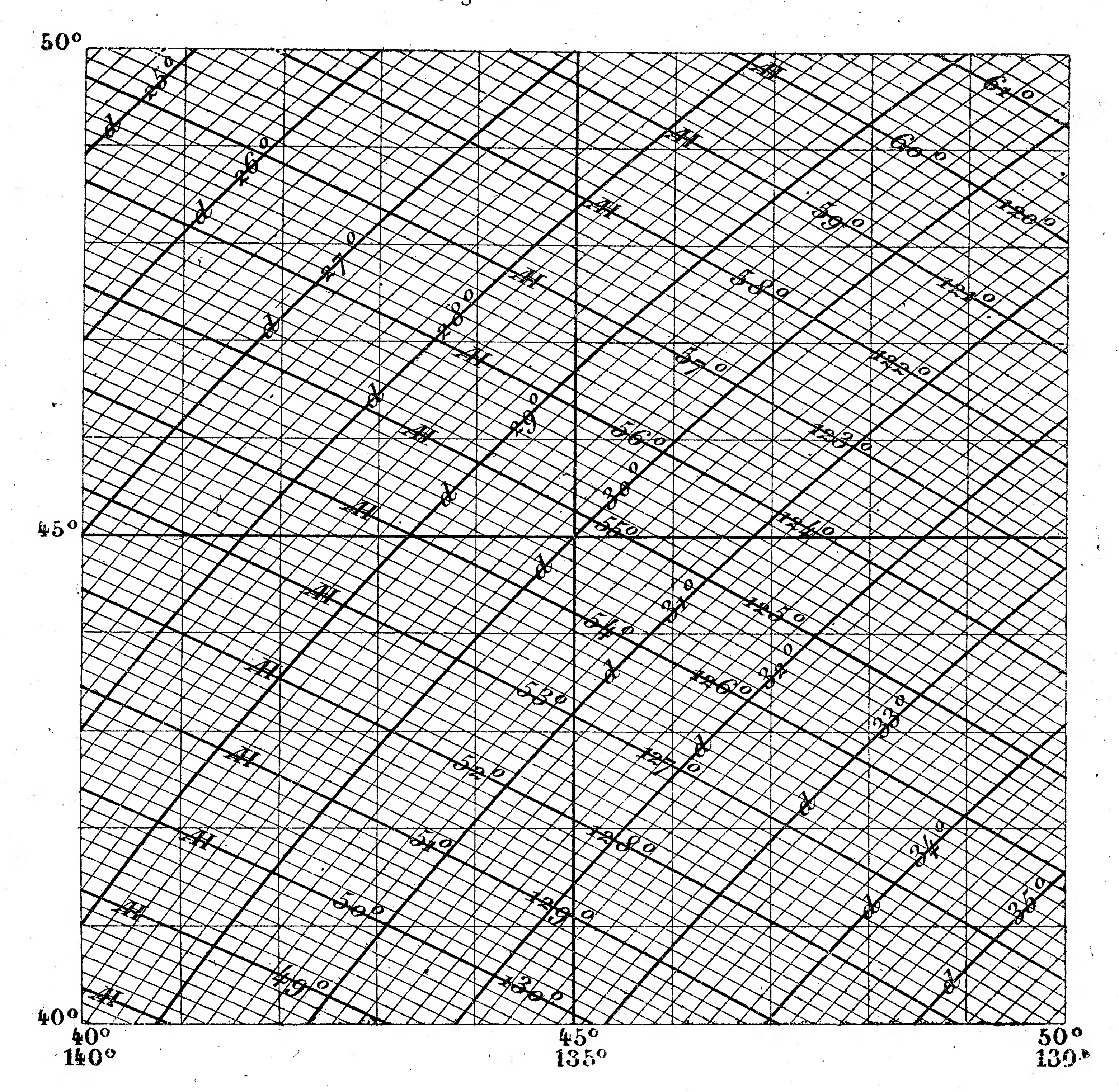
$$F(z_1, z_2, z_3) = 0,$$

on ait aussi, *quelle que soit la solution* (z_1, z_2, z_3),

$$F(f_1, f_2, f_3) = 0,$$

f_1, f_2 et f_3 étant des fonctions connues respectivement de z_1, z_2 et z_3.

Fig. 22 *ter*.



Dans ces conditions, l'abaque, construit entre certaines limites, permettra de résoudre encore l'équation proposée pour des valeurs prises en dehors de ces limites.

Supposons, en effet, que l'abaque ait été construit avec les limites a_1 et b_1 pour z_1, a_2 et b_2 pour z_2, a_3 et b_3 pour z_3. A côté de chaque valeur de z_1, z_2 et z_3 comprise entre ces limites, nous pourrons inscrire respectivement la valeur de f_1, de f_2 et de f_3, en doublant ainsi chacune des lignes de gradua-

tion. Dès lors, si nous prenons pour z_1 et z_2 des valeurs respectivement comprises entre $f_1(a_1)$ et $f_1(b_1)$, et entre $f_2(a_2)$ et $f_2(b_2)$, nous voyons que l'abaque nous fournira la valeur correspondante de z_3, à la condition que nous fassions usage, pour les éléments, droites et courbes, qui le constituent, des cotes inscrites dans les secondes lignes de graduation.

Il suffit que les limites primitives soient telles que les amplitudes de variation s'étendant de a_1 à b_1 et de $f_1(a_1)$ à $f_1(b_1)$ d'une part, de a_2 et b_2, et de $f_2(a_2)$ à $f_2(b_2)$ de l'autre, aient une partie commune pour qu'il n'y ait pas de lacune dans le champ de variation auquel l'abaque est applicable.

C'est en cela que consiste le principe de la *superposition des graduations*.

Après avoir construit l'abaque, on peut, sans rien changer aux droites et aux courbes tracées, superposer aux graduations primitives de nouvelles graduations s'en déduisant suivant des lois connues et fournissant encore des solutions de *la même équation*.

Il pourra arriver que les fonctions f_1, f_2, f_3, ou certaines d'entre elles, soient assez simples pour que le calcul de leur valeur se fasse immédiatement de tête. Ce sera le cas, par exemple, si ces fonctions se réduisent au produit des variables z_1, z_2, z_3 par des facteurs simples comme 2, 5, 10 ou une puissance de 10. Lorsque cette circonstance se produira, il sera évidemment inutile d'inscrire sur l'abaque la seconde graduation qu'une opération mentale permettra de déduire immédiatement de la première.

Ces facteurs respectifs dits *multiplicateurs correspondants* sont à envisager surtout sous les deux formes suivantes :

1° Si l'on multiplie deux des variables z_1 et z_2 par des facteurs *quelconques* λ_1 et λ_2, il pourra arriver que la nouvelle valeur z'_3 de la troisième variable puisse se déduire de sa valeur z_3 correspondant à z_1 et z_2.

Cela aura lieu lorsque l'on aura

$$(1) \qquad z_3 = \Delta(z_1^{n_1} z_2^{n_2}),$$

Δ étant une fonction quelconque, n_1 et n_2 des constantes quelconques. On voit, en effet, que l'on a, dans ce cas, en représentant par ∇ la fonction inverse de Δ,

$$(2) \qquad z'_3 = \Delta\left(\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}\,\nabla(z_3)\right).$$

Le cas le plus simple est celui où l'on a

$$(1\ bis) \qquad z_3 = k z_1^{n_1} z_2^{n_2},$$

parce qu'alors (2) devient

$$(2\ bis) \qquad z'_3 = \lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2} z_3.$$

Autrement dit, *si le système de valeurs* (z_1, z_2, z_3) *satisfait à l'équation* (1 *bis*), *il en est de même du système* $(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2, \lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2} z_3)$.

λ_1, λ_2 et $\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}$ constituent alors des *multiplicateurs correspondants* pour les variables z_1, z_2 et z_3.

En prenant pour λ_1 et λ_2 des valeurs simples, telles que 10 et ses puissances, par exemple, on voit que les nouvelles valeurs de z_1, z_2, z_3 se déduiront de celles inscrites sur l'abaque, par une simple opération mentale, sans difficulté aucune.

2° Supposons maintenant que les facteurs par lesquels on multiple z_1 et z_2, au lieu d'être indépendants l'un de l'autre, soient λ et λ^m, m étant une constante.

La circonstance indiquée se présentera dans ce cas lorsqu'on aura

(3) $$z_3 = \Delta\left(z_1 f\left(z_1 z_2^{-\frac{1}{m}}\right)\right),$$

Δ et f étant des fonctions quelconques. On voit, en effet, que, dans ce cas,

(4) $$z'_3 = \Delta(\lambda \nabla(z_3)).$$

L'équation (3) pourra encore s'écrire

(3') $$z_3 = \Delta(z_1^n f(z_1^p z_2^q)),$$

le nombre m étant alors

$$m = -\frac{p}{q}.$$

Dans ce cas (¹), on aura

(4') $$z'_3 = \Delta(\lambda^n \nabla(z_3)).$$

Si, par exemple, l'équation est de la forme

(5) $$h_2 z_2 z_1^{n_2} + h_3 z_3 z_1^{n_3} + 1 = 0,$$

elle peut s'écrire

$$z_3 = -\frac{z_1^{-n_3}}{h_3}(h_2 z_2 z_1^{n_2} + 1)$$

et rentre bien ainsi dans le type (3'). Alors

$$m = -n_2.$$

(¹) Il ne faudrait pas croire que, sous cette forme, l'equation fût plus générale que sous la précédente. Il suffit, en effet, de poser

$$\Delta(t^n) = \Delta_1(t), \qquad \sqrt[n]{f(u^p)} = f_1(u), \qquad \frac{q}{p} = -\frac{1}{m},$$

pour qu'elle devienne

$$z_3 = \Delta_1\left(z_1 f_1\left(z_1 z_2^{-\frac{1}{m}}\right)\right).$$

et la formule (4′) donne

$$z_3' = \lambda^{-n_3} z_3.$$

Autrement dit, *si le système* (z_1, z_2, z_3) *satisfait à l'équation* (5), *il en est de même du système* (λz_1, $\lambda^{-n_2} z_2$, $\lambda^{-n_3} z_3$).

C'est-à-dire que, dans ce cas, *les variables* z_1, z_2 *et* z_3 *admettent les multiplicateurs correspondants* λ, λ^{-n_2}, λ^{-n_3} (1).

Considérons en second lieu l'équation

$$(6) \qquad z_3 = (h z_1^p z_2^q)^{z_1^n}.$$

Pour voir qu'elle rentre dans le type (3′), il suffit de l'écrire

$$z_3 = e^{z_1^n \log(h z_1^p z_2^q)}.$$

On a dès lors

$$m = -\frac{p}{q},$$

et la formule (4′) devient

$$z_3' = z_3^{\lambda^n}.$$

Par suite, *lorsque le système* (z_1, z_2, z_3) *satisfait à l'équation* (6), *il en est de même du système* $\left(\lambda z_1, \lambda^{-\frac{p}{q}} z_2, z_3^{\lambda^n}\right)$.

C'est par l'examen de divers cas particuliers que nous avons été conduits aux types (1) et (3).

M. G. Kœnigs a démontré depuis lors qu'ils sont les plus généraux correspondant à la propriété caractéristique de chacun d'eux. On trouvera sa démonstration aux Annexes (Note I).

21. *Abaques à lignes droites.* — Parmi les abaques qui viennent d'être définis, il convient de distinguer ceux sur lesquels les courbes (z_3) se réduisent elles-mêmes à des droites; de tels abaques se rencontrent fréquemment dans la pratique.

Si nous nous reportons au n° 16, nous voyons que, pour que cette circonstance se présente, il faut que l'équation (z_3) soit de la forme

$$(z_3) \qquad \frac{x}{\mu_1} g_3 + \frac{y}{\mu_2} h_3 + f_3 = 0$$

et, par suite, l'équation (1)

$$z_1 g_3 + z_2 h_3 + f_3 = 0.$$

---

(1) Dans ce cas, le principe des multiplicateurs correspondants se trouve appliqué dans la brochure **O. 4** (p. 91). Il a été exposé sous forme géométrique par M. A. Chancel dans une étude dont il sera question plus loin (n° 51, 2°).

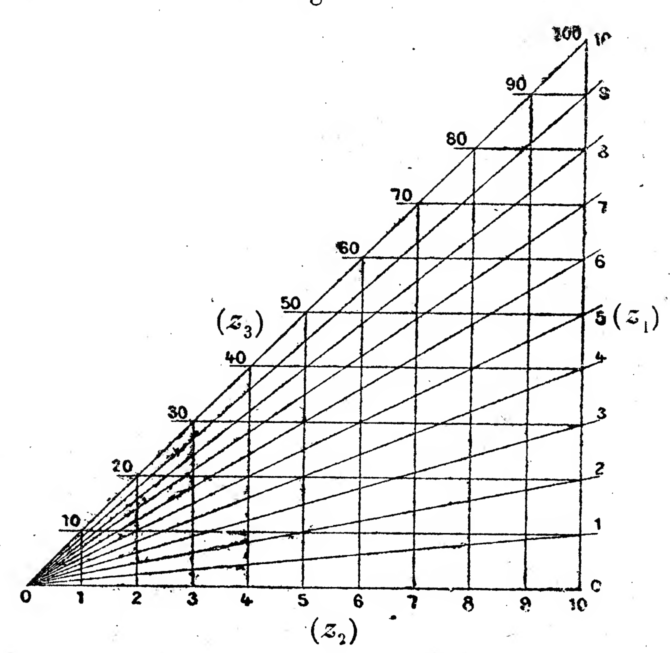
Dans ce cas, il pourra être plus intéressant que dans le cas général de considérer l'enveloppe E des courbes (z_3) qui sont ici des droites. Si, en effet, la portion utile de cette enveloppe se trouve dans les limites de l'abaque, elle pourra dispenser du tracé des droites (z_3). Il suffira d'inscrire la cote de chacune de ces droites à côté de son point de contact avec la courbe E.

Étant données des valeurs pour z_1 et z_2, pour avoir la valeur correspondante de z_3, il suffira de mener par le point de rencontre des axes du quadrillage cotés z_1 et z_2 une tangente à la courbe E (ce qui se fera très aisément au moyen d'un index rectiligne marqué sur un transparent) et de lire la cote du point de contact de cette tangente. On pourra évidemment, le cas échéant, avoir ainsi plusieurs solutions, lorsque du point de rencontre des droites cotées z_1 et z_2 il sera possible de mener plusieurs tangentes à la courbe E.

22. *Exemples : 1° Second type d'abaque de multiplication.* — L'équation de la multiplication étant écrite

$$z_1 z_2 - z_3 = 0,$$

Fig. 23.



il suffit de constituer le quadrillage au moyen des droites

(z_2) $$x = \mu_2 z_2,$$

(z_3) $$y = \mu_3 z_3,$$

pour que les courbes cotées (z_1) soient des droites issues de l'origine

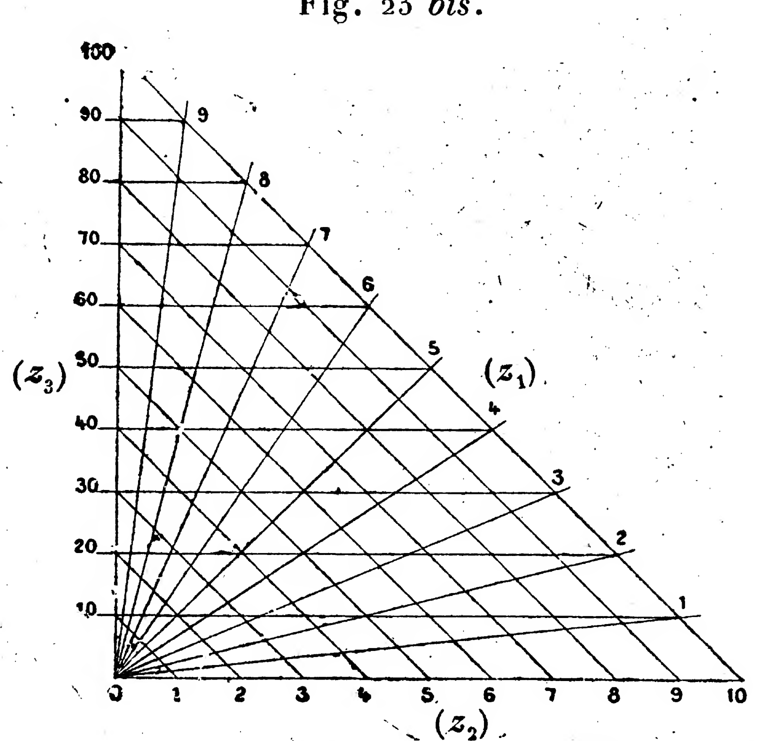
$$(z_1) \qquad y = \frac{\mu_3}{\mu_2} z_1 x.$$

En prenant $\mu_2 = 5^{mm}$, $\mu_3 = 0^{mm},5$, on obtient ainsi l'abaque de la figure 23 (¹).

Il va sans dire qu'ici s'applique le principe des multiplicateurs correspondants, l'équation étant la plus simple du type du n° 20 (1°). Les multiplicateurs correspondants pour z_1, z_2 et z_3 sont respectivement λ_1, λ_2 et $\lambda_1 \lambda_2$.

On obtient une meilleure disposition de l'abaque (*fig.* 23 *bis*) en prenant des axes de coordonnées non plus rectangulaires, mais faisant entre eux un angle égal à 135°. Nous devons cette remarque à l'obligeance de M. Frochot, ancien conservateur des Forêts (²).

Fig. 23 *bis*.



2° *Résolution de l'équation trinome du troisième degré.* — Soit l'équation

$$z^3 + pz + q = 0.$$

Choisissant un module μ quelconque, nous pouvons construire l'abaque de

---

(¹) Le *triangle à calcul* de M. P. Chenevier, qui figure dans les galeries du Conservatoire des Arts et Métiers, n'est autre qu'une forme particulière de cet abaque, dans laquelle, au lieu de tracer un certain nombre des droites (z_1) issues de l'origine, on a fixé en cette origine un fil que l'on peut tendre pour le faire passer par les points d'une graduation placée sur un bord du cadre et repérant les positions des droites (z_1) non tracées.

(²) C'est en 1892, au Congrès de l'*Association française pour l'Avancement des Sciences*, qui se tenait à Pau, que M. Frochot nous a communiqué son abaque. Il l'avait, croyons-nous nous rappeler, publié dans un Ouvrage, mais nous manquons sur ce point d'indication précise.

cette équation en prenant

$$x = \mu p, \qquad y = \mu q,$$

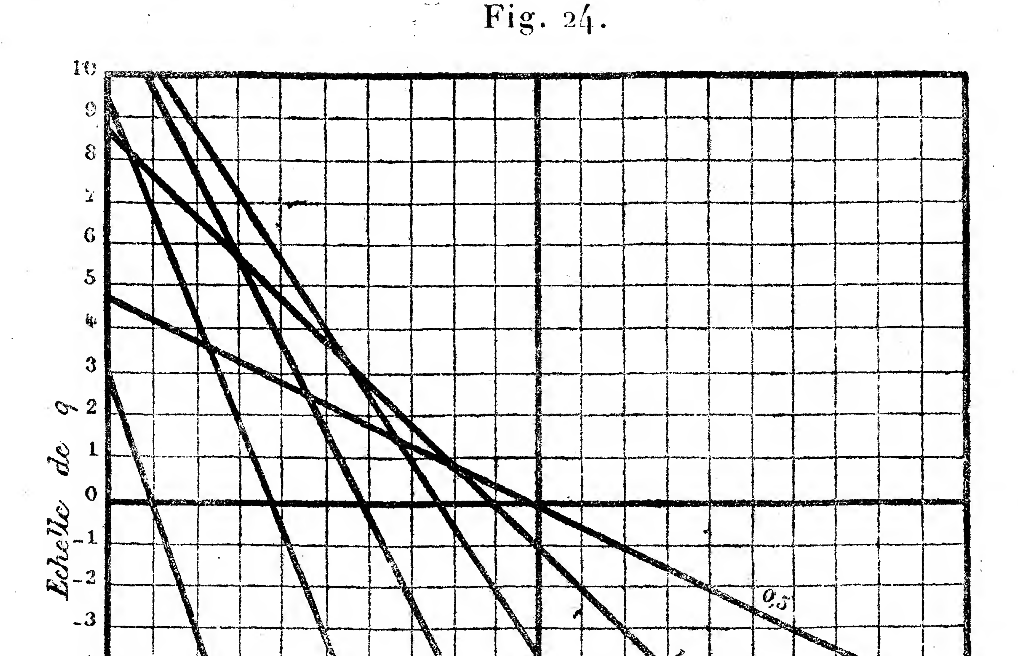
ce qui nous donne pour z les droites

$$y + zx + \mu z^3 = 0.$$

L'abaque ainsi obtenu (*fig.* 24) est celui qui a été construit par Lalanne (¹).

Nous avons d'ailleurs fait remarquer (²) qu'on pouvait se borner à tracer les droites correspondant aux valeurs *positives* de z, seules intéressantes pour les applications pratiques; les valeurs absolues des racines négatives de l'équation peuvent d'ailleurs être obtenues comme racines positives de la transformée en $-z$, c'est-à-dire de l'équation qui se déduit de la précédente par simple changement de q en $-q$.

Fig. 24.



Cet artifice peut être considéré comme dérivant du principe des multiplicateurs correspondants (nº 20).

L'équation donnée peut, en effet, s'écrire

$$q z^{-3} + p z^{-2} + 1 = 0.$$

Sous cette forme, elle rentre évidemment dans le type (5) du nº 20, et

(¹) Mémoires sur les Tables graphiques (*A. P. C.*, 1er semes. 1846).

(²) **O.4**, p. 25.

l'on voit ainsi que, pour les variables q, p, z, on a, en faisant $\lambda = -1$, les multiplicateurs correspondants $(-1)^3$, $(-1)^2$, -1, ou -1, 1 et -1. C'est bien là la remarque qui vient d'être faite au sujet des racines négatives.

Mais, plus généralement, on peut dire que les variables q, p, z admettent les multiplicateurs correspondants n^3, n^2 et n. Pour montrer l'utilité de cette remarque, nous prendrons l'exemple suivant :

Si l'on présente par

z la hauteur en mètres sur laquelle le parement d'un mur de réservoir peut être maintenu vertical à partir du couronnement;
a la largeur en mètres du mur au couronnement;
λ le rapport de la pression limite admissible par mètre carré au poids de 1^{m^3} de maçonnerie;
θ le rapport du poids de 1^{m^3} d'eau à celui de 1^{m^3} de maçonnerie,

M. Delocre a fait voir, dans son Mémoire classique sur les grands barrages, que la hauteur z est donnée (¹) par la racine positive de l'équation

$$z^3 + \frac{a^2}{\theta} z - \lambda \frac{a^2}{\theta} = 0 \qquad \text{si} \qquad \frac{a^2}{\theta} > \frac{\lambda^2}{4}$$

ou

$$z^2 + \frac{4a^2}{\theta\lambda} z - \frac{3a^2}{\theta} = 0 \qquad \text{si} \qquad \frac{a^2}{\theta} < \frac{\lambda^2}{4}.$$

Posons

$$a = 10^m, \qquad \lambda = 20^m, \qquad \theta = \frac{1}{2}.$$

Ici,

$$\frac{a^2}{\theta} = 200, \qquad \frac{\lambda^2}{4} = 100,$$

et c'est la première équation qui est applicable. Cette équation devient

$$z^3 + 200z - 4000 = 0.$$

L'abaque de la figure 24 ne nous donne pas directement z. Ayons dès lors recours aux multiplicateurs correspondants ci-dessus définis en prenant $n = 10$.

Il vient ainsi

$$\left(\frac{z}{10}\right)^3 + 2\frac{z}{10} - 4 = 0,$$

et l'abaque donne

$$\frac{z}{10} = 1^m,18,$$

(¹) Les inégalités de condition, telles qu'elles sont énoncées ici, se rencontrent pour la première fois, dans une Note publiée par nous, en mars 1891, dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (p. 443). Par suite d'un lapsus, le sens de toutes les inégalités de cette Note a été renversé, ainsi que nous l'avons fait remarquer depuis dans un *erratum*.

d'où

$$z = 11^{m},8.$$

3° *Poids de la vapeur d'eau contenue dans l'air* (¹). — Si p est le poids en grammes de la vapeur d'eau contenue dans 1^{m^3} d'air à $t°$, lorsque la tension de la vapeur est f en millimètres, on a

$$p = \frac{810 f}{760 + 2,78 t}.$$

D'ailleurs, la tension f est fournie par les tables de Regnault (²) en fonction de la température de condensation t' lue sur l'hygromètre.

L'équation ci-dessus peut s'écrire

$$760 p + 2,78 tp - 810 f = 0.$$

Pour la représenter nous poserons, μ_1 et μ_2 étant deux modules quelconques,

$$x = \mu_1 \times 810 f,$$
$$y = \mu_2 \times 2,78 t,$$

ce qui donne les droites (p)

$$760 p + p \frac{y}{\mu_2} - \frac{x}{\mu_1} = 0.$$

Faisons, par exemple (³),

$$\mu_1 = 0^{mm},0037, \qquad \mu_2 = 0^{mm},43.$$

Nous obtenons ainsi l'abaque de la figure 25.

(¹) Nous avons construit cet abaque en 1886, pour la Direction de l'Artillerie de l'Arsenal de Rochefort, en vue d'observations à faire, plusieurs fois par jour, dans des poudrières qui étaient de son ressort.

(²) JAMIN, *Cours de Physique de l'École Polytechnique*, t. II (3ᵉ édition), p. 223.

(³) Ces nombres ont été choisis pour mettre le texte d'accord avec la figure 29 qui a été obtenue par réduction photographique de l'abaque construit à plus grande échelle en 1886. Sans cela on eût pris

$$\mu_1 = 0^{mm},0037, \qquad \mu_2 = 0^{mm},36$$

de façon à avoir à porter les graduations

$$x = 3f, \qquad y = t.$$

Il pourrait, de prime abord, sembler plus simple de choisir μ_1 et μ_2 de façon à n'avoir à porter que les graduations

$$x = f, \qquad y = t,$$

mais alors les radiantes (p) se rapprochant de la direction parallèle à Oy, leurs points de rencontre avec les verticales (f) se détermineraient avec moins d'exactitude.

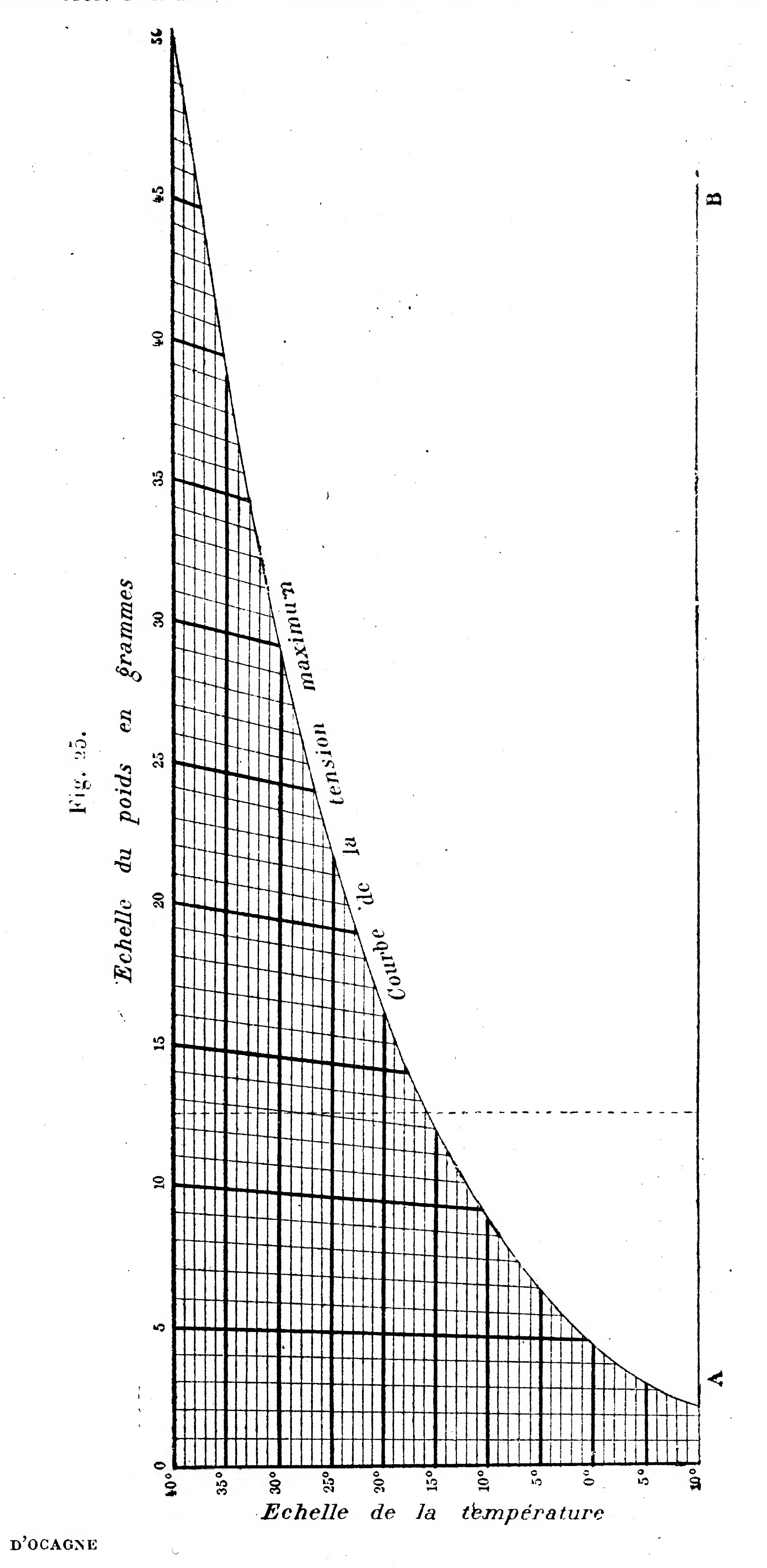

Echelle du poids en grammes
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
Courbe de la tension maximum
A
B
40°
35°
30°
25°
20°
15°
10°
5°
0°
5°
10°
Echelle de la température

Fig. 25.

Les graduations de Ox et de Oy sont alors données par

$$x = 3^{mm} f,$$
$$y = 1^{mm},2t,$$

et les droites (p) par

$$760p + \frac{py}{0,43} - \frac{x}{0,0037} = 0.$$

Toutes ces droites convergent au point $x = 0$, $y = -326^{mm},8$. On les appelle des *radiantes* (n° 25).

L'échelle de t ou *échelle des températures* sera construite entre $t = -10°$ et $t = 40°$. Sa longueur sera égale à $1^{mm},2 \times 50 = 60^{mm}$.

Pour construire les droites (p), déterminons les points où elles coupent les horizontales $0°(y = 0)$ et $40°(y = 1^{mm},2 \times 40 = 48^{mm})$.

Pour $y = 0$, nous avons, en prenant comme unité le millimètre,

$$x = 760 \times 0,0037p = 2,81p;$$

pour $y = 48$,

$$x = \left(760 + \frac{48}{0,43}\right) \times 0,0037p = 3,22p.$$

Construisons ces droites pour des valeurs de p croissant d'unité en unité de 0 à 50.

Les abscisses des deux points déterminant la droite extrême $(p = 50)$ seront, pour $t = 0°(y = 0)$ et $t = 40°(y = 48)$,

$$x = 140^{mm},5 \qquad \text{et} \qquad x = 161^{mm}.$$

Reste à construire l'échelle de la tension f. Celle-ci étant fonction de la température de condensation t', nous pourrons la déterminer par le procédé indiqué au n° 12, c'est-à-dire en traçant la courbe qui fait connaître les variations de f en fonction de t (traduction graphique de la table de Regnault), les modules le long de Ox et Oy étant précisément les nombres 3^{mm} et $1^{mm},2$ obtenus plus haut. En d'autres termes, on construira la courbe définie par

$$x = 3^{mm} f,$$
$$y = 1^{mm},2t',$$

les valeurs correspondantes de t' et de f étant celles que donne la table de Regnault.

Cette courbe, que nous désignerons par F, étant tracée, on voit à quoi se réduit le mode d'emploi de l'abaque : *lire la cote p de la radiante passant par le point de rencontre de l'horizontale t et de la verticale f, cette dernière coupant la courbe* F *au même point que l'horizontale t'.*

Usant ici d'un artifice [1] signalé au n° 13, nous remplacerons le système

---

[1] C'est précisément à l'occasion de cet abaque que nous avons eu pour la première fois recours à cet artifice.

des verticales par un index mobile tracé sur un transparent dont l'orientation sera maintenue par la coïncidence, avec l'axe AB de l'abaque, d'un second index de ce transparent, perpendiculaire au premier.

Dès lors, le mode d'emploi de l'abaque peut s'énoncer ainsi : *l'index d'orientation du transparent étant mis en coïncidence avec* AB, *faire passer l'index de lecture par le point de la courbe* F *situé sur l'horizontale* t', *suivre cet index jusqu'en son point de rencontre avec l'horizontale* t *et lire la cote* p *de la radiante passant par ce dernier point.*

Par exemple, pour $t = 30^o$, $t' = 16^o$, la position de l'index étant celle indiquée en pointillé sur la figure, on lit $p = 12^g,9$. On aurait pu évidemment tout aussi bien écrire au pied de chaque verticale la valeur correspondante de t' obtenue par l'intermédiaire de la courbe F, et effacer celle-ci.

4° Nous dirons encore un mot des abaques publiés par M. Genaille sous le titre : *Les graphiques de l'ingénieur*, et nous indiquerons sommairement leur disposition dans un cas. Si une charge p est uniformément répartie sur une poutre de portée a, on a

$$pa^2 = q,$$

q étant un nombre qui dépend de la section de la poutre et de la limite de pression admise par unité de surface (¹).

A chaque type de fer du commerce correspond une valeur de q. L'abaque de l'équation précédente, en permettant de calculer q, définira donc le type de fer à adopter pour des valeurs données de a et de p.

Cet abaque peut être construit au moyen du quadrillage défini par

$$x = \mu_1 q, \qquad y = \mu_2 p,$$

ce qui donne pour a les droites cotées dont l'équation est

$$\mu_1 a^2 y = \mu_2 x,$$

droites passant par l'origine. Au lieu d'inscrire la valeur de q au pied de la verticale correspondante, on peut y inscrire les éléments de la section donnant cette valeur de q. Les abaques ainsi obtenus pour les différentes espèces de poutres sont ceux que M. Genaille a fait connaître au Congrès de 1884 de l'Association française pour l'Avancement des Sciences, et dont des exemplaires à grande échelle figurent dans les galeries du Conservatoire des Arts et Métiers (²).

(¹) On a $q = \dfrac{8\,\mathrm{RI}}{n}$, I étant le moment d'inertie polaire de la section, n la distance des fibres qui supportent la plus grande tension, R la limite de pression admise.

(²) Aux exemples qui viennent d'être donnés ci-dessus, et qui pourraient, sans profit d'ailleurs pour le lecteur, être beaucoup multipliés, nous tenons à joindre la mention d'abaques de ce genre, pour le calcul du profil de certains murs de soutè-

II. — Anamorphose.

23. *Principe de l'anamorphose simple.* — Nous avons vu au n° 15 qu'en substituant aux échelles métriques, qu'il est tout naturel, de prime abord, de porter le long de Ox et de Oy, d'autres échelles fonctionnelles, on peut toujours transformer en une ligne droite la courbe représentative d'une équation liant les variables auxquelles correspondent ces deux échelles.

Dans quel cas une telle modification apportée aux deux échelles Ox et Oy d'un abaque cartésien à trois variables transformera-t-elle *à la fois* toutes les courbes de cet abaque en lignes droites ?

La réponse à cette question est facile.

Pour qu'avec les graduations

$$(z_1) \qquad x = \mu_1 f_1,$$
$$(z_2) \qquad y = \mu_2 f_2,$$

les courbes (z_3) constituant l'abaque soient des droites, il faut et il suffit que leur équation soit de la forme

$$(z_3) \qquad \frac{x}{\mu_1} g_3 + \frac{y}{\mu_2} h_3 + f_3 = 0.$$

Ceci aura lieu si l'équation proposée est

$$f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0.$$

Nous obtenons ainsi à la fois la forme des équations auxquelles cet artifice est applicable et l'indication de la manière dont cet artifice doit être mis en œuvre.

Dans le cas où il ne s'agit que de la courbe isolée constituant la représentation d'une équation à deux variables, comme au n° 15, une telle transformation n'offre aucun sérieux avantage, le travail requis pour l'établissement d'une échelle fonctionnelle (si l'on n'en

---

nement, publiés dans la livraison de septembre 1898 de la *Revue du Génie*, par le lieutenant (aujourd'hui général) Belhague (*Pl. IX*) et le commandant (depuis lors colonel) Bertrand (*Pl. XI*). La très intéressante étude du premier de ces officiers sur la construction de la route de Tananarive à Moramanga fait ressortir l'utilité de l'emploi des abaques pour des travaux qui, comme celui-ci, exigent une grande célérité.

possède pas déjà un étalon) étant équivalent à celui qu'exige la détermination des points de la courbe correspondante; on n'économise, somme toute, que le tracé de la courbe réunissant les divers points obtenus individuellement. Il n'en va pas de même ici, et l'avantage y devient très sensible.

Si le travail exigé par le changement de graduation équivaut à peu près à la construction d'une courbe, comme on aurait un certain nombre n de celles-ci à tracer, on voit que l'économie réalisée peut être représentée environ par le travail requis par le tracé de $n-1$ courbes. Une fois, en effet, le nouveau quadrillage établi, il suffit d'y marquer deux points pour obtenir chacune des lignes droites destinées à remplacer les courbes qu'on aurait eu à construire point par point dans le système primitif, et qui ont, en outre, sur celles-ci l'avantage d'un tracé rigoureux.

Le principe d'une telle transformation a été indiqué, pour la première fois, par Léon Lalanne, qui lui a donné le nom d'*anamorphose géométrique* (1). C'est sous la forme indiquée au n° **26** qu'il s'est d'abord présenté à lui, et cela à propos des applications traitées plus loin aux nos **27** (1°) et **111** (*fig.* 133).

Exemple : Problème de tir. — Dans un travail relatif à une question de tir (2), le capitaine (depuis lors général) G. Ricci, de l'artillerie italienne, se propose de construire l'abaque de l'équation

$$\rho(d\cos\varphi + \alpha) = d^2 - \alpha^2,$$

destinée à faire connaître α lorsque ρ et φ sont donnés.

Il suffit d'écrire cette équation sous la forme

$$\frac{d^2 - \alpha^2}{\rho} - d\cos\varphi - \alpha = 0,$$

pour voir qu'elle rentre dans le type précédent. Nous porterons donc sur les axes les graduations

$$(\rho) \qquad x = \frac{\mu_1}{\rho},$$

$$(\varphi) \qquad y = \mu_2 \cos\varphi,$$

(1) *Mémoire sur les Tables graphiques et sur la Géométrie anamorphique* (*A. P. C.*, 1er semestre 1846).

(2) *Rivista di Artigliera e Genio*, t. IV, p. 165 (novembre 1896). On trouvera dans le *Bulletin astronomique* (t. III, p. 62 et 232) une série d'intéressantes applications du même principe, dues à M. Radau.

et nous aurons ainsi pour les courbes (α)

$$(\alpha) \qquad \frac{d^2-\alpha^2}{\mu_1}x - \frac{d}{\mu_2}y - \alpha = 0,$$

c'est-à-dire des droites.

Le capitaine Ricci a construit cet abaque pour ρ, variant entre 1000 et 8000 (de 100 en 100 entre 1000 et 6000, de 200 en 200 entre 6000 et 8000), pour φ variant entre 0° et 120° (de 2 en 2 entre 10° et 20°, de 1 en 1 entre 20° et 120°), enfin, pour α variant entre — 800 et 500, de 10 en 10.

En vue de réduire les dimensions de l'abaque, il l'a fractionné en trois parties accolées les unes aux autres. Pour chacune de ces trois parties, μ_2 a été pris égal à $0^m,20$, tandis que μ_1 varie de l'une à l'autre. Ayant adopté $\mu_1 = 500^m$ pour la partie qui s'étend de 8000 à 3000, l'auteur a réduit cette valeur de μ_1 à la moitié, soit à 250^m, de 3000 à 2000, et à son sixième, soit à $83^m,33$, de 2000 à 1000. Il en résulte que sur les verticales suivant lesquelles ces trois abaques partiels s'accolent ($\rho = 3000$ et $\rho = 2000$) les droites (α) changent de direction.

La figure 26 donne une réduction de cet abaque.

24. *Abaques à parallèles.* — Les équations du type signalé au n° **22**, lorsque g_3 et h_3 se réduisent à des constantes, prennent la forme très simple

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0,$$

qui est extrêmement fréquente dans la pratique. Dans ce cas, ayant constitué le quadrillage de l'abaque en élevant respectivement aux axes Ox et Oy des perpendiculaires par les points des échelles que définissent les équations

$$(z_1) \qquad x = \mu_1 f_1,$$
$$(z_2) \qquad y = \mu_2 f_2,$$

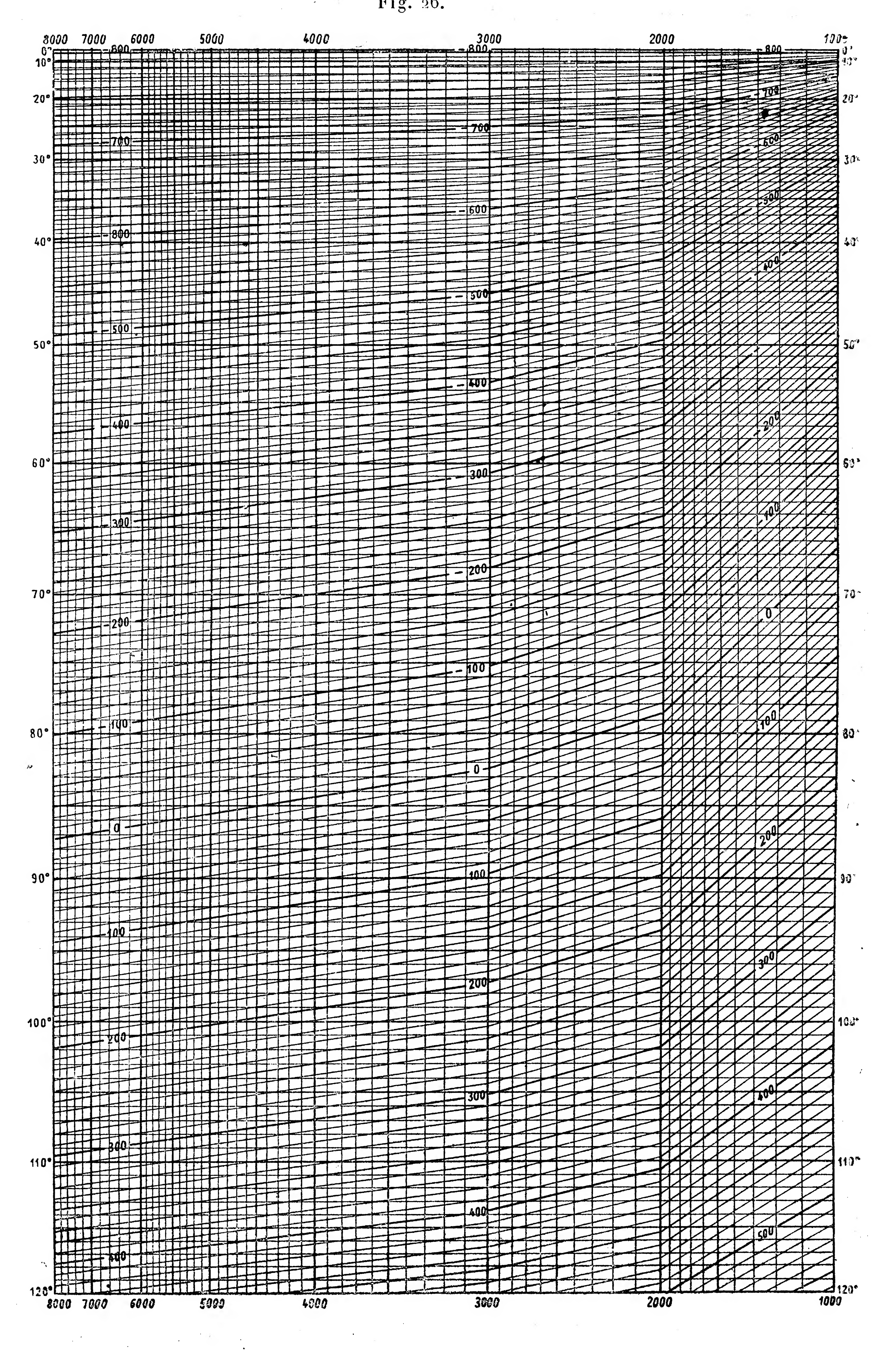
on obtient pour équation des courbes cotées (z_3)

$$\frac{x}{\mu_1} + \frac{y}{\mu_2} + f_3 = 0,$$

qui représente un système de droites parallèles.

Le coefficient angulaire de ces droites étant constant et égal à $-\frac{\mu_2}{\mu_1}$, il suffira, après avoir déterminé la direction correspondante qui s'obtient en joignant le point de l'axe Ox d'abscisse μ_1 au point de l'axe Oy d'ordonnée μ_2, de déterminer un point pour chacune de ces droites. On pourra prendre notamment leurs points de rencontre

Fig. 26.


8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0°
10°
20°
30°
40°
50°
60°
70°
80°
90°
100°
110°
120°
800
700
600
500
400
300
200
100
0
100
200
300
400
500

avec l'axe Ox, définis par

$$x = -\mu_1 f_3.$$

On pourra aussi prendre leurs points de rencontre avec la perpendiculaire Ot à leur direction menée par l'origine O, droite dont l'équation est

$$\mu_1 x + \mu_2 y = 0.$$

Si nous représentons par t les segments comptés sur cette droite à partir de O, nous voyons que le t de la droite (z_3), qui n'est autre que la distance de l'origine à cette droite, est donné par

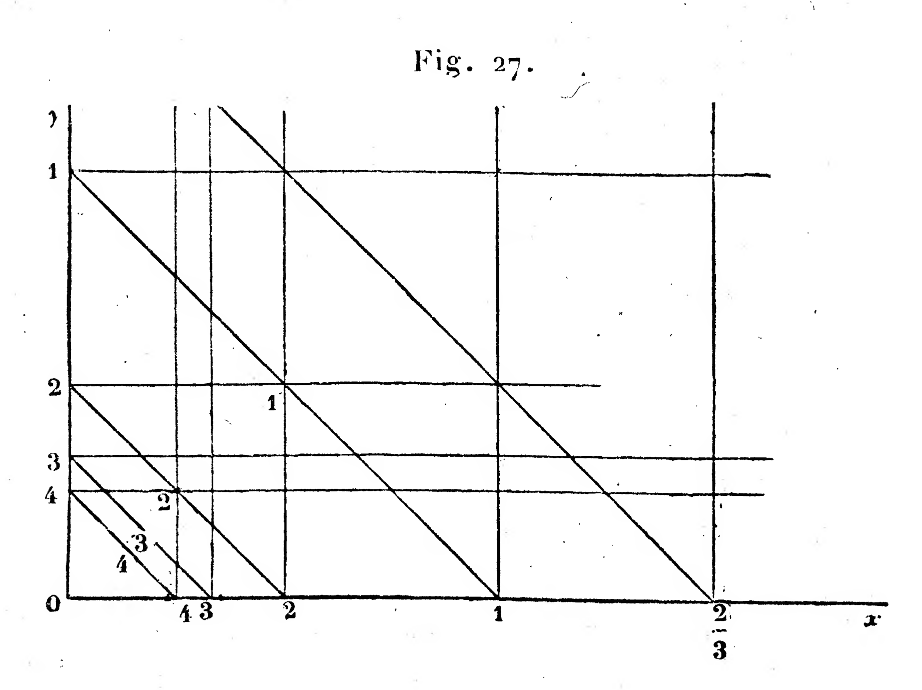
$$(z_3) \qquad t = \frac{\mu_1 \mu_2 f_3}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}}.$$

En résumé, ayant gradué les axes Ox, Oy et Ot d'après les trois équations (z_1), (z_2) et (z_3) ci-dessus, on n'a qu'à élever à chacun de ces axes des perpendiculaires par les points de l'échelle dont il est le support pour obtenir l'abaque de l'équation considérée.

Exemple : Miroirs et lentilles sphériques. — Nous rencontrerons par la suite un très grand nombre d'équations de cette forme. Contentons-nous ici de prendre comme exemple la formule des miroirs et lentilles sphériques

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f},$$

Fig. 27.



où d et d' sont les distances du miroir ou de la lentille à deux points conjugués, f la distance focale principale.

D'après ce qui précède, on aura un abaque de cette formule, en posant

$$x = \frac{\mu}{d}, \qquad y = \frac{\mu}{d'},$$

μ étant un module quelconque, ce qui donne pour lignes cotées (f) les droites

$$x + y = \frac{\mu}{f},$$

immédiatement obtenues par jonction des points dont les cotes sont égales à f dans les graduations de Ox et de Oy.

En prenant $\mu = 3^m,5$, on a ainsi la figure 27 (¹).

25. *Abaques à radiantes.* — Une autre forme d'équation très fréquente, rentrant dans le type du n° **23**, est la suivante :

$$f_1 f_3 = f_2.$$

On voit qu'on aura la représentation anamorphosée de cette équation en graduant les axes Ox et Oy suivant les lois

(z_1) $$x = \mu_1 f_1,$$

(z_2) $$y = \mu_2 f_2,$$

ce qui donne pour courbes cotées (z_3)

(z_3) $$y = \frac{\mu_2}{\mu_1} f_3 x,$$

droites issues de l'origine, que l'on appelle des *radiantes* (²).

Ces droites passant par l'origine, il suffit d'obtenir un point de chacune d'elles. Si, par exemple, on les coupe par la parallèle à Oy, dont μ_1 est l'abscisse à l'origine, savoir

$$x = \mu_1,$$

(¹) Cet abaque a été construit par M. Gariel (*A. F. A. S.,* Congrès de Clermont-Ferrand, p. 140; 1876), qui lui a ensuite appliqué une ingénieuse transformation géométrique. Nous avons fait voir dans notre brochure **O.4** (p. 88) comment l'application directe de la méthode des points alignés, dont il sera question plus loin (Chap. III), conduisait à cet abaque transformé.

(²) On peut substituer au système de ces radiantes une droite pivotant autour du point O. Il suffit, pour cela, d'inscrire le long d'une ligne quelconque les cotes des points où les droites (z_3) supposées tracées rencontreraient cette ligne. On obtient ainsi une certaine échelle, rectiligne ou curviligne, qui permet de repérer la position de la droite pivotante pour chaque valeur de z_3. Une telle disposition sera même avantageuse au point de vue de la précision de l'interpolation à vue.

on voit que l'on obtient sur cette droite l'échelle définie par l'équation

$$y = \mu_2 f_3.$$

Nous avons rencontré plus haut (n° 22, 1°, 3° et 4°) divers exemples d'abaques à radiantes sans anamorphose.

Voici des exemples de tels abaques obtenus par anamorphose :

1° *Troisième type d'abaque de multiplication.* — On peut, pour représenter l'équation

$$z_1 z_2 = z_3,$$

poser

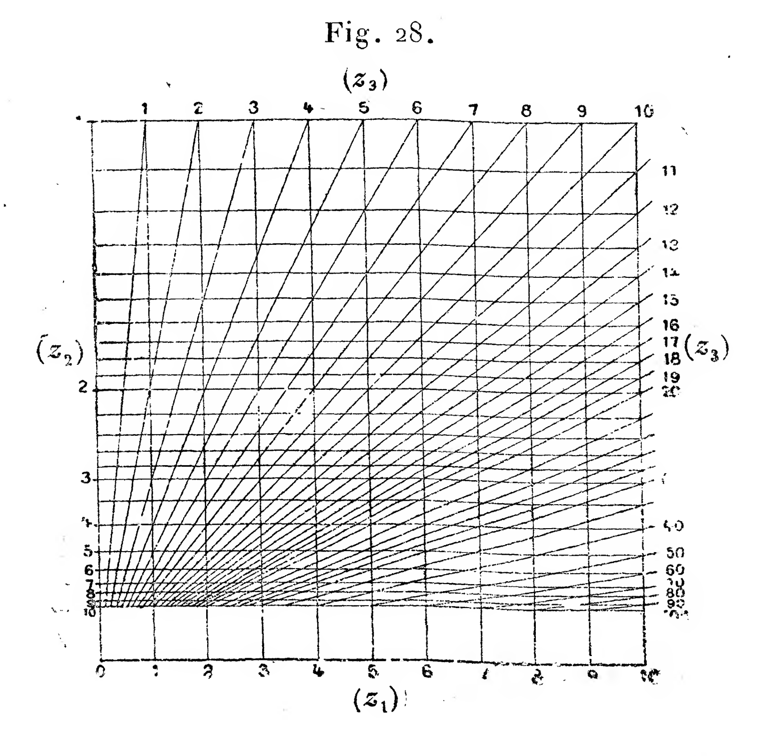
$$x = \mu_1 z_1, \qquad y = \frac{\mu_2}{z_2},$$

ce qui donne comme courbes cotées (α_3) les radiantes

$$\mu_2 x = \mu_1 z_3 y.$$

Un tel abaque est représenté par la figure 28. Il se rencontre parmi les

Fig. 28.



tableaux graphiques dressés par M. l'ingénieur des Ponts et Chaussées A. Crépin, en vue de l'étude du desséchement des pays watringués, dans un Mémoire remarquable où, pour la première fois, cette question complexe est soumise au calcul ([1]).

([1]) *A. P. C.*, 1er sem. 1881, p. 138. L'abaque de multiplication ici reproduit se trouve sur la planche VI jointe à ce Mémoire.

2° *Heures de lever et de coucher du soleil.* — Si l'on représente par λ la latitude du lieu et par D la déclinaison du soleil correspondant à l'époque, l'angle horaire $\mathcal{H}$ du soleil au moment de son lever ou de son coucher est donné par l'équation

$$-\cos \mathcal{H} = \operatorname{tang}\lambda . \operatorname{tang} D,$$

qui rentre dans le type ci-dessous. Nous prendrons donc, pour représenter cette équation

$$x = \mu_1 \operatorname{tang}\lambda, \qquad y = -\mu_2 \cos \mathcal{H},$$

d'où

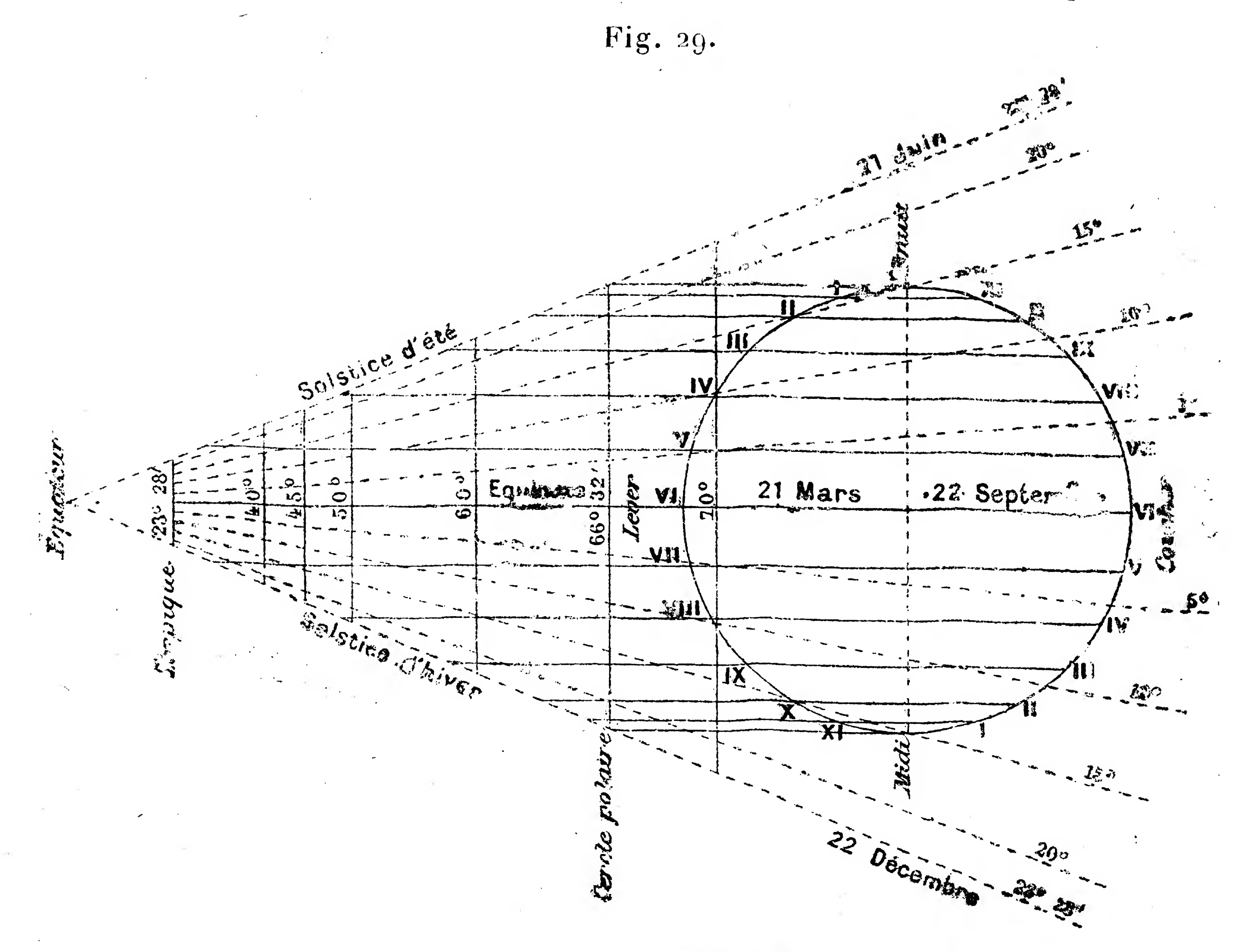
$$y = \frac{\mu_2}{\mu_1} x \operatorname{tang} D.$$

Si l'on prend $\mu_1 = \mu_2$, on voit que la droite cotée (D) est la droite menée par l'origine, qui fait l'angle D avec l'axe des x.

Chaque horizontale $\mathcal{H}$ correspond à deux cotes égales et de signes contraires. Mais on peut immédiatemont écrire les valeurs de ces angles horaires en temps, ce qui donne l'heure vraie du lever ou du coucher.

Si l'on inscrit ces cotes aux points de rencontre des horizontales ($\mathcal{H}$) et d'un cercle de rayon μ_2, ayant son centre en un point quelconque de l'axe

Fig. 29.



des x, on obtient la figure 29, qui est une réduction de l'abaque construit par Collignon (¹).

(¹) L'abaque de Collignon est complété par des tracés permettant de passer du temps vrai au temps moyen et de tenir compte de la durée du crépuscule (*N. A.*, 2ᵉ série, t. XVIII, p. 179, et 3ᵉ série, t. I, p. 490).

On voit que l'horizontale, passant par le point de rencontre de la verticale dont la cote est la latitude λ du lieu et de la radiante dont la cote est la déclinaison D du soleil pour l'époque, va couper le cercle horaire en deux points dont les cotes sont les heures de lever et de coucher du soleil.

Au lieu de coter les radiantes au moyen des valeurs de D, on pourrait inscrire immédiatement, à côté de chacune d'elles, l'indication de l'époque correspondante, ainsi qu'on l'a fait sur la figure 29 pour les solstices et les équinoxes.

3° *Débit d'une rivière.* — Le débit d'une rivière en un point déterminé est donné par la formule

$$q = \omega u,$$

où q désigne le débit exprimé en mètres cubes par seconde, ω l'aire de la section exprimée en mètres carrés, u la vitesse moyenne exprimée en mètres par seconde.

Pour la section considérée, l'aire ω est une fonction $f(h)$ connue de la hauteur d'eau h lue sur une échelle plongeant dans la rivière. On peut donc écrire

$$(1) \qquad q = u f(h).$$

D'autre part, lorsqu'il ne s'agit que d'une détermination approximative, on peut prendre pour la vitesse moyenne u le produit par 0,8 de la vitesse à la surface donnée par un flotteur parcourant pendant t secondes une longueur connue e, comprise entre deux repères, en sorte que

$$(2) \qquad 0{,}8 e = ut.$$

L'équation (1) peut être représentée au moyen des éléments cotés

$$(u) \qquad x = \mu_1 u,$$

$$(q) \qquad y = \mu_2 q,$$

$$(h) \qquad y = \frac{\mu_2}{\mu_1} f(h) x,$$

et l'équation (2), ainsi que cela a été expliqué au n° 12, au moyen de la courbe

$$0{,}8 e = \frac{xy}{\mu_1 \mu'_2},$$

qui est une hyperbole équilatère C, dessinée sur le quadrillage défini par

$$x = \mu_1 u, \qquad y = \mu'_2 t.$$

Nous pouvons faire coïncider l'axe des x de ce quadrillage avec celui de l'abaque précédent, son axe des y étant dans le prolongement de l'autre, avec un sens positif contraire.

Pour construire les droites cotées (h), il suffit de remarquer, ainsi qu'on

l'a fait au début de ce numéro, que, sur la droite $x = \mu_1$, ces droites déterminent l'échelle

$$y = \mu_2 f(h),$$

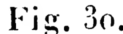


Fig. 30.

L'abaque ainsi obtenu (*fig.* 30) est celui qui a été établi par M. Vandervin,

ingénieur au corps belge des Ponts et Chaussées, pour la station de Hombeek, sur la Senne (¹), où l'on avait $e = 100^m$.

L'abaque de M. Vandervin a été construit avec les modules

$$\mu_1 = 0^m,1, \qquad \mu_2 = 0^m,002, \qquad \mu'_2 = 0^m,0005.$$

La figure 30 en est la réduction aux $\frac{2}{3}$.

Le mode d'emploi de cet abaque est le suivant : *La verticale passant par le point de rencontre de l'horizontale* (t) *et de l'hyperbole* C *coupe la radiante* (h) *en un point situé sur l'horizontale* (q) (²).

Par exemple, le 25 janvier 1891, à Hombeek, le flotteur a parcouru la distance des repères en $t = 92^s$, la hauteur d'eau étant de $12^m,04$. La verticale passant par le point de rencontre de l'horizontale $t = 92^s$ et de l'hyperbole C coupe la radiante $12^m,04$ en un point dont l'horizontale suivie jusqu'à l'échelle des débits donne $q = 38^{m^3},5$.

4° *Poutres chargées.* — Le commandant Chéry (depuis lors général) a, dans sa *Pratique de la résistance des matériaux* (³), donné une série d'abaques pour le calcul des poutres chargées, traduisant pour les diverses sections usuelles l'équation

$$pa^2 = q$$

déjà définie au n° 22 (4°). Pour construire ces abaques, il a eu recours au quadrillage anamorphosé défini par les équations

$$x = \mu_1 p, \qquad y = \frac{\mu_2}{a^2},$$

d'où résulte pour les éléments cotés (q) l'équation

$$\mu_2 x = \mu_1 q y,$$

qui définit des radiantes issues de l'origine. Au lieu d'inscrire à côté de chacune de ces radiantes la valeur correspondante de q, le commandant Chéry y a placé une lettre de référence renvoyant à une table placée en regard de l'abaque où se lisent les dimensions de la section donnant cette valeur de q.

(¹) *Annales des Travaux publics de Belgique*, 1892. Dans le même Mémoire, M. Vandervin construit un abaque de même type pour le calcul des moments d'inertie des rectangles.

On en trouve un autre pour le calcul des sections résistantes des travées droites dans une étude de M. D. Gorrieri (*Atti del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Bologna*, 1895).

(²) On pourrait, à côté de chaque verticale, écrire la valeur correspondante de t obtenue par l'intermédiaire de l'hyperbole C, ce qui reviendrait à faire une anamorphose le long de Ox.

(³) Paris, Ducher et Cie; 1877.

On trouvera, au n° 111, l'indication d'autres exemples d'abaques du même type.

26. *Anamorphose logarithmique.* — Toute équation représentable par un abaque à radiantes est également susceptible d'être représentée par un abaque à parallèles.

Le type d'équation du n° 25 peut, en effet, s'écrire (après permutation des indices 2 et 3),

$$\log f_1 + \log f_2 = \log f_3.$$

Il rentre alors dans le type du n° 24, représentable par un système de droites parallèles tracées sur un quadrillage irrégulier.

Cet ingénieux artifice, dû à Léon Lalanne, a constitué la première forme sous laquelle s'est présenté à lui le principe de l'anamorphose (¹).

Pour effectuer la représentation de l'équation ci-dessus, conformément à la méthode indiquée au n° 23, on commencera par tracer le quadrillage formé par les perpendiculaires élevées respectivement à Ox et à Oy par les points de division des échelles définies sur ces axes par les équations

$$(z_1) \qquad x = \mu_1 \log f_1,$$

$$(z_2) \qquad y = \mu_2 \log f_2.$$

On n'aura plus ensuite qu'à construire les droites

$$(z_3) \qquad \frac{x}{\mu_1} + \frac{y}{\mu_2} = \log f_3,$$

ce qui peut se faire, ainsi qu'on l'a vu au n° 24, en graduant la perpendiculaire Ot à la direction de ces droites suivant la loi

$$(z_3\ bis) \qquad t = \frac{\mu_1 \mu_2 \log f_3}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}}.$$

La construction des échelles logarithmiques (z_1), (z_2) et $(z_3\ bis)$ n'offre d'ailleurs pas plus de difficulté que celle des échelles des fonctions f_1, f_2 et f_3 lorsqu'on dispose d'un étalon logarithmique ainsi qu'on l'a fait observer au n° 6.

(¹) *Mémoire sur les Tables graphiques et sur la Géométrie anamorphique*, dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (1ᵉʳ sem. 1846).

Au surplus, on trouve maintenant dans le commerce du papier à quadrillage logarithmique [1], grâce auquel la construction d'un abaque de ce genre se fait avec la même facilité que celle d'un abaque non anamorphosé sur du papier à quadrillage métrique.

On doit à M. R. Mehmke un autre mode d'utilisation des plus remarquables de l'anamorphose logarithmique, sur lequel nous reviendrons plus loin (n^{os} **139** à **141**) et qui consiste à substituer à certaines courbes algébriques non pas des droites, ce qui ne serait pas possible, mais des courbes qui peuvent être obtenues par translation d'une seule et même courbe dessinée sur un transparent.

27. *Exemples : 1° Quatrième type d'abaque de multiplication.* — Les exemples d'application de l'anamorphose logarithmique sont extrêmement nombreux. Le plus classique d'entre eux est celui, dû à son inventeur même, qui a trait au calcul des profils de remblai et de déblai et que l'on trouvera plus loin (n° **111**). Nous aurons d'ailleurs bien d'autres occasions d'utiliser ce principe dans la suite de cet Ouvrage. Aussi pensons-nous pouvoir nous borner pour le moment à en indiquer deux applications, dont celle tout à fait classique qui en a été faite par Lalanne lui-même à la multiplication [2].

Pour représenter l'équation

$$z_1 z_2 = z_3,$$

il suffit, après l'avoir écrite

$$\log z_1 + \log z_2 = \log z_3,$$

de poser

$$x = \mu \log z_1, \qquad y = \mu \log z_2,$$

---

(1) Nous signalerons, sur ce papier logarithmique, dont l'idée paraît due à M. W.-F. Durand, deux intéressants articles, l'un de M. René de Saussure dans la *Revue scientifique* (2e semestre 1894, p. 743), l'autre du P. Poulain dans le *Cosmos* (numéro du 29 juin 1895, p. 390).

(2) *Description et usage de l'abaque, etc.* (1845; 2e édition, 1851; 3e édition, 1863). Les exemples d'application de l'anamorphose logarithmique sont très nombreux. Nous citerons ceux donnés par Collignon pour l'écoulement de l'eau dans les tuyaux (*Cours d'hydraulique*), par le colonel Goulier pour certaines corrections topométriques (*Mémorial de l'officier du Génie*, n° 18, 1868), par M. A. Kapteyn pour divers calculs relatifs aux machines à vapeur (*Revue universelle des Mines*, 2e semestre 1876), par M. A. van Muyden pour le calcul des conduites d'eau sous pression (*Bull. de la Société vaudoise des Ingénieurs*, mars 1884) ainsi que pour le calcul des conducteurs électriques (*Lumière électrique*, 9 janvier 1886), etc.

Divers auteurs allemands, MM. G. Hermann (*Das graphische Einmalens*, ..., Braunschweig, 1875), Helmert (*Zeitschrift für Vermessungswesen*, 1876), Vogler (*Sechs graphische Tafeln*..., Berlin, 1877), ont prétendu être arrivés de leur côté au même principe dont la priorité ne saurait pourtant être contestée à Lalanne qui l'avait fait connaître dès 1843.

ce qui donne pour les droites (z_3) l'équation

$$x + y = \mu \log z_3.$$

On voit qu'une fois le quadrillage construit, les droites (z_3) se déterminent très aisément. La droite ayant pour cote une certaine valeur de z_3 coupe, en effet, les axes Ox et Oy aux points ayant précisément pour cote, dans les graduations de ces axes, la valeur considérée de z_3.

On obtient ainsi l'abaque représenté par la figure 31.

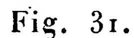
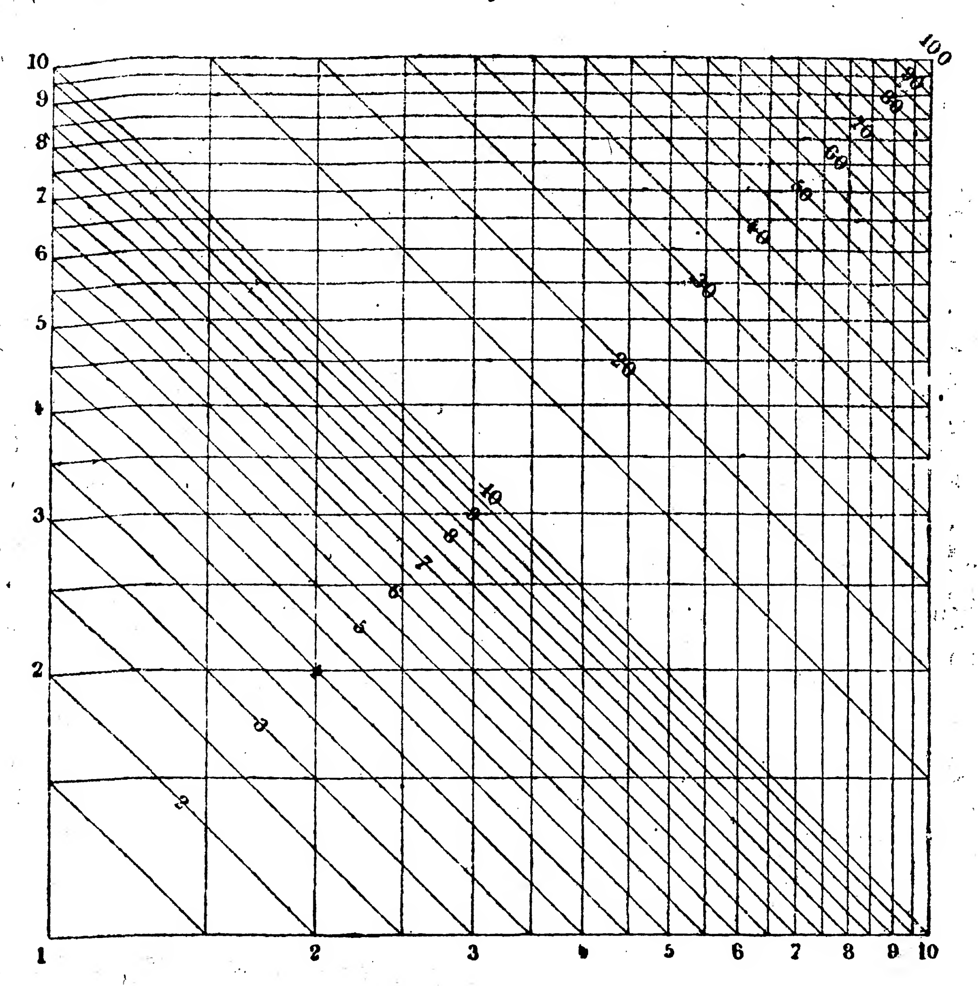


Fig. 31.



2° *Équation des portées lumineuses.* — Nous venons de faire voir comment l'anamorphose logarithmique permet de substituer à des abaques à radiantes des abaques à parallèles. Son rôle se borne dans ce cas à remplacer des lignes droites par d'autres lignes droites d'une disposition plus avantageuse. On saisira par la suite tout l'intérêt d'une telle substitution, mais il est bon d'observer que l'anamorphose logarithmique permet encore de construire des abaques à lignes droites pour des équations qui ne sauraient, sans ce secours, bénéficier d'une telle simplification.

Un exemple remarquable nous sera fourni par l'abaque de l'équation des portées lumineuses ([1]), construit pour le Service des Phares par M. E. Allard,

([1]) *Mémoire sur l'intensité et la portée des phares*, par E. Allard (Paris, Imprimerie nationale; 1876).

qui en était alors l'ingénieur en chef. Cette équation est

$$100\,L\,a^d = d^2,$$

où a désigne le coefficient de transparence du milieu, L l'intensité lumineuse et d la portée lumineuse en kilomètres.

Pour construire l'abaque de cette équation, il suffit de l'écrire

$$\log 100\,L = -\,d\log a + 2\log d,$$

et de constituer le quadrillage au moyen des formules

$$(a) \qquad x = -\,\mu_1 \log a,$$

$$(L) \qquad y = \mu_2 \log 100\,L,$$

ce qui donne pour éléments cotés (d) les droites

$$(d) \qquad y = \frac{d\mu_2}{\mu_1}\,x + 2\mu_2 \log d.$$

On commencera donc par porter sur Ox et Oy les échelles définies par les formules (a) et (L), pour élever ensuite à ces axes, par les points de division ainsi obtenus, les perpendiculaires qui constitueront le quadrillage de l'abaque.

M. Allard a donné à ces échelles la forme isograde (n° 8), de façon qu'en dépit de l'anamorphose, le quadrillage présente un aspect régulier. Il a pris pour module les valeurs

$$\mu_1 = \frac{4^{m}}{3} = 1^{m},333\ldots,$$

$$\mu_2 = 0^{m},04$$

et a adopté, tant sur l'axe Ox que sur l'axe Oy, un intervalle constant de 2^{mm}.

Cela conduit à donner à a des valeurs dont les logarithmes décroissent régulièrement de

$$\frac{0,002 \times 3}{4} = 0,0015$$

et à L des valeurs dont les logarithmes décroissent régulièrement de

$$\frac{0,002}{0,04} = 0,05.$$

D'ailleurs, l'échelle (a) a été construite sur $0^{m},20$ de longueur, soit jusqu'au nombre a_0 tel que

$$-\frac{4}{3}\log a_0 = 0,2$$

ou

$$\log a_0 = -\,0,15 = \bar{1},85,$$

d'où

$$a_0 = 0,708,$$

et l'échelle (L) sur $0^m,30$ de longueur avec une limite supérieure égale à 10000000, ce qui donne pour la limite inférieure L_0

$$0,04(7 - \log L_0) = 0,3$$

ou

$$\log L_0 = -0,5 = \bar{1},5,$$

d'où

$$L_0 = 0,32.$$

La figure 32 reproduit un fragment de l'abaque ainsi obtenu (¹).

M. Allard a remarqué que si (a, L, d) est une solution de l'équation, c'est-à-dire si

$$100 L a^d = d^2,$$

cette égalité peut s'écrire, λ étant un nombre absolument quelconque,

$$100\lambda^2 L\left(a^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{\lambda d} = (\lambda d)^2$$

et que, par suite, $\left(a^{\frac{1}{\lambda}}, \lambda^2 L, \lambda d\right)$ est aussi une solution de l'équation.

On reconnaît là une application du principe de la superposition des graduations (nº 20).

L'équation ci-dessus peut en effet s'écrire

$$a = \left(\frac{d^2 L^{-1}}{100}\right)^{d^{-1}}.$$

Sous cette forme on voit qu'elle rentre dans le type (6) du nº 20, lorsqu'on y fait

$$z_1 = d, \qquad z_2 = L, \qquad z_3 = a,$$
$$p = 2, \qquad q = -1 \qquad n = -1,$$

ce qui fait correspondre à la solution (d, L, a) la solution $(\lambda d, \lambda^2 L, a^{\lambda^{-1}})$, ainsi qu'on vient de le constater.

Si, par exemple, on prend $\lambda = \frac{1}{10}$, on voit qu'à la solution (d, L, a) correspond la solution $\left(\frac{d}{10}, \frac{L}{100}, a^{10}\right)$. Le passage de d et L à $\frac{d}{10}$ et $\frac{L}{100}$ s'opère immédiatement de tête. Il n'en est pas de même de celui de a à a^{10}.

Pour cette raison, les valeurs de a^{10} ont été inscrites à côté de celles de a sur une seconde ligne. Il suffira donc, si la valeur de a figure dans cette seconde ligne, de prendre sur l'échelle de L la valeur de 100L et de diviser par 10 la valeur obtenue pour d.

(¹) Planche V du Mémoire cité.

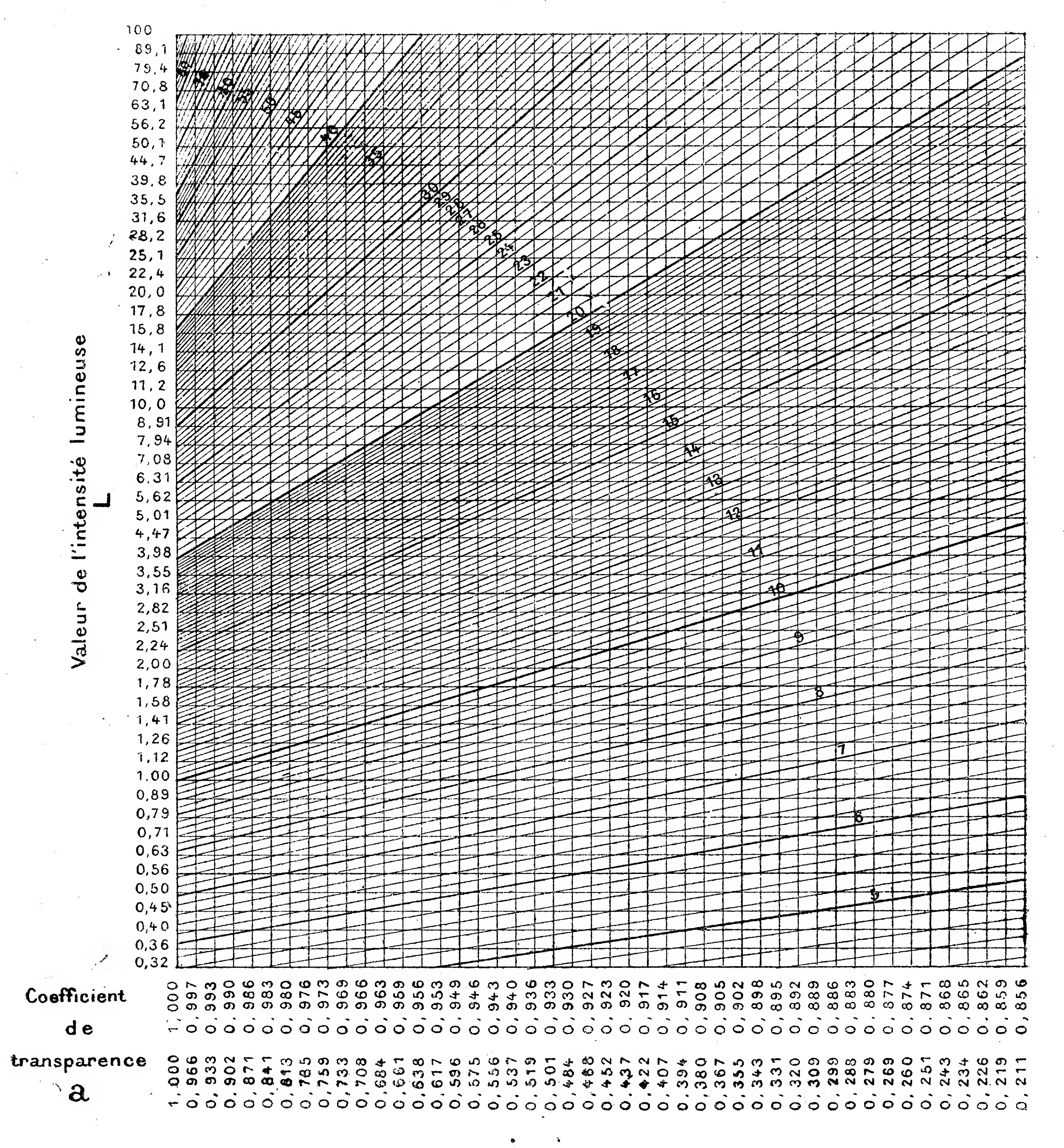
Par exemple, la verticale 0,917 (1[re] ligne) ou 0,422 (2[e] ligne) coupant l'horizontale 1,78 sur l'oblique 9, on a les solutions

$$a = 0{,}917, \qquad L = 1{,}78, \qquad d = 9$$

et

$$a = 0{,}422, \qquad L = 0{,}0178, \qquad d = 0{,}9.$$

Fig. 32.



28. *Anamorphose graphique.* — Tous les abaques envisagés jusqu'ici dérivaient d'un type unique ainsi constitué : un quadrillage coté sur lequel est dessiné un faisceau de courbes cotées.

Les cotes des verticales du quadrillage se rapportent à une des variables z_1, celles des horizontales à une autre variable z_2, enfin les cotes des courbes à la

troisième variable z_3, et les valeurs de ces trois variables se correspondent, en vertu de l'équation proposée, lorsque cette verticale, cette horizontale et cette courbe concourent en un même point.

Les diverses cotes croissant *par échelons égaux,* le quadrillage pourra être métrique ou non, c'est-à-dire que les deux systèmes de parallèles qui le constituent pourront être à intervalles égaux ou inégaux.

L'abaque d'une équation à trois variables, construit avec un quadrillage quelconque, pourra toujours être considéré comme transformé de celui que donne la méthode cartésienne (nº 16), si l'on fait correspondre à chaque droite du quadrillage métrique que comporte l'emploi de celle-ci la droite parallèle *de même cote* du quadrillage anamorphosé que l'on aura choisi.

Rien d'ailleurs n'est plus facile que de passer de l'abaque cartésien à son transformé. Sur l'un et sur l'autre, en effet, les points correspondants se trouvent à la rencontre de la verticale et de l'horizontale ayant les mêmes cotes z_1 et z_2. Cette remarque, appliquée aux divers points d'une courbe tracée sur le premier abaque, permet de construire immédiatement la courbe correspondante sur le second.

L'anamorphose, telle qu'elle a été ci-dessus envisagée, a pour but de déterminer le quadrillage anamorphosé de façon que toutes les courbes données par la méthode ordinaire sur le quadrillage métrique deviennent des droites.

On vient de voir à quel caractère analytique se reconnaît la possibilité d'une telle transformation et de quelle façon elle se réalise pour une équation de forme donnée, mais on peut aussi tenter de l'effectuer sur un abaque cartésien dont les courbes ont été obtenues *empiriquement,* en transformant l'une d'elles, suivant le mode indiqué nº 15 et voyant, avec le nouveau quadrillage ainsi défini, ce que deviennent les autres.

Une telle anamorphose est dite *graphique*. Lalanne en a fait connaître un exemple remarquable, relatif à l'abaque qui traduit la loi de mortalité de Demonferrand pour la population française ([1]).

M. Lallemand a utilisé l'anamorphose graphique à un autre point de vue, en se proposant non pas de substituer des droites à des courbes, mais de remplacer des courbes coupant un des systèmes d'axes du quadrillage sous un angle trop petit par d'autres courbes ne présentant pas le même inconvénient par rapport aux axes du quadrillage transformé. On obtient d'ailleurs ce résultat en augmentant d'une façon convenable, mais, au reste, arbitraire, l'écartement des axes rencontrés, sur l'abaque primitif, sous un angle trop petit. En voici un exemple : soit à représenter l'équation ([2])

$$z_1 = \frac{z_2 - z_3}{z_2 + z_3}.$$

([1]) Mémoire sur les *Méthodes graphiques*, dans les *Notices* publiées par le Ministère des Travaux publics à l'occasion de l'Exposition de Melbourne (Imp. Nat.; 1880), p. 374 à 379. On trouvera aux *Annexes* (Note II) un procédé imaginé par le colonel (alors capitaine) Lafay, pour procéder systématiquement à une telle anamorphose graphique, au moins de façon approximative, entre des limites données.

([2]) Pour représenter cette équation par trois systèmes de lignes droites, il suffirait

Supposons que l'on pose d'abord

$$x = \mu z_1, \qquad y = \mu z_2,$$

μ étant un module quelconque, ce qui définit un quadrillage métrique. Nous aurons alors pour les courbes cotées (z_3) l'équation

$$\frac{x}{\mu} = \frac{y + \mu z_3}{y - \mu z_3}$$

qui représente des hyperboles équilatères passant toutes par le point $(x = -\mu,\ y = 0)$ et toutes asymptotes à la verticale $x = \mu$ (*fig.* 33).

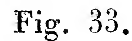
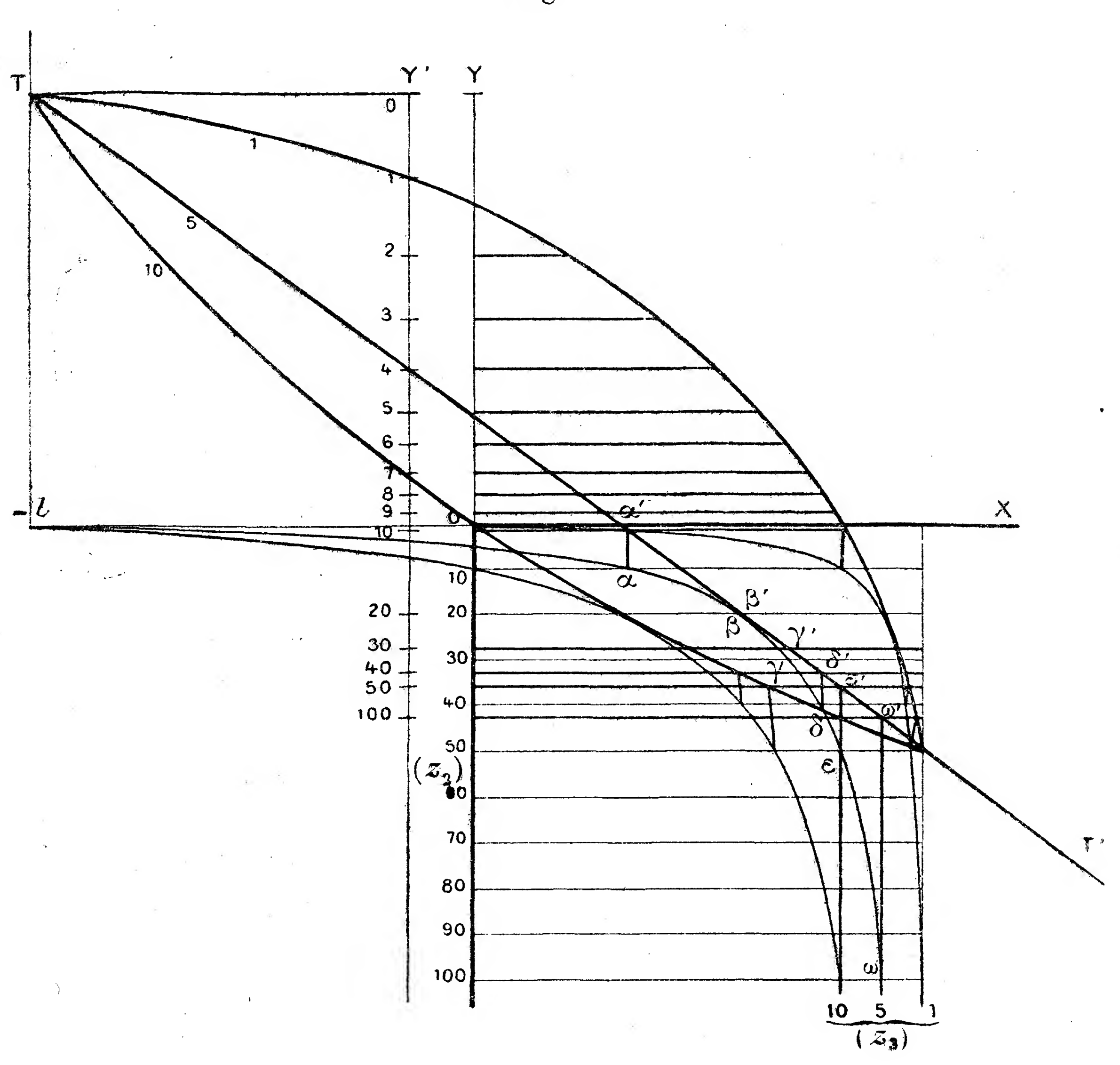


Fig. 33.



L'angle sous lequel chacune de ces hyperboles rencontre les horizontales, très aigu au voisinage de Oy, croît rapidement à mesure qu'on s'éloigne de

---

de poser

$$x = \mu z_2, \qquad y = \mu z_3.$$

C'est une circonstance particulière que l'on rencontre plus loin (n° 51, 3°) qui a conduit à envisager le mode de représentation auquel se rapportent les indications ci-dessus.

cet axe pour devenir, à la limite, égal à 90° quand $x = \mu$. La précision avec laquelle s'obtiennent les points de rencontre suit une loi inverse.

Pour remédier à cet inconvénient, M. Lallemand a eu recours à une anamorphose graphique ayant pour effet de substituer à ces hyperboles des courbes coupant les horizontales dans toute la portion utile du plan sous des angles différant peu de 45°.

Cette anamorphose graphique ne porte d'ailleurs que sur les horizontales du quadrillage, les verticales restant invariables.

Ayant pris la courbe du faisceau correspondant à la valeur moyenne de z_3 (ici $z_3 = 5$), on lui mène une tangente TT′ faisant avec les axes des angles égaux à 45°, et l'on déduit le mode de correspondance entre les nouvelles et les anciennes horizontales ainsi qu'il suit :

Pour une même cote, les points de rencontre de l'ancienne horizontale avec l'hyperbole 5 *et de la nouvelle avec la droite TT′ sont sur une même verticale.*

C'est, on le reconnaît immédiatement, la transformation de l'hyperbole en la droite TT′ suivant le mode envisagé au n° 15, le transport des points ayant seulement lieu parallèlement à Oy au lieu de Ox.

Par exemple, les premières horizontales 10, 20, 30, 40, 50 coupant l'hyperbole 5 aux points α, β, γ, δ, ε, on mène par ces points des verticales qui coupent la droite TT′ aux points α', β', γ', δ', ε'. Les secondes horizontales 10, 20, 30, 40, 50 sont celles qui passent par ces points.

Rien de plus facile, dès lors, que d'obtenir la transformée d'une courbe de l'abaque primitif. Ayant pris ses points de rencontre avec les diverses horizontales de cet abaque on les reporte par des verticales sur les horizontales correspondantes du nouvel abaque.

C'est ainsi que sur la figure 42 les courbes 1 et 10 en trait gras [1] ont été déduites des courbes 1 et 10 en trait fin. Quant à la courbe 5, elle a pour transformée la droite TT′ elle-même. On voit que les angles de ces courbes avec les horizontales s'écartent peu de 45°.

III. — Emploi d'un transparent à trois index. Abaques hexagonaux.

29. *Desiderata à réaliser dans la lecture d'un abaque.* — L'anamorphose, sur laquelle nous venons de nous étendre, en permettant de constituer l'abaque de certaines équations, uniquement au moyen de systèmes de lignes droites et, plus particulièrement, de droites parallèles, introduit une large simplification dans la cons-

---

[1] Un calcul bien facile montre que ces diverses courbes ont des équations de même forme que les précédentes. Ce sont donc encore des hyperboles.

truction des abaques, mais sans qu'il en résulte de changement dans leur mode d'emploi.

Celui-ci se réduit toujours à ce qui suit : prendre le point de rencontre de deux droites cotées, et lire la cote d'une ligne, droite ou courbe, passant par ce point.

Or, du fait qu'une cote inscrite en un point d'une ligne s'étend à toute cette ligne, il résulte qu'il faut, soit en partant de cette cote pour chercher un point d'intersection situé sur la ligne, soit en partant de ce point pour chercher la cote, suivre la ligne sur une certaine étendue.

Cette opération s'appliquant à trois lignes pour chaque lecture, on risque, pour peu qu'on ait quelque défaut d'attention, de passer de la ligne qui devrait être suivie à la voisine et, par suite, de commettre une erreur de lecture.

En outre, si les valeurs des variables auxquelles on a affaire ne sont pas celles auxquelles correspondent des lignes effectivement tracées sur l'abaque, il faut faire une interpolation à vue entre ces lignes, opération qui n'est pas tout à fait aussi simple que lorsqu'elle s'applique à une échelle portée sur une ligne.

Enfin, l'enchevêtrement des lignes sur les abaques précédemment décrits peut, à la longue, produire une certaine fatigue de la vue.

Ces inconvénients ne sont pas, à la vérité, de nature à faire renoncer à l'emploi des abaques construits comme on vient de le dire; on peut d'ailleurs les atténuer, dans une certaine mesure, par l'emploi de traits de force convenablement espacés dans le réseau des lignes tracées; ils sont assez sensibles cependant pour qu'on se soit préoccupé des moyens de s'en affranchir.

Le but à atteindre peut, d'après ce qui vient d'être dit, être défini ainsi qu'il suit : faire en sorte que, sur l'abaque, *une cote ne soit attachée qu'à un seul point*, l'équation à représenter se traduisant par une certaine relation de position entre plusieurs points.

On trouvera plus loin (Chap. IV) une méthode d'une grande généralité permettant d'atteindre pleinement ce but. Mais on peut, grâce à un artifice approprié, réaliser cette condition pour les abaques à trois systèmes de droites parallèles, grâce à l'usage de transparents tels que ceux dont il a été question aux nos 13 et 18.

30. *Transparent à trois index.* — Si nous nous reportons au

n° 24, nous voyons que, pour construire l'abaque de l'équation

$$f_1 + f_2 = f_3,$$

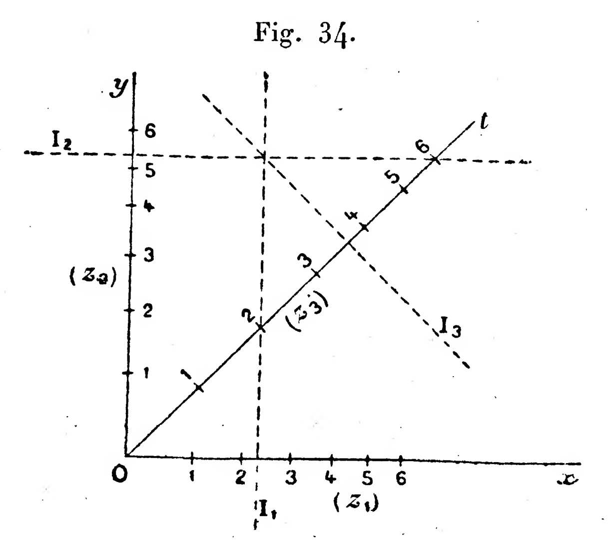
nous n'avons (en prenant les modules μ_1 et μ_2 égaux entre eux et les désignant alors par la seule lettre μ) qu'à porter sur les axes Ox et Oy supposés rectangulaires, et sur leur bissectrice Ot, les échelles définies par

$$x = \mu f_1,$$
$$y = \mu f_2,$$
$$t = \frac{\mu f_3}{\sqrt{2}},$$

et à élever, par les points cotés de ces échelles, des perpendiculaires respectivement à ces trois axes.

Si donc, nous avons recours à l'emploi d'un transparent tel que celui qui a été décrit aux nos 13 et 18, nous voyons que nous pourrons, grâce à ce transparent, rendre inutile, non seulement le tracé des perpendiculaires élevées aux axes Ox et Oy respectivement par les points des graduations (z_1) et (z_2), mais encore celui des perpendiculaires élevées à Ot par les points de la graduation (z_3), pourvu que, par le centre du transparent, point de rencontre des index I_1

Fig. 34.



et I_2, nous fassions passer un troisième index I_3 perpendiculaire à Ot (*fig.* 33).

Lorsque nous déplacerons ce transparent, *en lui conservant son*

(¹) Pour le maintien de l'orientation du transparent, *voir* ce qui a été dit au n° 13.

orientation, ses trois index I_1, I_2 et I_3 coïncideront à chaque instant avec trois des droites que l'on s'est dispensé de tracer et dont les cotes se correspondent en vertu de l'équation donnée.

En d'autres termes, *il suffit, le transparent ayant une orientation convenable* (¹), *de faire passer les index* I_1 *et* I_2 *respectivement par les points* z_1 *et* z_2 *des axes* Ox *et* Oy *pour que l'index* I_3 *donne* z_3 *sur l'axe* Oz.

L'abaque, dans ce cas, se réduit donc aux trois échelles rectilignes (z_1), (z_2) et (z_3), complétées par le transparent portant les trois index I_1, I_2 et I_3 (¹).

Cet emploi du transparent mobile a été proposé par M. Blum, à l'occasion des calculs de terrassements (n° 111, *fig.* 134).

Remarque. — Il n'est pas essentiel que les trois échelles donnant les cotes des trois systèmes de parallèles, non tracés, auxquels on substitue les index du transparent, soient perpendiculaires à la direction de ces systèmes; il n'est même pas nécessaire qu'elles soient rectilignes. Supposant, en effet, les trois systèmes de parallèles d'abord construits, nous pouvons inscrire leurs cotes à leur rencontre avec des lignes quelconques et effacer ensuite ces systèmes en ne conservant que leurs graduations avec les lignes leur servant de support. L'application du transparent convenablement orienté sur le tableau formé par les trois échelles curvilignes conservées tient lieu des systèmes de parallèles effacés.

On peut même, si les trois graduations ne se gênent pas mutuellement dans les limites admises, les inscrire le long d'une seule et même ligne.

(¹) Il y a lieu de se préoccuper des variations du papier en longueur et largeur; avec un papier de bonne qualité, ces variations, bien que pouvant différer d'un sens à l'autre, sont uniformes dans chaque sens, ainsi que permet de le constater ce fait qu'un rectangle dont les côtés sont parallèles aux bords de la feuille de papier ne cesse pas d'être un rectangle. S'il reste semblable à lui-même, c'est que tous les angles se sont conservés sur la figure, les droites restant des droites. Par suite, l'application du transparent à trois index donne les mêmes résultats que s'il n'y avait eu aucune variation. Si le rectangle ne reste pas semblable à lui-même, c'est que, les droites restant encore des droites, les angles ne se sont pas conservés; par suite, le transparent précédent ne peut plus servir. Mais, si l'on a eu soin de figurer sur l'abaque les directions des normales aux trois échelles, elles donneront, à chaque instant, les directions corrigées des trois index du transparent.

Mais, si des circonstances spéciales peuvent, en certains cas, conduire au choix de telles dispositions, il est, d'une manière générale, préférable sous le rapport de la précision, d'adopter des échelles perpendiculaires à la direction des index correspondants.

31. *Principe des abaques hexagonaux* [1]. — Si l'on se reporte au numéro précédent, on voit que, moyennant l'emploi du transparent à trois index, la construction de l'abaque d'une équation représentable par trois systèmes de droites parallèles se réduit à la construction des échelles des trois fonctions f_1, f_2 et f_3 respectivement portées, sur les axes Ox, Oy et leur bissectrice Ot, avec le même module, d'ailleurs quelconque, pour les deux premières, et ce module divisé par $\sqrt{2}$ pour la troisième. Or, il arrive souvent que ces trois échelles dérivent d'un même étalon (n° **6**), l'étalon logarithmique par exemple; il y aurait donc avantage à pouvoir constituer l'abaque au moyen de trois échelles de même module. Cette considération fait ressortir *a priori* l'intérêt qui s'attache à l'artifice, dû à M. Lallemand, dont il va être maintenant question et qui a encore l'avantage d'une disposition plus symétrique des échelles, celles-ci étant parallèles aux trois côtés d'un triangle équilatéral.

Cet artifice, auquel l'auteur est parvenu par une voie purement élémentaire (n° **32**), peut être rattaché à l'emploi de coordonnées ainsi définies : Ayant pris deux axes Ox et Oy faisant entre eux un angle de 120°, les coordonnées d'un point sont les distances de l'origine O aux pieds des perpendiculaires abaissées de ce point respectivement sur Ox et Oy.

Dans un tel système de coordonnées, toute droite est représentée par une équation du premier degré

$$ax + by + c = 0.$$

On trouve, en outre, bien aisément, que la distance de l'origine à

[1] C'est dans une Note insérée en 1886 aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 102, p. 816) que M. Lallemand a, pour la première fois, fait connaître ce principe. Il en a développé l'application, avec de nombreux exemples à l'appui [dont plusieurs seront reproduits par la suite (n°s 35 et 53 à 56)] dans un Mémoire autographié, de 1885, non livré à la publicité, et présenté seulement à l'Académie des Sciences le 24 décembre 1906.

cette droite est donnée par

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos 120^\circ}}.$$

En particulier, si l'on prend une droite perpendiculaire à la bissectrice Ot de xOy, droite dont l'équation est de la forme

$$x + y = h,$$

on a

$$\delta = \frac{h}{2 \cos 60^\circ} = h.$$

Dès lors, l'abaque de l'équation

$$f_1 + f_2 = f_3$$

étant défini, avec le module μ, au moyen des équations

$$x = \mu f_1, \qquad y = \mu f_2,$$
$$x + y = \mu f_3,$$

celles-ci, où x et y désignent nos nouvelles coordonnées, représentent, comme dans le cas des coordonnées cartésiennes, des droites respectivement perpendiculaires à Ox, à Oy et à la bissectrice Ot de l'angle de ces axes; mais ici les distances de l'origine aux droites du troisième système, qui définissent l'échelle portée sur Ot, sont données, en vertu de la formule ci-dessus, par

$$t = \mu f_3.$$

On obtient donc alors sur Ot une échelle de même module que celles portées sur Ox et Oy.

La construction de l'abaque se réduit par suite à celle des échelles des fonctions f_1, f_2 et f_3, effectuée avec le *même module*, respectivement sur les axes Ox, Oy et Ot tels que l'angle xOy soit égal à 120°, et que Ot soit la bissectrice de cet angle (*fig.* 35).

Ici, les index I_1, I_2 et I_3, respectivement perpendiculaires à Ox, Oy et Ot, constituent les trois diagonales d'un hexagone régulier, d'où le nom d'*abaque hexagonal* donné à ces sortes de nomogrammes.

Si donc on veut constituer le transparent au moyen d'une matière

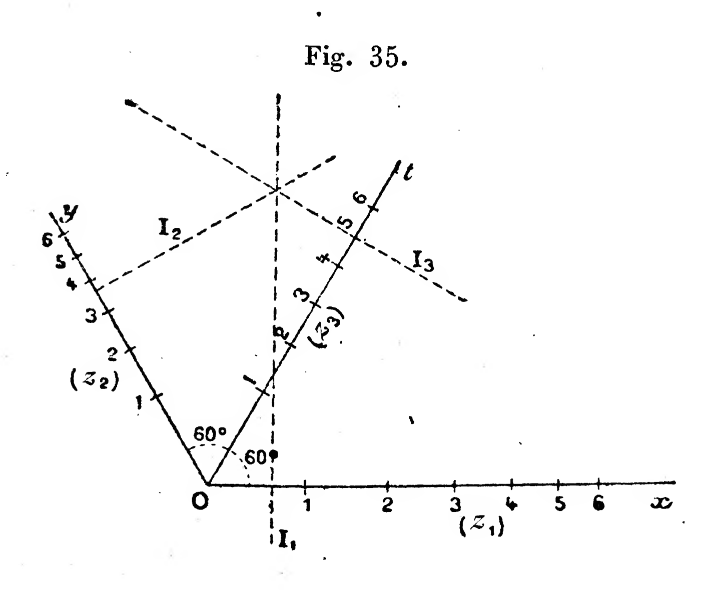
rigide ayant des bords parallèles aux trois index, on lui donnera la forme d'un hexagone régulier.

L'orientation du transparent sera encore assurée au moyen de parallèles équidistantes à la direction de l'un des index ([1]), et son mode d'emploi ne différera pas de celui que nous avons précédemment indiqué pour les abaques à axes rectangulaires (n° 30). Nous croyons bon toutefois de le rappeler ici :

Le transparent étant orienté, et son index I_1 *passant par le point coté* z_1 *de la première échelle, on le fait glisser dans la direction de cet index* (en appuyant une règle contre l'un de ses bords parallèles à I_1 s'il est rigide) *jusqu'à ce que l'index* I_2 *passe par le point* z_2 *de la deuxième échelle. L'index* I_3 *rencontre alors la troisième échelle en un point dont la cote est la valeur* z_3 *demandée.*

32. *Forme géométrique élémentaire du principe précédent.* — Appelons A, B, C les points où les index I_1, I_2, I_3 rencontrent respectivement Ox, Oy, Ot (*fig.* 35).

Fig. 35.



Les segments OA, OB et OC représentent, d'après le numéro pré-

([1]) Pour assurer rigoureusement cette orientation, il suffit de tracer sur le transparent un index I_0 perpendiculaire à I_1. Cet index étant mis en coïncidence avec Ox de façon que le centre du transparent marque le point coté z_1 sur cet axe, on applique une règle contre un des bords du transparent, parallèles à I_1, et l'on fait glisser ce transparent le long de la règle jusqu'à ce que l'index I_2 passe par le point coté z_2 sur Oy.

cédent, μf_1, μf_2 et μf_3. On a donc

$$OC = OA + OB,$$

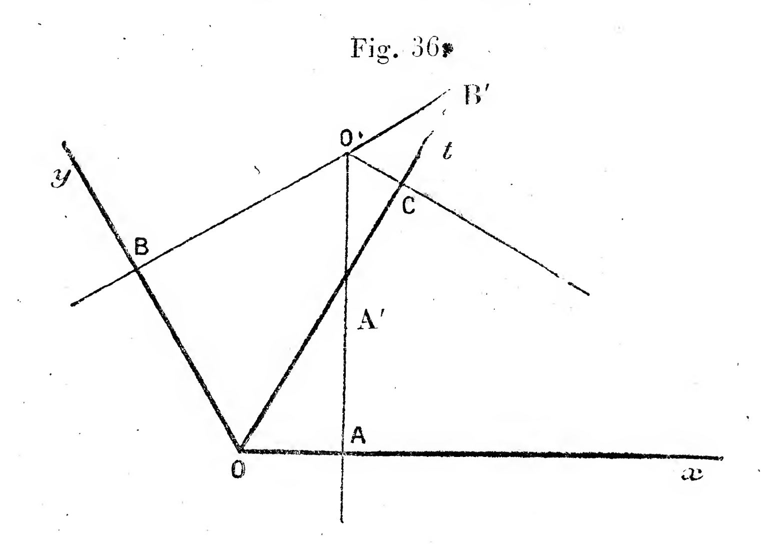
et comme ces segments ne sont autres que les projections de la distance des points O et O′ sur Ox, Oy et Oz, on voit que l'égalité précédente exprime la propriété qui s'énonce ainsi :

La projection d'un vecteur sur la bissectrice d'un angle de 120° est égale à la somme des projections de ce vecteur sur les côtés de cet angle.

Cette propriété est d'ailleurs géométriquement évidente. En effet, les droites O′A′ et O′B′ étant également inclinées sur Ot (*fig.* 36), le point C est le milieu de A′B′ et l'on a

$$2\,OC = OA' + OB'.$$

Fig. 36.



Mais les angles en O étant de 60°, on a aussi

$$OA' = 2\,OA, \qquad OB' = 2\,OB,$$

d'où

$$OC = OA + OB.$$

On peut donc, par une marche inverse, partir de ce théorème tout élémentaire pour établir le principe des abaques hexagonaux. C'est d'ailleurs ainsi qu'a procédé M. Lallemand pour établir la théorie de ce genre d'abaque [1].

La voie par laquelle nous y sommes parvenus, un peu moins élémentaire sans doute, a toutefois l'avantage de rattacher plus intime-

(1) *Voir* le premier renvoi du n° 31.

ment cette théorie au corps même de la doctrine exposée dans cet Ouvrage et qui embrasse la généralité des nomogrammes.

33. *Déplacement des échelles* [2]. — Si l'on se donne les limites des variables z_1 et z_2 auxquelles correspondent respectivement les points A_1 et B_1 d'une part, A_2 et B_2 de l'autre, les limites de z_3 en résultent, attendu que lorsque les index I_1 et I_2 passent respectivement par A_1 et A_2, l'index I_3 détermine sur la première échelle le point A_3; de même pour B_3. On voit, en outre, en vertu du théorème énoncé ci-dessus, que l'on a

$$A_3B_3 = A_1B_1 + A_2B_2.$$

Les points cotés sur A_1B_1 servent à déterminer la position de l'index I_1 dont la direction, perpendiculaire à A_1B_1, est fixe. Il résulte de là que si l'on déplace l'échelle A_1B_1 dans cette direction pour la reporter en $A'_1B'_1$, chaque point coté continuera à définir la même position pour l'index I_1 (*fig.* 36).

La même remarque s'appliquant aux deux autres échelles, on voit que *chaque échelle peut être déplacée d'une quantité quelconque normalement à sa direction.*

On pourra donc prendre pour supports des échelles (z_1), (z_2) et (z_3) trois droites quelconques X, Y, T parallèles aux axes Ox, Oy et Ot précédemment définis, c'est-à-dire constituant les côtés d'un triangle équilatéral. Il faudra toutefois rigoureusement observer la condition que les origines A'_1, A'_2 et A'_3 des trois graduations se correspondent, c'est-à-dire qu'elles se trouvent simultanément sous les index I_1, I_2 et I_3.

Nous sommes ainsi amenés au mode de construction suivant des abaques hexagonaux :

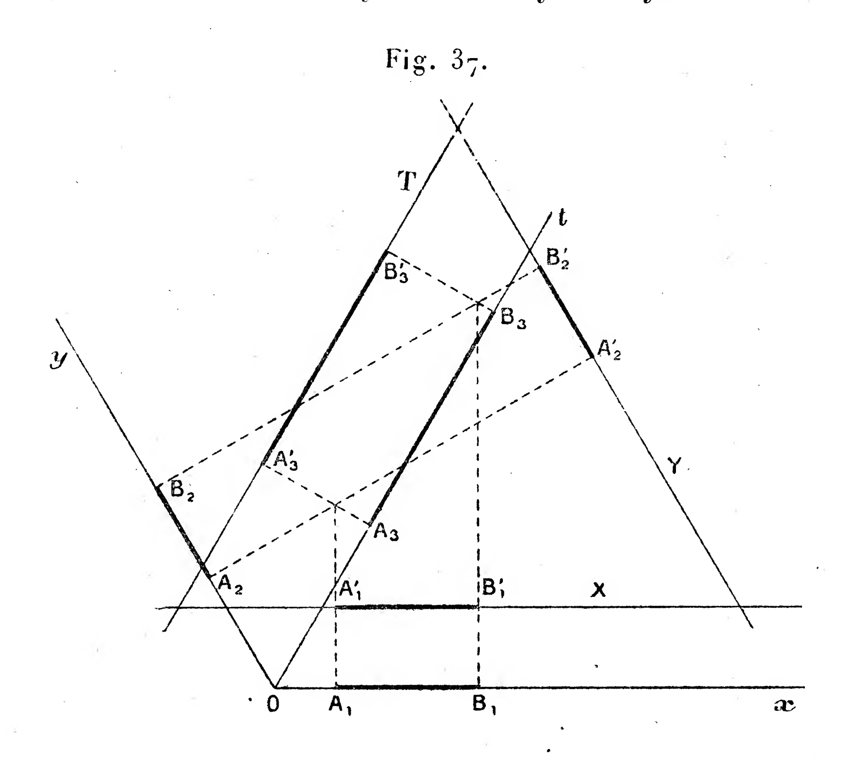
Ayant choisi trois droites, X, Y *et* T *formant un triangle équilatéral, et pris sur* X *un certain sens positif, nous définissons les sens positifs sur* Y *et sur* T *par la condition qu'ils fassent avec le premier des angles (comptés dans le sens trigonométrique positif) respectivement égaux à* 120° *et à* 60°.

Si a_1 *et* b_1 *sont les valeurs limites de* z_1, a_2 *et* b_2 *celles de* z_2,

([2]) Les remarques contenues dans les nos 33 et 34, faites par M. Lallemand à propos des abaques hexagonaux, s'appliqueraient aussi bien aux abaques du n° 31.

nous construisons sur X *et* Y, *avec un même module* μ, *d'ailleurs quelconque, les échelles des fonctions* f_1 *et* f_2 *entre ces limites;*

Fig. 37.



en faisant correspondre à a_1 *et à* a_2 *des points* A_1 *et* A_2 *quelconques.*

Les perpendiculaires élevées à X *et à* Y *en* A_1 *et* A_2 *se coupent en un point dont la projection sur* T *est* A_3. *Nous construisons alors sur* T, *toujours avec le module* μ, *l'échelle de la fonction* f_3 *en faisant correspondre le point* A_3 *à la valeur* a_3 *telle que*

$$f_1(a_1) + f_2(a_2) = f_3(a_3),$$

et nous la prolongeons jusqu'au point qui est la projection sur T *du point de rencontre des perpendiculaires élevées à* X *et à* Y *par les points* B_1 *et* B_2 *qui répondent aux valeurs limites* b_1 *et* b_2 *des variables* z_1 *et* z_2.

Remarque. — Rien n'empêchera, le cas échéant, s'il en résulte une meilleure disposition de l'abaque, de prendre, pour le support de l'une des échelles, une première droite jusqu'à une certaine valeur, puis une autre, parallèle à la première, à partir de cette valeur (*voir* les figures 60 et 143).

34. *Fractionnement des échelles.* — Entre les limites a_1 et b_1

d'une part, a_2 et b_2 de l'autre, prenons des valeurs intermédiaires quelconques c_1 et c_2.

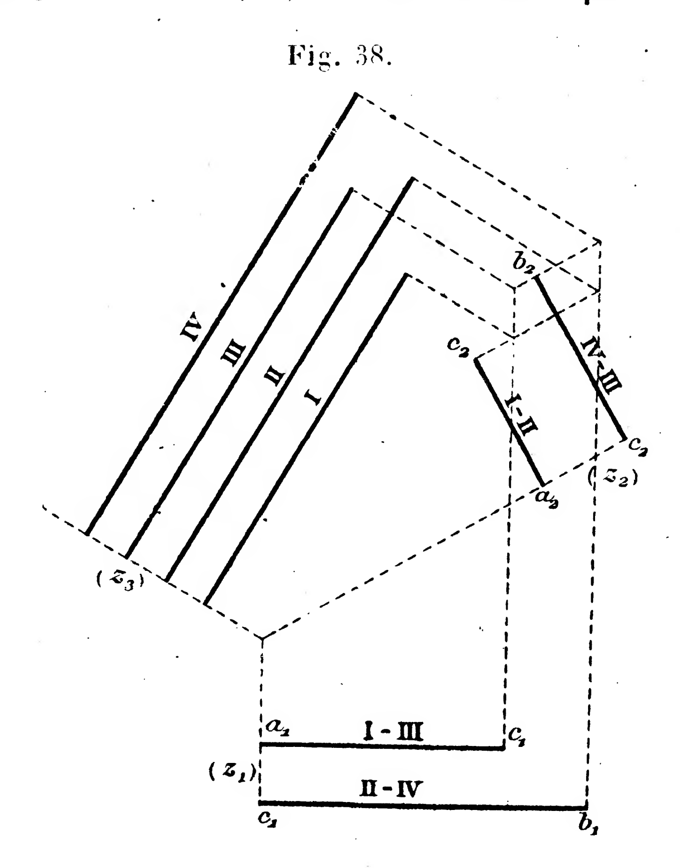
Quatre cas peuvent alors se présenter :

I........	z_1 est compris entre	a_1 et c_1	z_2 entre	a_2 et c_2
II........	z_1 »	c_1 et b_1	z_2 »	a_2 et c_2
III......	z_1 »	a_1 et c_1	z_2 »	c_2 et b_2
IV.......	z_1 »	c_1 et b_1	z_2 »	c_2 et b_2

Nous pouvons dès lors, sur une même feuille de papier, construire, d'après la règle qui a été donnée au numéro précédent, les abaques correspondant à ces quatre cas, indépendamment les uns des autres, mais en conservant de l'un à l'autre la même direction pour les axes.

Si l'on aligne sous une même position de l'index I_1 les limites inférieures a_1 et c_1 des deux tronçons de la graduation (z_1), et sous une même position de l'index I_2 les limites inférieures a_2 et c_2 des deux tronçons de la graduation (z_2), il en résulte que les limites infé-

Fig. 38.



rieures des quatre tronçons de la graduation (z_3) sont aussi alignées sous une même position de l'index I_3 (*fig.* 38).

Il faut bien remarquer, d'ailleurs, que chacune des graduations (z_3)

des cas II et III est formée de parties empruntees aux graduations (z_3) des cas I et IV, puisque l'ensemble de celles-ci représente la graduation complète allant de (a_1, b_1) à (a_2, b_2).

L'ensemble des quatre abaques, ainsi réunis sur le même tableau, équivaut à l'abaque unique construit précédemment, et, grâce à ce fractionnement, il occupe une place beaucoup moindre.

En outre, le travail que représente l'établissement de cet abaque fractionné n'est guère supérieur à celui que comportait l'abaque unique. En effet, les deux échelles (z_1), ou les deux échelles (z_2) respectivement mises bout à bout reproduiraient les échelles (z_1) et (z_2) non fractionnées; de même pour les deux échelles (z_3) construites pour les cas I et IV. Quant aux deux autres échelles (z_3), correspondant aux cas II et III, nous venons de voir qu'elles sont constituées par des parties empruntées aux deux précédentes. Une fois celles-ci construites, leur établissement représente donc un supplément de travail insignifiant, à savoir celui qu'entraîne seulement le report sur un axe d'une partie de graduation relevée sur un autre axe.

Ici se place, d'ailleurs, une remarque essentielle : il arrive très fréquemment, en pratique, que les valeurs des deux variables indépendantes z_1 et z_2, entre leurs valeurs extrêmes a_1 et b_1, a_2 et b_2, *ne s'associent pas d'une manière quelconque*, mais que leurs variations simultanées, quoique indépendantes, sont *de même sens*.

Dans ce cas, on pourra trouver dans les intervalles de a_1 à b_1 et de a_2 à b_2 des valeurs moyennes c_1 et c_2 telles que z_1 et z_2 leur seront *ensemble* respectivement supérieures ou inférieures. Dès lors, n'ayant jamais à associer une valeur de z_1 inférieure à c_1 à une valeur de z_2 supérieure à c_2, et inversement, les combinaisons II et III ci-dessus ne se produiront jamais et la construction des échelles (z_3) correspondantes devient inutile.

La construction de l'abaque à échelles fractionnées ne représente alors pas plus de travail que celle de l'abaque à échelles non fractionnées.

En tout cas, pour éviter qu'il y ait confusion dans la manière d'associer les divers tronçons d'échelles, on placera à côté de chacun d'eux certains signes, des chiffres romains par exemple, ou des marques de couleurs diverses, se référant aux abaques partiels dans

lesquels il intervient, de sorte qu'on n'aura pour chaque lecture qu'à associer trois tronçons portant le même signe.

On pourrait aisément généraliser ce qui précède, et supposer que l'on fractionne les échelles (z_1) et (z_2) respectivement en n_1 et n_2 tronçons, ce qui conduirait à construire $n_1 n_2$ tronçons d'échelle (z_3), à moins que la remarque précédente ne s'appliquât; mais une telle généralisation, théoriquement sans difficulté, est pratiquement sans intérêt : il est donc inutile d'y insister.

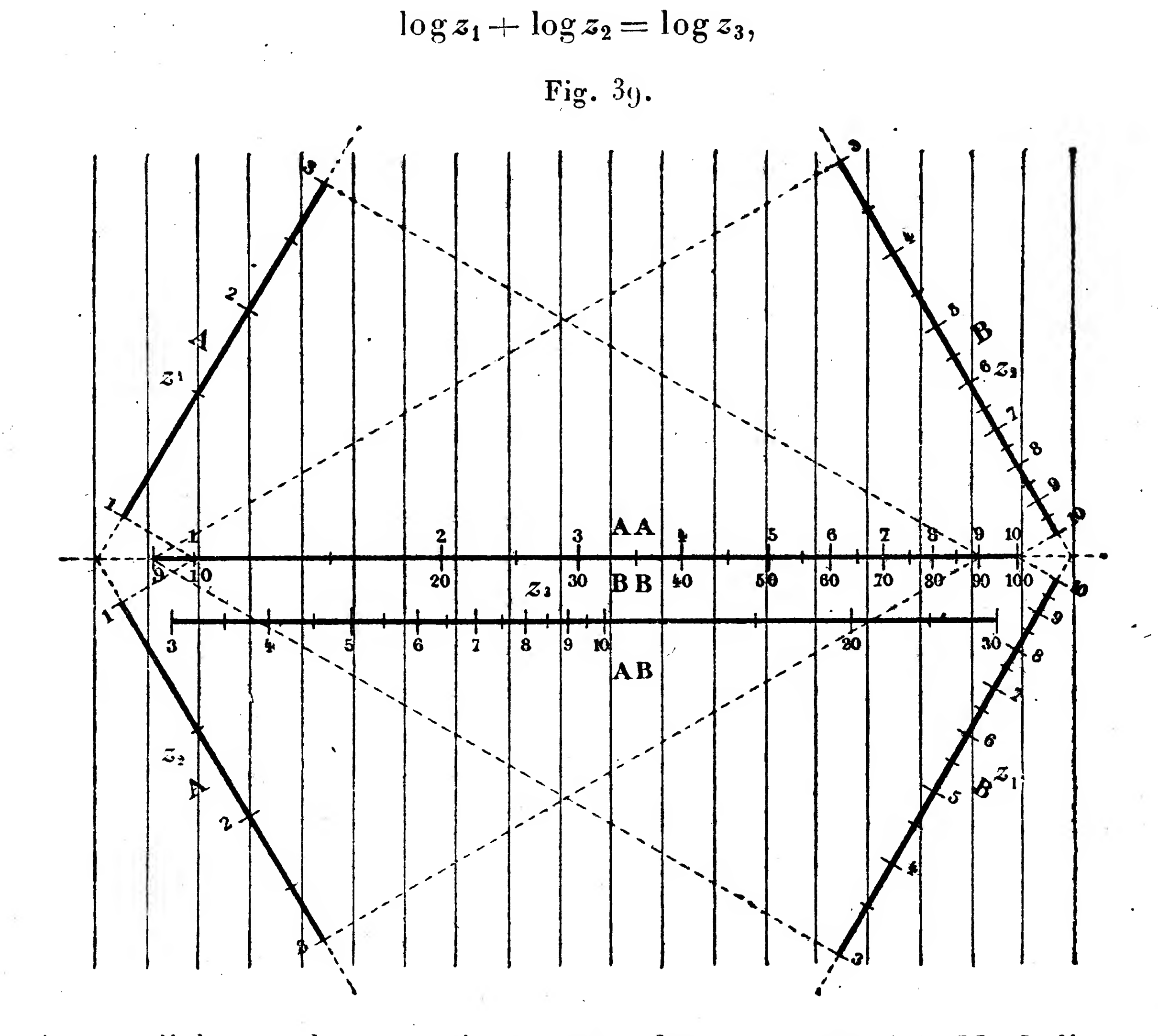
Il arrivera, au contraire, très fréquemment, qu'il n'y aura lieu de fractionner que l'une des échelles (z_1) et (z_2), la seconde, par exemple.

Il suffit, pour tomber sur ce cas, de supposer dans ce qui précède $c_1 = b_1$.

35. *Exemples : 1° Cinquième type d'abaque de multiplication.* — L'équation de la multiplication étant mise, comme au n° 27, sous la forme

$$\log z_1 + \log z_2 = \log z_3,$$

Fig. 39.



on voit que l'abaque hexagonal correspondant, emprunté à M. Lallemand, se construira immédiatement suivant le mode indiqué au n° 34, les trois

échelles fonctionnelles étant ici de simples échelles logarithmiques données par un même étalon. C'est là un cas où se manifeste bien nettement l'avantage signalé dans le premier alinéa du n° 31.

Sur l'abaque de la figure 39, les échelles de (z_1) et de (z_2), à côté desquelles on lit la lettre A, ont été l'une et l'autre fractionnées au point 3, et leurs seconds tronçons B ont été disposés de telle sorte que, pour le tronçon de l'échelle (z_3) correspondant aux tronçons B, les points de division soient les mêmes que pour le tronçon de cette échelle (z_3) correspondant aux tronçons A. Pour qu'il en soit ainsi, il a suffi, ayant pris le point 1 du premier tronçon AA de l'échelle (z_3), d'en faire le point 10 du deuxième tronçon BB. Le point 9 de ce deuxième tronçon s'est dès lors trouvé déterminé, et il a suffi de placer les points 3 des tronçons B de (z_1) et de (z_2) sur les parallèles aux index I_1 et I_2 menées par ce point 9.

Associant ensuite le tronçon A de l'une des échelles avec le tronçon B de l'autre, on a obtenu, vu l'identité de ces échelles, le même tronçon AB constitué par la partie 3 à 10 de AA et la partie 10 à 30 de BB, mises bout à bout, le point 3 se trouvant sous la position de l'index I_3, quand les index I_1 et I_2 passent respectivement par les points 1 et 3 d'un tronçon A et d'un tronçon B conjugués.

2° *Corrections dynamiques de niveau.* — Les corrections d'altitude η_1 et de latitude η_2, exprimées en décimillimètres, qu'il faut faire subir à une différence brute de niveau d, exprimée en mètres, pour obtenir la différence correspondante de niveau dynamique, sont données par

$$\eta_1 = -0,0019\, d\mathrm{H},$$
$$\eta_2 = -26\, d \cos 2\lambda,$$

H étant l'altitude moyenne exprimée en mètres, λ la latitude moyenne exprimée en grades.

Remarquons que, sauf le cas très exceptionnel de régions situées en contrebas du niveau de la mer (pour lesquelles H est négatif), la correction d'altitude η_1 est de signe contraire à la différence de niveau.

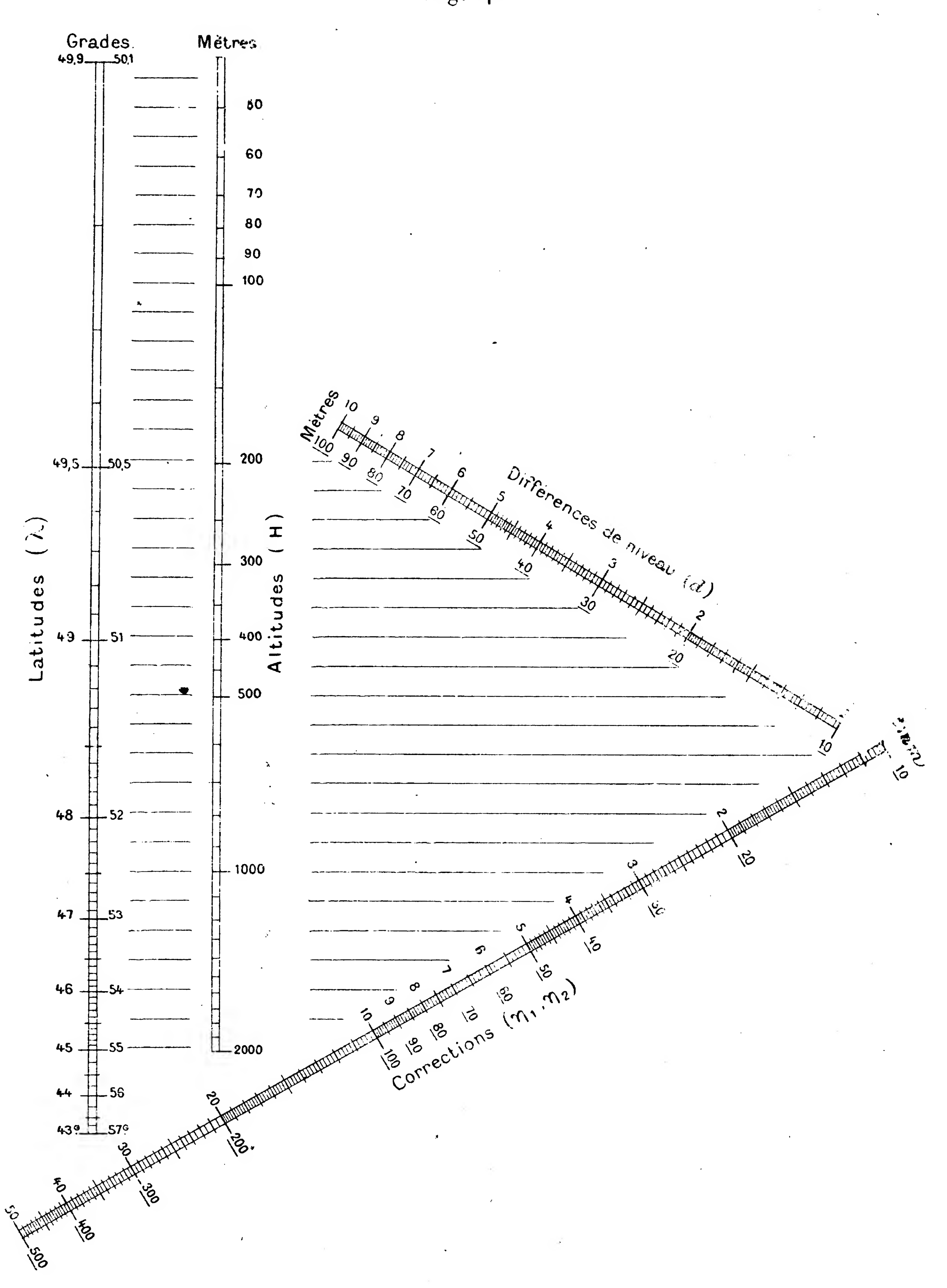
En outre, la correction de latitude η_2 doit être prise avec le signe de la différence de niveau ou le signe contraire, suivant que la latitude λ est supérieure ou inférieure à 50^G.

Nous sommes ainsi amenés à négliger les signes des seconds membres et, par suite, à prendre la même valeur de η_2 pour deux valeurs de λ supplémentaires, ce qui montre qu'il n'y aura lieu de faire varier λ qu'entre 0 et 100^G.

Cela posé, pour traduire ces formules en abaques hexagonaux, il suffira de les écrire

$$\log d + \log \mathrm{H} + \log 0,0019 = \log|\eta_1|,$$
$$\log d + \log\cos 2\lambda + \log 26 = \log|\eta_2|.$$

Fig. 40.



Pour la première, on aura donc à construire :

Sur l'axe X, l'échelle $x = \mu \log d$,

» Y, » $y = \mu(\log H + \log 0{,}0019$

» T, » $t = \mu \log|\eta_1|$;

pour la seconde :

$$\begin{array}{llll} \text{Sur l'axe X, l'échelle} & x = \mu \log d, \\ \quad » \quad \text{Y,} \quad » & y = \mu(\log \cos 2\lambda + \log 26), \\ \quad » \quad \text{T,} \quad » & t = \mu \log |\eta_2|, \end{array}$$

μ étant un module quelconque.

On voit que, de l'un à l'autre abaque, les échelles portées sur X et sur T sont les mêmes. On pourra donc les prendre en commun, et construire parallèlement l'une à l'autre les deux échelles (H) et (λ) portées sur les axes Y.

En outre, on pourra fractionner l'échelle (d) commune au point $d = 10$, en faisant coïncider le point 10 du second tronçon avec le point 1 du premier, ce qui entraînera de même la coïncidence de tout point $10d$ du second tronçon avec le point d du premier.

D'ailleurs, les corrections η_1 et η_2 étant proportionnelles à d, le tronçon correspondant de l'échelle (η_1, η_2) s'obtiendra simplement en multipliant par 10 les cotes des points du premier tronçon [1].

C'est ainsi qu'a été obtenu l'abaque de la figure 40, emprunté à M. Lallemand [2].

Pour éviter toute confusion, on a souligné les cotes des seconds tronçons des échelles (d) et (η_1, η_2).

Le mode d'emploi de l'abaque, moyennant cette distinction des deux tronçons des échelles (d) et (η_1, η_2), se résume donc en ceci :

Le transparent étant orienté, et son index I_1 *passant par le point coté d de la première échelle, on le fait glisser dans la direction de cet index de manière à amener son index* I_2 *à passer successivement par les points cotés* H *et* λ *des secondes échelles (verticales); dans ces deux positions, l'index* I_3 *donne sur la troisième échelle d'abord* η_1, *puis* η_2.

On trouvera plus loin (n° 111) une autre application de la méthode des abaques hexagonaux dans le cas des équations à trois variables.

IV. — Anamorphose générale. Nomogrammes généraux à lignes concourantes.

36. *Principe de l'anamorphose générale.* — L'idée de l'anamorphose, développée dans les paragraphes précédents, conduit tout naturellement à la généralisation que voici :

A chacune des variables z_1 et z_2 faisons correspondre un système de courbes cotées *quelconques*. Si nous associons les couples de

---

(1) On reconnaît là une application du principe des multiplicateurs correspondants (n° 20).

(2) *Nivellement de haute précision* (tirage à part), p. 31.

valeurs de z_1 et z_2 conduisant, en vertu de l'équation proposée, à *une même valeur de* z_3, et que nous prenions les points de rencontre des courbes cotées correspondantes, ces points seront distribués sur une courbe à côté de laquelle nous pourrons inscrire la valeur de z_3 considérée. En répétant cette opération pour une série de valeurs de z_3 nous obtiendrons un système de courbes cotées pour cette variable, et ce système, joint à ceux qui ont été arbitrairement choisis pour z_1 et z_2, constituera un *nomogramme à lignes concourantes* de l'équation proposée.

En un mot, *toute équation à trois variables peut être représentée au moyen de trois systèmes de courbes cotées dont deux arbitraires, trois courbes prises respectivement dans chacun de ces systèmes étant correspondantes lorsqu'elles concourent en un même point.*

On peut se demander s'il y a pratiquement intérêt à envisager une telle généralisation. Or, on conçoit *a priori* la possibilité de représenter uniquement au moyen de droites et de cercles certaines équations auxquelles n'est pas applicable l'anamorphose de Lalanne. Cette considération suffit à faire ressortir l'intérêt qui s'attache au principe général ci-dessus, qui a été rencontré par Massau, ingénieur au corps belge des Ponts et Chaussées ([1]), lorsque cet auteur a cherché à généraliser l'anamorphose de Lalanne en constituant le canevas de l'abaque au moyen non plus de deux systèmes de droites parallèles, mais de deux systèmes de droites *quelconques*, ainsi qu'on le verra plus loin (n° 41).

Avant de donner l'expression mathématique de ce principe général, nous croyons utile de dire quelques mots des systèmes de courbes cotées.

37. *Systèmes de courbes cotées.* — Soit l'équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

où z désigne un paramètre arbitraire, x et y des coordonnées ponctuelles quelconques, généralement des coordonnées cartésiennes.

([1]) *Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications*, paru dans les *Annales de l'Association des Ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Gand* (Liv. III, Chap. III, § 2); 1884.

A chaque valeur de z correspond une courbe, et, lorsqu'on fait varier ce paramètre de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient un *système simplement infini* ou *faisceau* de courbes.

Supposons que, faisant varier z par *échelons égaux* entre les *limites* a et b, nous construisions la partie de chacune des courbes correspondantes *comprise à l'intérieur d'une certaine aire* A en ayant soin d'inscrire à côté de chacune d'elles la valeur correspondante du paramètre z; nous obtenons ainsi un système de *courbes cotées* (z) (¹).

Toutes ces courbes sont tangentes à une même courbe, leur enveloppe, dont l'équation est le résultat de l'élimination de z entre les équations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Mais, outre que la partie de cette enveloppe, qui est tangente aux courbes tracées, se trouve généralement en dehors de l'aire A, il faut remarquer que, sauf dans le cas où les courbes cotées sont des droites, elle n'offre aucune utilité pratique.

Si l'on est conduit à envisager une valeur de z autre que celles qui ont servi à la construction du système, on doit se figurer entre les courbes effectivement tracées les plus voisines, celle qui répondrait à cette valeur de z, en se laissant guider par l'allure des courbes environnantes. Cette *interpolation à vue* est, on le voit, assez délicate et la précision qu'elle peut donner dépend bien évidemment de l'habitude qu'en peut avoir le lecteur.

Lorsque, par la suite, nous parlerons des courbes cotées d'un système, on devra entendre par là non seulement celles qui seront effectivement tracées sur le tableau, mais encore celles qu'il est possible de leur adjoindre par une interpolation à vue.

Il convient d'observer que la construction d'un système de courbes cotées ne comporte pas, en général, à beaucoup près, un travail équivalent à la somme de ceux qu'exigerait la construction des courbes qui le constituent, *prises individuellement*. Il arrive, en effet,

---

(¹) Rappelons, ainsi que nous l'avons déjà dit au n° 16, que ces courbes ont également reçu le nom de *courbes d'égal élément* (Lalanne) et de *courbes isoplèthes* (Vogler et Lalanne). Nous nous en tenons au terme plus simple et plus expressif de *courbes cotées*.

presque toujours que, une fois l'une de ces courbes obtenue, le tracé des autres s'en déduit avec une grande facilité. On peut citer, à ce point de vue, comme particulièrement caractéristique, l'exemple des systèmes de courbes qui se rencontrent plus loin aux nos 104 et 105.

38. *Systèmes de droites, du premier degré* (1). — Si l'équation d'une droite contient algébriquement le paramètre z au degré n, elle définit un système de droites, du $n^{\text{ième}}$ degré. De telles droites admettent en général une enveloppe de classe n, puisque, à un couple de valeurs données pour x et y, correspondent n valeurs de z, ce qui montre que, par tout point, on peut mener n tangentes, réelles ou imaginaires, à l'envelope du système.

Les cas les plus intéressants sont ceux de $n=1$ et $n=2$, pour lesquels l'enveloppe se réduit respectivement à un point et à une conique.

Considérons d'abord un *système de droites* (z), *du premier degré.* Son équation est de la forme

$$(1) \qquad U + zV = 0,$$

où U et V sont des fonctions linéaires en x et y.

A $z=0$ et $z=\infty$ correspondent respectivement les droites $U=0$ et $V=0$, représentées sur la figure 41 par AB et AC.

Fig. 41

Toute autre droite (z) ou AM du système passera par le point de rencontre A de ces deux premières droites.

Si l'on remplace U et V par leurs valeurs développées en x et y,

---

(1) L'étude des systèmes de droites du premier et du deuxième degré a été faite, dans le Mémoire cité de Massau, d'une façon un peu différente.

on voit que l'équation (1) renferme, sous forme homogène, six coefficients. Il faut donc cinq conditions pour définir le système. La connaissance du point A équivaut à deux conditions. Il faudra donc connaître les cotes de trois droites menées par ce point pour que la détermination géométrique du système soit complète.

Coupons ce système par une droite BC quelconque. L'équation (1), conservant la même forme pour un changement quelconque des axes de coordonnées, nous pouvons, sans nuire à la généralité, supposer que cette droite BC se confond avec l'axe des x. Alors, pour avoir l'échelle déterminée sur cet axe par le système (z), il suffira de faire $y = 0$ dans (1), ce qui donne l'équation d'une échelle homographique (n° 7).

D'après ce qui a été vu en cet endroit, on peut construire géométriquement une telle échelle lorsqu'on en connaît trois points. En particulier, on peut se servir des points B ($z = 0$) et C ($z = \infty$), auxquels on adjoindra le point de rencontre M d'une droite quelconque (z) du système avec la droite BC.

Rappelons quelle est la construction donnée au n° 7 : si, par le point M, on mène la parallèle MB′ à AC, l'échelle métrique ayant son point (0) en B′ et son point (z) en M, projetée à partir de A sur BC, donne, sur cette droite, l'échelle demandée. On peut donc dire que *le faisceau cherché détermine sur toute droite parallèle à* AC *une échelle métrique.*

39. *Systèmes de droites, du second degré.* — Un tel système est défini par une équation de la forme

$$U + zV + z^2 W = 0,$$

où U, V, W sont des fonctions linéaires en x et y.

A $z = 0$ et $z = \infty$ correspondent respectivement les droites $U = 0$ et $W = 0$, représentées sur la figure 42 par AB et AC. Soit, en outre, BC la droite $V = 0$.

L'enveloppe du système a pour équation

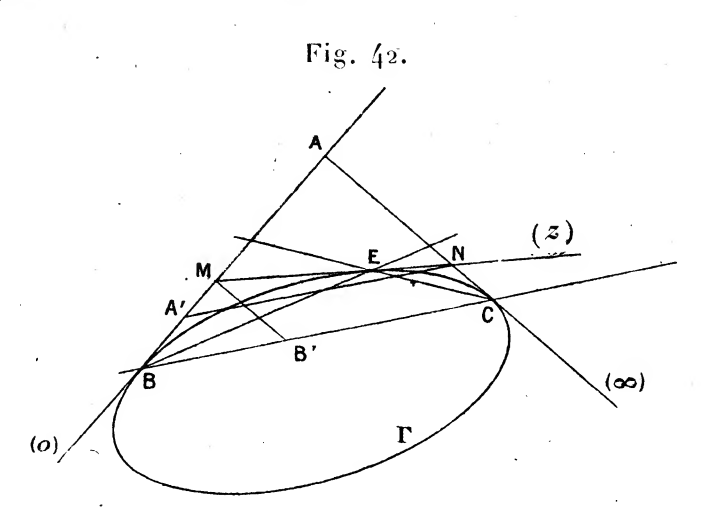
$$V^2 - 4UW = 0.$$

C'est donc une conique Γ tangente à AB et AC en B et en C.

L'équation (1) renferme, sous forme homogène, neuf coefficients. Il faut donc huit conditions pour définir le système. La connaissance

de la conique Γ équivaut à cinq conditions. Il faudra donc, si elle est donnée, connaître, en outre, les cotes de trois de ses tangentes pour que la détermination géométrique du système soit complète. La conique Γ sera d'ailleurs définie si l'on a ses points de contact avec trois des tangentes cotées données.

Fig. 42.



En particulier, lorsque les droites AB, AC et BC ont été construites, on connaît, par le fait, deux tangentes cotées AB ($z = 0$) et AC ($z = \infty$) avec leurs points de contact B et C. Il suffit alors de construire une autre droite quelconque MN de cote z pour que le système soit géométriquement défini.

Quatre droites quelconques du système, prises avec leurs cotes, équivalant à huit conditions, permettront également de construire le système.

Cette construction repose, dans tous les cas, sur le théorème suivant : *Les points de rencontre, pris avec les cotes correspondantes, de toutes les droites du système avec l'une quelconque d'entre elles forment une échelle homographique.*

En effet, les points de rencontre des droites du système défini par l'équation (1) avec la droite dont l'équation est

$$U + z_0 V + z_0^2 W = 0 \tag{2}$$

se trouvent sur les droites du système

$$V + (z + z_0) W = 0, \tag{3}$$

dont l'équation s'obtient par soustraction de (1) et (2), et comme ce système est du premier degré, l'échelle qu'il engendre sur la droite (2)

est linéaire. Le point coté z_0 sur cette échelle est évidemment son point de contact avec la conique Γ.

En particulier, les échelles situées sur AB et sur AC sont données l'une par

$$(4) \qquad U = 0 \quad \text{avec} \quad V + zW = 0,$$

l'autre par

$$(5) \qquad W = 0 \quad \text{avec} \quad U + zV = 0.$$

Si l'on connaît quatre droites cotées du système, on a, sur chacune d'elles, par sa rencontre avec les trois autres, trois points de l'échelle homographique correspondante. On peut donc construire cette échelle (n° 7). Après en avoir ainsi obtenu deux, il suffit de tirer des droites entre leurs points de même cote pour avoir le système demandé.

Revenons au cas où l'on a tracé les droites AB, AC, BC et une droite MN de cote quelconque z dans le système.

L'échelle linéaire sur AB est définie par les points B(o), M(z) et A(∞); celle sur AC par les points A(o), N(z) et C(∞).

Si nous menons par M la parallèle MB′ à AC et que nous construisions sur cette droite l'échelle métrique ayant son point (o) en B′ et son point (z) en M, il nous suffira de projeter cette échelle à partir de C sur AB pour avoir l'échelle située sur cette droite. De même l'échelle située sur AC s'obtiendra par projection à partir de B de l'échelle métrique construite sur la parallèle NA′ à BC et ayant son point (o) en A′ et son point (z) en N.

Le point E où la droite (z) touche son enveloppe Γ est défini par l'équation (1) et sa dérivée par rapport à z,

$$(6) \qquad V + 2zW = 0.$$

Cette dernière équation, multipliée par $\frac{z}{2}$ et retranchée de (1), donne

$$(7) \qquad U + \frac{z}{2}V = 0.$$

Le point E se trouve donc à l'intersection des droites définies par (6) et (7). Or, la comparaison de ces équations avec (4) et (5) montre que la première représente la droite qui joint le point C

au point coté $2z$ sur l'échelle de AB, et la seconde la droite qui joint le point B au point coté $\frac{z}{2}$ sur l'échelle de AC. De là une facile construction du point E lorsque ces deux échelles ont été obtenues.

Remarque. — Pour qu'une échelle homographique devienne métrique, il faut que son point coté (∞) soit à l'infini. Il n'y aura donc, en général, qu'une droite d'un système du second degré sur laquelle les autres détermineront une échelle métrique, à savoir celle qui sera parallèle à la droite cotée (∞), c'est-à-dire la tangente à la conique Γ parallèle à AC. Toutefois, si la droite (∞) est tout entière transportée à l'infini, ce qui a lieu *lorsque* W *se réduit à une constante*, auquel cas la conique Γ est une parabole, les échelles *de toutes les droites du système sont métriques*. La conique Γ peut d'ailleurs être une parabole sans que sa tangente cotée (∞) soit précisément celle qui est située à l'infini.

40. *Nomogramme général à trois systèmes de courbes concourantes.* — Considérons les trois systèmes de courbes cotées définis respectivement par les équations

$$(z_1) \qquad f_1(x, y, z_1) = 0,$$
$$(z_2) \qquad f_2(x, y, z_2) = 0,$$
$$(z_3) \qquad f_3(x, y, z_3) = 0.$$

Si trois courbes prises respectivement dans ces systèmes concourent en un même point, leurs cotes sont liées par l'équation

$$(E) \qquad F_{123} = 0,$$

obtenue par élimination de x et y entre les trois équations précédentes, et cela, bien entendu, quelle que soit l'espèce (cartésiennes, polaires, etc.) des coordonnées x et y.

L'ensemble des trois systèmes (z_1), (z_2) et (z_3) constitue donc un nomogramme de l'équation (E), dont le mode d'emploi tient dans ce simple énoncé :

La valeur de la variable prise pour inconnue est donnée par la cote de la courbe du système correspondant, qui passe par le point de rencontre des courbes cotées au moyen des valeurs des deux autres variables dans les systèmes correspondants.

On voit que si l'équation (E) est donnée, on pourra choisir arbitrairement deux des trois équations de courbes cotées, les deux premières, par exemple, la troisième s'obtenant par l'élimination de z_1 et z_2 entre celles-ci et l'équation (E).

Mais, et c'est là un point essentiel, il faudra à la fois que les équations (z_1) et (z_2) qu'on se sera données et l'équation (z_3), obtenue comme on vient de le dire, représentent des courbes *réelles*.

Lorsque, sous cette condition, on formera les équations (z_1), (z_2) et (z_3), qui, par élimination de x et de y, devront redonner l'équation (E), on pourra dire que l'on opère la *disjonction* des variables.

Il faut, en outre, remarquer qu'en pratique les variables z_1 et z_2 prises comme variables indépendantes auront des limites a_1 et b_1 pour l'une, a_2 et b_2 pour l'autre. On commencera donc par construire les courbes correspondantes (a_1) et (b_1) du premier système, (a_2) et (b_2) du second (*fig.* 43). Ces courbes détermineront un quadrilatère curviligne, et il ne sera, bien entendu, nécessaire de construire les diverses courbes (z_1), (z_2) et (z_3) qu'à l'intérieur de ce quadrilatère. Toutefois, si ces courbes sont des droites ou des cercles, dont le tracé ne coûte pas plus de peine quand on l'étend davantage, on pourra, en vue par exemple d'une plus grande netteté dans l'inscription des cotes, les prolonger au delà des limites qui viennent d'être définies.

Fig. 43.

Remarquons enfin qu'il pourra y avoir lieu de pratiquer l'interpolation dont il a été question au n° 37 pour une, pour deux des variables, ou même pour les trois à la fois. L'opération mentale, qui consiste à se figurer, au milieu des courbes effectivement tracées, les trois courbes correspondant aux deux données et à l'inconnue, exige alors quelque attention et fournit des résultats dont la précision dépend évidemment de la plus ou moins grande habitude du lecteur et de la justesse de son coup d'œil.

On voit immédiatement comment les méthodes déjà exposées résultent du principe général ci-dessus.

Il suffit de prendre pour équations (z_1) et (z_2)

(z_1) $$x = \mu_1 z_1,$$

(z_2) $$y = \mu_2 z_2,$$

pour obtenir comme équation (z_3)

(z_3) $$F_{123}\left(\frac{x}{\mu_1}, \frac{y}{\mu_2}, z_3\right) = 0.$$

C'est la méthode cartésienne (n° 16).

Si l'équation (E) est de la forme

$$f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0,$$

on n'a qu'à prendre pour équations (z_1) et (z_2)

(z_1) $$x = \mu_1 f_1,$$

(z_2) $$y = \mu_2 f_2,$$

pour avoir comme équation (z_3)

(z_3) $$\frac{x}{\mu_1} g_3 + \frac{y}{\mu_2} h_3 + f_3 = 0.$$

On retrouve ainsi la *méthode de l'anamorphose simple* (n° 23).

Voyons maintenant quelle nouvelle extension de l'anamorphose peut résulter du principe général qui vient d'être indiqué.

41. *Nomogrammes à droites concourantes.* — L'anamorphose ordinaire avait pour objet, en substituant à un quadrillage métrique un autre quadrillage, de transformer un système de courbes cotées, dessiné sur le premier, en un système de droites sur le second.

Supposons maintenant qu'au lieu d'un quadrillage nous construisions un réseau formé de deux systèmes de droites quelconques et que, dans ces conditions, les courbes cotées correspondant à la troisième variable soient aussi des droites quelconques.

Nous voyons que nous aurons alors pour les systèmes (z_1), (z_2) et (z_3) des équations de la forme

$$(z_1) \qquad x f_1 + y g_1 + h_1 = 0,$$
$$(z_2) \qquad x f_2 + y g_2 + h_2 = 0,$$
$$(z_3) \qquad x f_3 + y g_3 + h_3 = 0.$$

L'élimination de x et y entre ces trois équations nous donne l'équation représentée qui peut s'écrire

$$(\mathrm{E}) \qquad \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Si donc une équation est susceptible de revêtir cette forme, on pourra immédiatement effectuer la disjonction des variables par les équations (z_1), (z_2) et (z_3) ci-dessus, et, en construisant les trois systèmes de droites définis respectivement par ces équations, on aura constitué un nomogramme à droites concourantes pour l'équation (E).

Les nomogrammes de cette espèce ont été envisagés pour la première fois par Massau ([1]).

Le problème qui consiste à reconnaître d'une façon absolument générale qu'une équation $F_{123} = 0$ quelconque est susceptible de prendre la forme du déterminant ci-dessus est un problème difficile d'Analyse dont il sera dit un mot plus loin (Premier renvoi du n° 57). En pratique, on peut, en général, donner immédiatement à l'équation considérée une forme telle que

$$f_1 F_{23} + g_1 G_{23} + H_{23} = 0.$$

Posant

$$x = \frac{F_{23}}{H_{23}}, \qquad y = \frac{G_{23}}{H_{23}},$$

on n'a qu'à éliminer successivement z_3 et z_2 entre ces deux équa-

([1]) *Intégration graphique*, Livre III, Chap. III, § 2.

tions. Si les équations résultantes ainsi obtenues sont linéaires en x et y et s'écrivent

$$xf_2 + yg_2 + h_2 = 0,$$
$$xf_3 + yg_3 + h_3 = 0,$$

il suffit de les joindre à

$$xf_1 + yg_1 + h_3 = 0,$$

pour que la disjonction soit effectuée sous la forme voulue ([1]).

42. *Type d'équation représentable par droites concourantes, à deux systèmes superposés.* — Ce type d'équation, rencontré par Massau, est de la forme

$$(1)\qquad (m_1f_1 + n_1)(m_2f_2 + n_2)f_3 + (p_1f_1 + q_1)(p_2f_2 + q_2)g_3 + (r_1f_1 + s_1)(r_2f_2 + s_2)h_3 = 0,$$

où les coefficients m_1, n_1, m_2, ..., r_2, s_2 sont des constantes.

Puisque nous sommes libres de choisir les équations (z_1) et (z_2) (n° 40), prenons celles qui résultent de l'élimination de f_2 d'une part, de f_1 de l'autre, entre les équations

$$(2)\qquad x = \frac{(m_1f_1 + n_1)(m_2f_2 + n_2)}{(r_1f_1 + s_1)(r_2f_2 + s_2)}, \qquad y = \frac{(p_1f_1 + q_1)(p_2f_2 + q_2)}{(r_1f_1 + s_1)(r_2f_2 + s_2)}.$$

L'équation (z_3) sera alors

$$(z_3)\qquad xf_3 + yg_3 + h_3 = 0.$$

Formons les équations (z_1) et (z_2) ainsi qu'il vient d'être dit. Par un calcul qui n'offre aucune difficulté, puisque chacune des équations (2) est du premier degré par rapport soit à f_1, soit à f_2, nous obtenons

$$(z_1)\qquad \frac{p_2s_2 - r_2q_2}{m_1f_1 + n_1}x + \frac{r_2n_2 - m_2s_2}{p_1f_1 + q_1}y + \frac{m_2q_2 - n_2p_2}{r_1f_1 + s_1} = 0,$$

$$(z_2)\qquad \frac{p_1s_1 - r_1q_1}{m_2f_2 + n_2}x + \frac{r_1n_1 - m_1s_1}{p_2f_2 + q_2}y + \frac{m_1q_1 - n_1p_1}{r_2f_2 + s_2} = 0.$$

([1]) En indiquant dans notre brochure **O.4** (p. 14) ce procédé de disjonction, nous le donnions comme d'un usage « assez fréquent dans la pratique ». A la vérité, nous n'avons pas encore rencontré de cas où il ne puisse pas s'appliquer.

Ces deux dernières équations définissent des systèmes de droites du second degré.

L'équation (1) *ci-dessus est donc représentable par trois systèmes de droites dont deux nécessairement du second degré.*

Mais il y a plus : *Ces deux systèmes du second degré admettent pour enveloppe la même conique.*

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que les droites (z_1) et (z_2) coïncident deux à deux, c'est-à-dire que, quel que soit z_1, on peut déterminer z_2 de façon que les droites (z_1) et (z_2) coïncident. La vérification directe de ce fait exigerait des calculs très compliqués; elle devient fort aisée grâce à l'artifice suivant :

Rien n'empêche, pour la construction de l'abaque, de substituer aux fonctions f_1 et f_2 les fonctions f'_1 et f'_2 définies par

$$f'_1 = \frac{m_1 f_1 + n_1}{r_1 f_1 + s_1}, \qquad f'_2 = \frac{m_2 f_2 + n_2}{r_2 f_2 + s_2}.$$

Un calcul facile montre que

$$\frac{p_1 f_1 + q_1}{r_1 f_1 + s_1} = p'_1 f'_1 + q'_1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p'_1 = \dfrac{q_1 r_1 - p_1 s_1}{n_1 r_1 - m_1 s_1}, \\ q'_1 = \dfrac{n_1 p_1 - m_1 q_1}{n_1 r_1 - m_1 s_1}, \end{cases}$$

$$\frac{p_2 f_2 + q_2}{r_2 f_2 + s_2} = p'_2 f'_2 + q'_2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p'_2 = \dfrac{q_2 r_2 - p_2 s_2}{n_2 r_2 - m_2 s_2}, \\ q'_2 = \dfrac{n_2 p_2 - m_2 q_2}{n_2 r_2 - m_2 s_2}. \end{cases}$$

Dès lors, les équations (z_1) et (z_2) deviennent

$$(z'_1) \qquad \frac{p'_2 x}{f'_1} - \frac{y}{p'_1 f'_1 + q'_1} + q'_2 = 0,$$

$$(z'_2) \qquad \frac{p'_1 x}{f'_2} - \frac{y}{p'_2 f'_2 + q'_2} + q'_1 = 0.$$

Ces équations représenteront une même droite si l'on peut avoir à la fois

$$\frac{p'_2 f'_2}{p'_1 f'_1} = \frac{p'_2 f'_2 + q'_2}{p'_1 f'_1 + q'_1} = \frac{q'_2}{q'_1}.$$

Or, ces deux égalités se réduisent évidemment à une seule :

$$\frac{p'_2 f'_2}{q'_2} = \frac{p'_1 f'_1}{q_1}.$$

Il suffira donc que f'_1 et f'_2 satisfassent à cette équation pour que les droites (z'_1) et (z'_2) coïncident. Autrement dit :

Si f_1 et f_2 sont liés par la relation

$$(3)\qquad \frac{r_1q_1 - s_1p_1}{m_1q_1 - n_1p_1}\,\frac{m_1f_1 + n_1}{r_1f_1 + s_1} = \frac{r_2q_2 - s_2p_2}{m_2q_2 - n_2p_2}\,\frac{m_2f_2 + n_2}{r_2f_2 + s_2},$$

les droites (z_1) et (z_2) coïncident.

Ainsi donc, les systèmes (z_1) et (z_2) seront constitués par les mêmes droites (tangentes à une certaine conique) affectées de cotes différentes. Il n'y aura évidemment, pour éviter toute confusion, qu'à distinguer les cotes se référant à l'un ou à l'autre système au moyen d'un signe quelconque (indice, accent, tiret, trait de couleur, etc.). Il arrivera d'ailleurs souvent que la portion utile de chaque système ne comprendra pas les mêmes droites. On aura dès lors affaire à deux groupes distincts de tangentes à une même conique et il sera superflu d'affecter leurs cotes de signes particuliers.

43. *Transformation homographique d'un nomogramme à droites concourantes.* — Les lignes, droites ou courbes, qui, par leur concours, constituent un nomogramme, peuvent évidemment être soumises à une transformation ponctuelle quelconque, *pourvu que leurs cotes se conservent.*

En particulier, la transformation homographique la plus générale, avec laquelle toute droite donne une droite, sera applicable à tout nomogramme à droites concourantes.

Pour obtenir l'expression analytique de cette transformation, il suffit de multiplier l'équation mise sous la forme

$$(\mathrm{E})\qquad \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0$$

par le déterminant

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}$$

où les lettres $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \ldots, \nu''$ désignent des nombres quelconques, mais tels que D *soit différent de zéro.*

La règle bien connue de la multiplication des déterminants montre

que l'équation s'écrira alors

$$\begin{vmatrix} \lambda f_1+\mu g_1+\nu h_1 & \lambda' f_1+\mu' g_1+\nu' h_1 & \lambda'' f_1+\mu'' g_1+\nu'' h_1 \\ \lambda f_2+\mu g_2+\nu h_2 & \lambda' f_2+\mu' g_2+\nu' h_2 & \lambda'' f_2+\mu'' g_2+\nu'' h_2 \\ \lambda f_3+\mu g_3+\nu h_3 & \lambda' f_3+\mu' g_3+\nu' h_3 & \lambda'' f_3+\mu'' g_3+\nu'' h_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Elle sera, par suite, représentable par les trois systèmes de droites

$$(z_1)\quad x(\lambda f_1+\mu g_1+\nu h_1)+y(\lambda' f_1+\mu' g_1+\nu' h_1)+\lambda'' f_1+\mu'' g_1+\nu'' h_1=0,$$
$$(z_2)\quad x(\lambda f_2+\mu g_2+\nu h_2)+y(\lambda' f_2+\mu' g_2+\nu' h_2)+\lambda'' f_2+\mu'' g_2+\nu'' h_2=0,$$
$$(z_3)\quad x(\lambda f_3+\mu g_3+\nu h_3)+y(\lambda' f_3+\mu' g_3+\nu' h_3)+\lambda'' f_3+\mu'' g_3+\nu'' h_3=0.$$

Ainsi les nombres λ, μ, ..., ν'' étant astreints à la seule condition que leur déterminant D soit différent de zéro, *les trois dernières équations écrites définissent un nomogramme à droites concourantes pouvant servir à représenter l'équation* (E) *ci-dessus*.

On peut d'ailleurs prendre pour fonctions f_1, g_1, ..., h_3 celles qui correspondent à un *quelconque* des nomogrammes à droites concourantes de l'équation proposée. Lors donc qu'on aura réussi à former l'un de ceux-ci, on aura du même coup obtenu tous les autres, pouvant s'en déduire homographiquement, avec conservation des mêmes axes de coordonnées.

Exemples : 1° La première variante du second type d'abaque de multiplication (*fig.* 23) est constituée par les droites

$$z_1 x - 10y = 0,$$
$$x - z_2 = 0,$$
$$10y - z_3 = 0,$$

qui conduisent, pour l'équation

$$z_1 z_2 - z_3 = 0$$

de la multiplication, à la forme

$$\begin{vmatrix} z_1 & -10 & 0 \\ 1 & 0 & -z_2 \\ 0 & 10 & -z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Remplaçons la seconde colonne par la somme des deux premières. Cela nous donne

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_1-10 & 0 \\ 1 & 1 & -z_2 \\ 0 & 10 & -z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où les équations

$$z_1 x + (z_1 - 10)y = 0,$$
$$x + y - z_2 = 0,$$
$$10y - z_3 = 0,$$

qui définissent précisément la seconde variante (*fig.* 23 *bis*).

Une simple permutation des colonnes du premier déterminant le transforme en

$$\begin{vmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -z_2 & z_1 \\ 10 & -z_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où les équations

$$-10x + z_1 = 0,$$
$$-z_2 y + 1 = 0,$$
$$10x - z_3 y = 0,$$

qui définissent un abaque du troisième type (*fig.* 28).

2° Un abaque de l'équation

$$f_1 + f_2 = f_3$$

étant constitué par les systèmes de droites dont les équations sont

$$x - f_1 = 0,$$
$$y - f_2 = 0,$$
$$x + y - f_3 = 0,$$

on voit que l'équation peut se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & -f_2 \\ 1 & 1 & -f_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Multipliant ce déterminant par

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

nous obtenons, par la règle ci-dessus rappelée,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -f_1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -f_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -f_3 \end{vmatrix} = 0,$$

qui nous donne les systèmes de droites

$$x - f_1 = 0,$$
$$-x + y\sqrt{3} - 2f_2 = 0,$$
$$x + y\sqrt{3} - 2f_3 = 0.$$

Nous retombons ainsi sur les abaques hexagonaux. Les trois droites dont les équations sont ici écrites, qui font avec Ox respectivement des angles de 90°, 60° et 120°, sont, en effet, à des distances de l'origine égales à f_1, f_2 et f_3.

44. *Quadrilatère limite.* — On vient de voir comment, lorsqu'on conserve les mêmes axes de coordonnées, l'application du principe de l'homographie permet d'engendrer toute une série de nomogrammes à droites concourantes pour une équation donnée.

On peut, en particulier, se proposer de faire en sorte, par ce moyen, que le quadrilatère limitant la partie utile d'un tel nomogramme coïncide avec un rectangle qu'on se sera donné d'avance.

Ce quadrilatère ABCD est formé par les droites correspondant aux valeurs limites a_1 et b_1, a_2 et b_2 des variables considérées comme indépendantes z_1 et z_2 (¹).

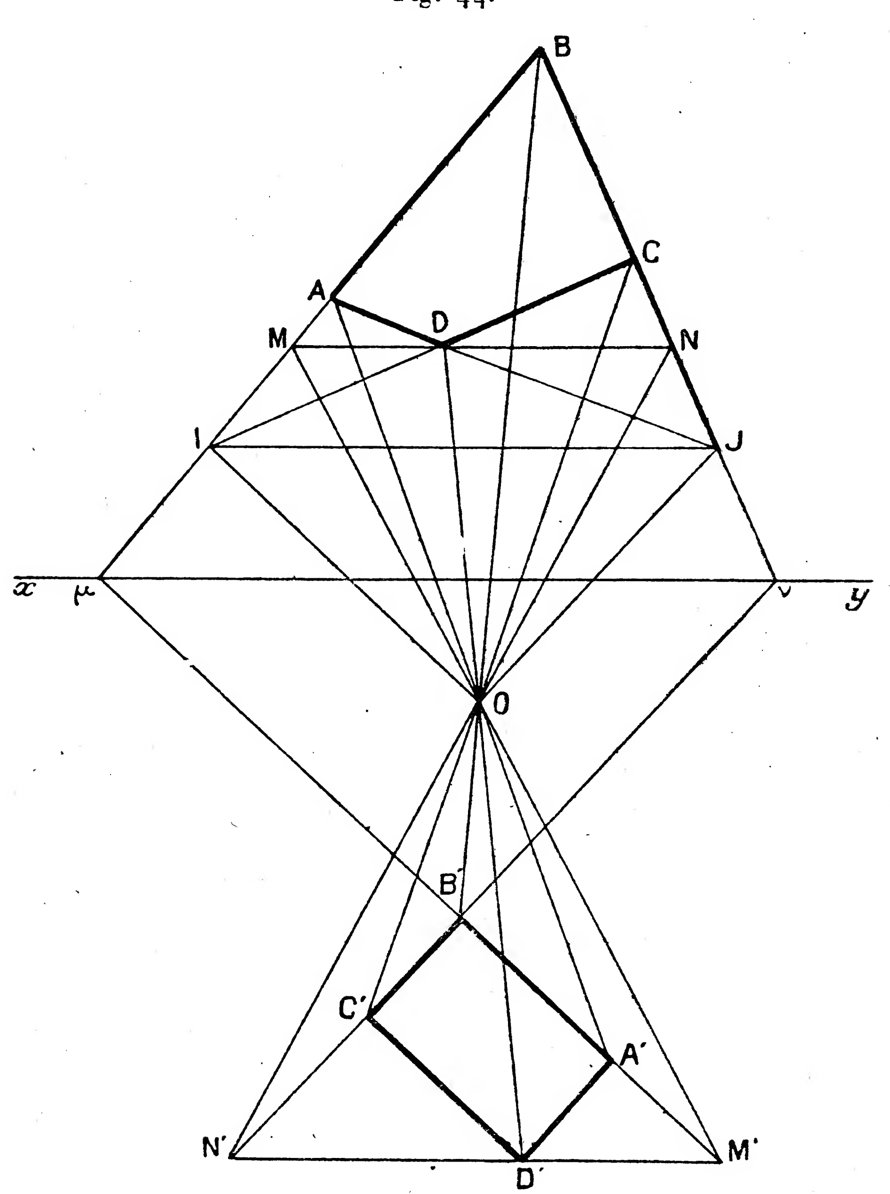
Pour remplacer ce quadrilatère déjà construit par le rectangle A′B′C′D′, il suffit d'effectuer géométriquement la transformation homographique de la figure en faisant respectivement correspondre aux points A, B, C, D les points A′, B′, C′, D′. Cette construction peut être réalisée ainsi qu'il suit (²) :

(¹) Il arrive fréquemment, en pratique, que les valeurs utiles a_3 et b_3, entre lesquelles reste comprise la variable z_3, tombent entre les valeurs limites théoriques définies par les cotes des courbes extrêmes du système passant à l'intérieur du quadrilatère ABCD.

(²) Ce mode de construction très élégant a été proposé par M. Farid Boulad (*Association française pour l'avancement des Sciences*, Congrès de Toulouse, 1910, p. 35).

Les figures $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ définies par les quadrilatères ABCD et A′B′C′D′ étant homographiques peuvent être mises dans une position relative telle qu'elles deviennent homologiques. Il suffit de déterminer le pôle et l'axe de cette homologie. Supposons la position voulue réalisée (*fig.* 44). La droite IJ qui joint les points de rencontre des

Fig. 44.



côtés opposés de ABCD, homologues des points à l'infini dans les directions des côtés du rectangle A′B′C′D′, est la droite limite de $\mathfrak{F}$ (homologue de la droite à l'infini de $\mathfrak{F}'$); elle est donc parallèle à l'axe d'homologie xy. Menons par D la parallèle MN à IJ, donc à xy; son homologue M′N′ est aussi parallèle à XY et, de plus, on a

$$\frac{D'M'}{D'N'} = \frac{DM}{DN},$$

égalité qui permet de repérer la droite M'N' par rapport au rectangle A'B'C'D' indépendamment de sa mise en place. Enfin les points I et J étant les homologues des points à l'infini sur A'B' et B'C', les droites OI et OJ, O étant le pôle de l'homologie, sont respectivement parallèles à B'M' et B'N', et les triangles OIJ et B'M'N' sont semblables.

De là la construction : une fois les droites IJ et MN tirées, et la droite M'N' déterminée, sur une figure à part, par rapport à A'B'C'D', en vertu du repérage qui vient d'être indiqué, on construit sur IJ un triangle OIJ semblable à B'M'N' (I et M', J et N' étant les couples de sommets correspondants), puis, sur le faisceau O(DMN), on place la ponctuelle D'M'N' (ce qui revient à tracer entre OM et ON un segment M'N' parallèle à MN et de grandeur connue). Cela fixe la mise en place du rectangle A'B'C'D'. Les points de rencontre μ et ν des droites homologues BM et B'M' d'une part, BN et B'N' de l'autre, déterminent ensuite l'axe d'homologie xy.

La connaissance du pôle O et de l'axe xy de l'homologie permet alors la rapide transformation de la figure $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}'$.

On peut aussi se proposer de déterminer *a priori*, par voie analytique, les coefficients des systèmes de droites du nomogramme à construire, de façon à réaliser la condition requise. On procédera dès lors de la manière suivante :

Soient l_1, m_1, n_1 et l'_1, m'_1, n'_1 les valeurs prises respectivement par les fonctions f_1, g_1, h_1 pour $z_1 = a_1$ et $z_1 = b_1$. De même pour z_2.

Pour faire en sorte que le quadrilatère limite de l'abaque soit formé d'une part par les droites

$$x = 0, \qquad x = \alpha,$$

de l'autre par les droites

$$y = 0, \qquad y = \beta,$$

il faut disposer des paramètres λ, μ, ..., ν'', de façon que, pour $z_1 = a_1$ et $z_1 = b_1$, l'équation (z_1) du n° 43 donne les deux premières, et que, pour $z_2 = a_2$ et $z_2 = b_2$ l'équation (z_2) donne les deux dernières.

Cela conduit aux équations de condition

$$(1)\quad \begin{cases} \lambda l_2 + \mu m_2 + \nu n_2 = 0, \\ \lambda l'_2 + \mu m'_2 + \nu n'_2 = 0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda' l_1 + \mu' m_1 + \nu' n_1 = 0, \\ \lambda' l'_1 + \mu' m'_1 + \nu' n'_1 = 0, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda'' l_1 + \mu'' m_1 + \nu'' n_1 = 0, \\ \lambda'' l_2 + \mu'' m_2 + \nu'' n_2 = 0, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} (\lambda l'_1 + \mu m'_1 + \nu n'_1)\alpha + (\lambda'' l'_1 + \mu'' m'_1 + \nu'' n'_1) = 0, \\ (\lambda' l'_2 + \mu' m'_2 + \nu' n'_2)\beta + (\lambda'' l'_2 + \mu'' m'_2 + \nu'' n'_2) = 0. \end{cases}$$

De ces huit équations homogènes, il faut tirer des valeurs proportionnelles pour les neuf paramètres λ, μ, ..., ν''.

Des groupes (1), (2) et (3), on peut tirer respectivement des valeurs telles que

$$\begin{aligned} \lambda &= H\rho, & \mu &= K\rho, & \nu &= L\rho, \\ \lambda' &= H'\rho', & \mu' &= K'\rho', & \nu' &= L'\rho', \\ \lambda'' &= H''\rho'', & \mu'' &= K''\rho'', & \nu'' &= L''\rho'', \end{aligned}$$

ρ, ρ', ρ'' étant des paramètres encore indéterminés. Portant ces valeurs dans les équations (4), on a des équations de la forme

$$\begin{aligned} A\rho + B\rho'' &= 0, \\ A'\rho' + B'\rho'' &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire ρ et ρ' en fonction de ρ''. Les neuf paramètres λ, μ, ..., ν'' se trouvent alors exprimés en fonction de ρ'' seulement, auquel on peut attribuer une valeur quelconque.

45. *Exemple : Fruit intérieur des murs de soutènement.* — Soient ABCD (*fig.* 45) la section rectangulaire d'un mur de soutènement calculé en vue d'une certaine résistance, MBCN la section trapézoïdale de même hauteur et de même résistance.

Si l'on pose

$$\frac{BM}{BA} = l, \qquad \frac{AP}{AD} = h,$$

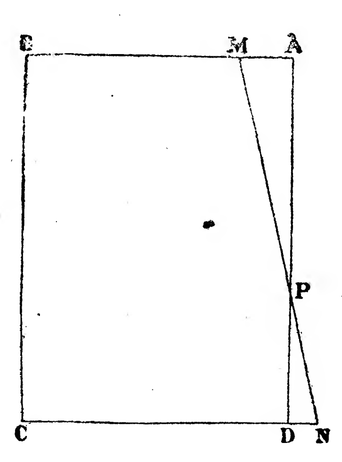
et que l'on représente par p le rapport du poids spécifique de la terre soutenue à celui de la maçonnerie, ces trois quantités sont liées par l'équation

$$(1 + l)h^2 - l(1 + p)h - \frac{(1 - l)(1 + 2p)}{3} = 0,$$

qui permet de calculer h lorsque l et p sont donnés. Nous allons faire connaître le nomogramme qui a été proposé par Massau (¹) pour cette équation.

Remarquons tout d'abord que si nous y regardons l, p et h comme z_1, z_2 et z_3, cette équation rentre dans le type (1) du n° 42.

Fig. 45.



Elle est donc représentable par trois systèmes de droites dont les équations $[(z_1)$, (z_2) et (z_3) du n° 42], que l'on obtient en posant

$$x = \frac{l(1+p)}{1+l}, \qquad y = \frac{(1-l)(1+2p)}{3(1+l)},$$

sont ici

$$(l) \qquad 2(l^2-1)x + 3l(l+1)y - l(l-1) = 0,$$

$$(p) \qquad 2(2p+1)x + 3(p+1)y - (p+1)(2p+1) = 0,$$

$$(h) \qquad hx + y - h^2 = 0.$$

Ces trois systèmes sont du second degré. Les deux premiers, d'après le théorème démontré au n° 42, auront pour enveloppe une même conique.

Si, en effet, on écrit les équations (l) et (p) sous la forme

$$(l') \qquad l^2(2x+3y-1) + l(3y+1) - 2x = 0,$$

$$(p') \qquad 2p^2 - p(4x+3y-3) - (2x+3y-1) = 0,$$

on obtient pour les enveloppes correspondantes

$$(3y+1)^2 + 8x(2x+3y-1) = 0,$$

$$(4x+3y-3)^2 + 8(2x+3y-1) = 0,$$

formes distinctes d'une même équation, savoir :

$$(4x+3y)^2 - 8x + 6y + 1 = 0,$$

qui représente une parabole π.

(¹) *Loc. cit.*, n° 298.

En outre, l'équation (3) du n° **42** montre qu'une droite (l) et une droite (p) coïncident lorsqu'on a entre leurs cotes la relation

$$p(l+1)+1=0.$$

Mais ici chacune des variables restant, en pratique, comprise entre 0 et 1, on va voir qu'on se trouve dans le cas signalé plus haut où les groupes utiles de tangentes à la parabole π correspondant respectivement à l et à p sont distincts l'un de l'autre.

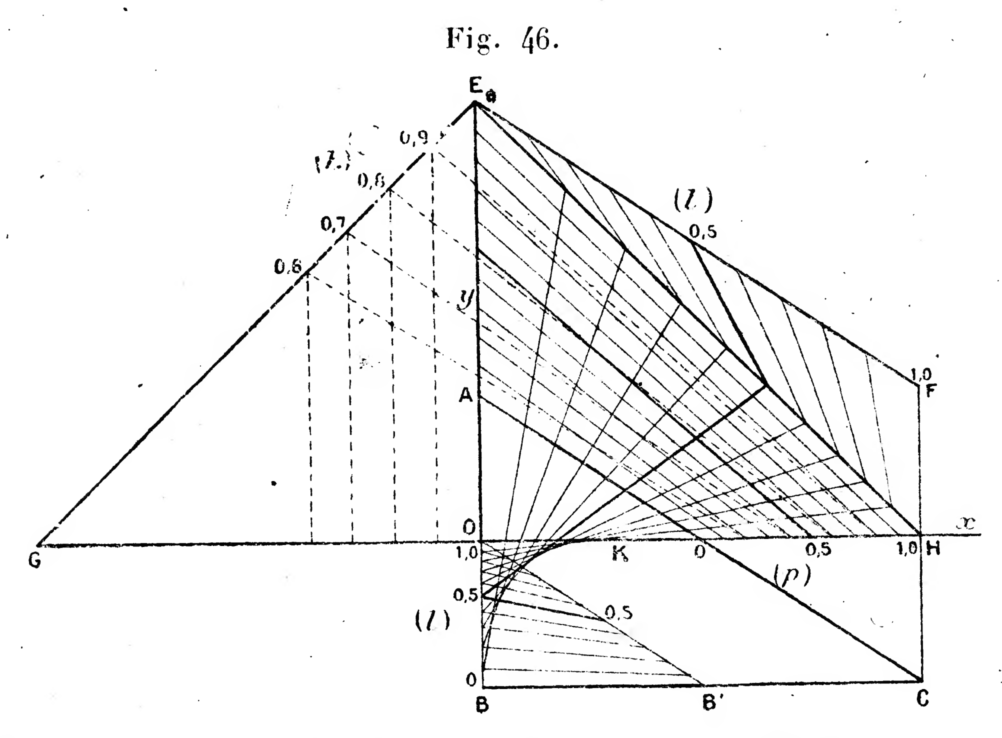
Voyons comment on peut construire chacun des systèmes (l), (p) et (h).

Système (l). — Si l'on se reporte à la forme (l') de l'équation de ce système, on voit immédiatement que :

pour $l=0$,	on a la droite	$x=0$,
pour $l=\infty$,	»	$2x+3y-1=0$,

c'est-à-dire les droites AB et AC de la figure 46 (¹). Ces droites touchent la

Fig. 46.



parabole π en leurs points de rencontre B et C avec la droite

$$3y+1=0.$$

On voit aussi que

pour $l=1$,	on a la droite	$y=0$	ou Ox,
pour $l=-2$,	»	$x+y-1=0$	ou EH.

(¹) Cette figure, aux notations près, reproduit exactement celle du Mémoire de Massau (*fig.* 141) qui, d'après la déclaration même de l'auteur, ne doit être considérée que comme propre à faire comprendre la construction du nomogramme qui devrait être établi sous de plus grandes dimensions.

Pour trouver l'échelle des points de rencontre du système (l) avec AB, menons, suivant la construction indiquée au n° **42**, la parallèle OB' à AC, et construisons une échelle métrique ayant son point (0) en B' et son point (1) en O, puisque la droite Ox est ici la droite (1). Divisons, par exemple, OB' en 10 parties égales. En projetant les points ainsi obtenus à partir de C sur OB, nous avons les points de rencontre de cette droite respectivement avec les droites (0, 1), (0, 2), ..., (0, 9) du système (l).

Pour achever de déterminer les droites (l), on pourrait prendre l'échelle qu'elles déterminent sur AC en projetant à partir de B, comme cela a été indiqué au n° **42**, une échelle métrique marquée sur Ox, ayant son point (0) en O et son point (1) à la rencontre de Ox et de AC.

Massau a préféré, pour plus de précision, prendre l'échelle qu'elles déterminent sur la droite EH qui fait partie du système, comme on vient de le voir pour $l = -2$. Pour obtenir cette échelle, il suffit de mener par le point E une parallèle EF à la droite AC($l = \infty$). L'échelle de EH, projetée à partir de C sur EF, donnera une échelle métrique. Or les points (0), ou E, et (1), ou H, de cette échelle se projettent en E et F. Divisant donc le segment EF en 10 parties égales et joignant les points ainsi obtenus au point C par des droites, on obtient sur EH les points (0, 1), (0, 2), ..., (0, 9) du système (l), qu'il suffit dès lors de joindre aux points de même cote de l'échelle déjà construite sur OB.

Système (p). — La forme (p') de l'équation de ce système montre, en vertu de la remarque qui termine le n° **42**, que les échelles déterminées par les droites du système sur l'une quelconque d'entre elles sont toutes métriques :

pour $p = 0$,	on a la droite	$2x + 3y - 1 = 0$	ou AC,
» $p = 1$,	»	$x + y - 1 = 0$	ou EH,
» $p = -1$,	»	$x = 0$	ou Oy,
» $p = -\frac{1}{2}$,	»	$y = 0$	ou Ox.

Donc, après avoir pris les points de rencontre des deux premières avec les deux dernières, on n'aura qu'à diviser les segments obtenus sur celles-ci en 10 parties égales et à joindre les points correspondants pour avoir les droites (0, 1), (0, 2), ..., (0, 9) du système (p).

Système (h). — L'équation (h) montre immédiatement que la même remarque s'applique au système correspondant. Ici :

pour $h = 0$,	on a la droite	$y = 0$	ou Ox,
» $h = 1$,	»	$x + y - 1 = 0$	ou EH,
» $h = -1$,	»	$x - y + 1 = 0$	ou EG.

Donc, en divisant en 10 parties égales le segment de E(1) à G(0), on obtient des points des droites (0, 1), (0, 2), ..., (0, 9). Pour achever de déterminer celles-ci, il suffit de remarquer que la droite (h) coupe Ox au point $x = h$.

On voit sur la figure 46 que les droites (h), tracées en traits interrompus, font avec les droites (p) des angles très petits. Cette disposition est défectueuse et l'on pourrait chercher à y remédier par l'emploi de l'homographie, mais on verra plus loin (n° 63) qu'il y a avantage à combiner celle-ci avec un autre genre de transformation. Nous reviendrons donc sur la question en temps voulu (n° 86).

46. *Nomogrammes à cercles concourants.* — Puisque, d'après ce qui a été vu au n° **42**, on est libre de choisir, pour définir le nomogramme d'une équation (E) donnée, deux sur trois des équations (z_1), (z_2) et (z_3), on pourra, dans certains cas où l'équation (E) ne rentrera pas dans le type des équations représentables par trois systèmes de droites (n° **43**), avoir recours à des cercles cotés.

Cherchons l'équation la plus générale représentable par trois systèmes de cercles cotés. Il faut, pour cela, éliminer x et y entre les équations de trois tels systèmes, supposés rapportés à des axes rectangulaires, équations qui peuvent s'écrire

$$(z_1) \qquad \varphi_1(x^2+y^2)+xf_1+yg_1+h_1=0,$$
$$(z_2) \qquad \varphi_2(x^2+y^2)+xf_2+yg_2+h_2=0,$$
$$(z_3) \qquad \varphi_3(x^2+y^2)+xf_3+yg_3+h_3=0.$$

Si l'on élimine x^2+y^2 entre ces trois équations prises deux à deux, on obtient

$$\begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 \\ f_2 & \varphi_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} g_1 & \varphi_1 \\ g_2 & \varphi_2 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} \varphi_1 & h_1 \\ \varphi_2 & h_2 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} f_2 & \varphi_2 \\ f_3 & \varphi_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} g_2 & \varphi_2 \\ g_3 & \varphi_3 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} \varphi_2 & h_2 \\ \varphi_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} f_3 & \varphi_3 \\ f_1 & \varphi_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} g_3 & \varphi_3 \\ g_1 & \varphi_1 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} \varphi_3 & h_3 \\ \varphi_1 & h_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on additionne ces équations après les avoir multipliées respectivement une première fois par g_1, g_2, g_3, et une seconde par f_1,

f_2, f_3, on obtient les suivantes :

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & \varphi_1 \\ f_2 & g_2 & \varphi_2 \\ f_3 & g_3 & \varphi_3 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} \varphi_1 & g_1 & h_1 \\ \varphi_2 & g_2 & h_2 \\ \varphi_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & \varphi_1 \\ f_2 & g_2 & \varphi_2 \\ f_3 & g_3 & \varphi_3 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & h_1 \\ f_2 & \varphi_2 & h_2 \\ f_3 & \varphi_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0.$$

De même, si l'on multiplie les trois équations données respectivement par les déterminants

$$\begin{vmatrix} f_2 & f_2 \\ g_2 & g_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} f_3 & g_3 \\ f_1 & g_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix},$$

et que l'on en fasse la somme, on a

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & \varphi_1 \\ f_2 & g_2 & \varphi_2 \\ f_3 & g_3 & \varphi_3 \end{vmatrix} (x^2 + y^2) + \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Si, après avoir posé

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix},$$

nous convenons de représenter par D_f, D_g, D_h ce que devient ce déterminant lorsqu'on y remplace les f_i, les g_i ou les h_i par les φ_i, nous voyons que les trois dernières équations obtenues peuvent s'écrire

$$D_h x - D_f = 0,$$
$$D_h y - D_g = 0$$

et

$$D_h (x^2 + y^2) + D = 0.$$

Le résultat de l'élimination de x et y entre ces trois équations s'écrit immédiatement [1]

$$D_f^2 + D_g^2 + D_h D = 0.$$

---

[1] La simplification de calcul ici introduite par rapport à la première édition a déjà été indiquée dans **0.51** (n° 54).

Telle est, sous forme symétrique, l'équation la plus générale représentable par trois systèmes de cercles concourants.

Si l'un des systèmes de cercles se réduit à un système de droites, il suffit d'égaler à zéro la fonction φ correspondante.

Dans le cas, notamment, où deux des systèmes de cercles, les deux premiers par exemple, deviennent des systèmes de droites, on a, en faisant $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv 0$, l'équation

$$\varphi_3[(g_1 h_2 - g_2 h_1)^2 + (h_1 f_2 - h_2 f_1)^2] + (f_1 g_2 - f_2 g_1)\mathrm{D} = 0,$$

et si le troisième système devient à son tour rectiligne, auquel cas $\varphi_3 \equiv 0$,

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ainsi qu'on l'a déjà vu au n° **41**.

Exemple : Mur de soutènement pour des terres profilées suivant leur talus naturel. — On peut faire des hypothèses particulières sur les systèmes de droites et de cercles constituant le nomogramme considéré, par exemple, dans le cas de deux systèmes de droites et d'un système de cercles, supposer que les cercles sont tangents entre eux en un même point. Prenant ce point comme origine et la normale commune comme axe des x, on voit que cette hypothèse entraîne $g_3 \equiv h_3 \equiv 0$ et l'avant-dernière équation ci-dessus, où l'on peut d'ailleurs faire $\varphi_3 \equiv 1$, devient

$$(g_1 h_2 - g_2 h_1)^2 + (h_1 f_2 - h_2 f_1)^2 + f_3(f_1 g_2 - f_2 g_1)(g_1 h_2 - g_2 h_1) = 0.$$

On peut aussi supposer que toutes les droites du système (z_1) passent par l'origine, ce qui revient à faire $g_1 \equiv -1$, $h_1 \equiv 0$, f_1 représentant alors le coefficient angulaire de la droite (z_1). L'équation précédente devient alors

$$h_2(1 + f_1^2) - f_3(f_1 g_2 + f_2) = 0.$$

Comme exemple d'application nous prendrons l'équation

$$k^2 + kp \sin\varphi \cos\varphi - \frac{p}{3}\cos^2\varphi = 0,$$

qui fait connaître le rapport k de la base à la hauteur d'un mur à section rectangulaire soutenant une terre profilée suivant son angle naturel φ, le rapport du poids spécifique de cette terre à celui de la maçonnerie étant égal à p [1].

---

(1) Collignon, *Résistance des matériaux*, 3e éd., p. 669.

Remplaçant $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ par leurs valeurs en fonction de $\operatorname{tang}\varphi$, on met cette équation sous la forme

$$k^2 + \frac{kp \operatorname{tang}\varphi}{1+\operatorname{tang}^2\varphi} - \frac{p}{3(1+\operatorname{tang}^2\varphi)} = 0$$

ou

$$k^2(1+\operatorname{tang}^2\varphi) + p\left(k \operatorname{tang}\varphi - \frac{1}{3}\right) = 0.$$

On voit, en prenant φ, k et p respectivement pour z_1, z_2 et z_3, qu'elle rentre dans le dernier type écrit ci-dessus lorsque l'on fait

$$f_1 \equiv \operatorname{tang}\varphi,$$
$$f_2 \equiv -\frac{1}{3}, \qquad g_2 \equiv k, \qquad h_2 \equiv \mu k^2,$$
$$f_3 \equiv -\mu p,$$

μ étant un module quelconque.

L'équation est donc représentable par les trois systèmes cotés que définissent les équations

$$(\varphi) \qquad x \operatorname{tang}\varphi - y = 0,$$
$$(k) \qquad -\frac{x}{3} + ky + \mu k^2 = 0,$$
$$(p) \qquad x^2 + y^2 - \mu p x = 0.$$

On retrouve ainsi un nomogramme auquel nous avions été conduit naguère par une autre voie ([1]).

Les droites (φ) sont faciles à construire puisque ce sont précisément les droites passant par l'origine et faisant l'angle φ avec Ox. Pratiquement, il suffit de faire varier φ de 20° à 50°.

De même, les cercles (p) sont les cercles de rayon $\frac{\mu p}{2}$, tangents en O à Oy. On fera varier p de 0,4 à 1.

Les droites (k) forment un système du second degré dans lequel la droite cotée (∞) est rejetée à l'infini puisque le coefficient de k^2 est une constante. Donc, ainsi qu'on l'a vu (Remarque finale du n° 39), ces droites déterminent sur l'une quelconque d'entre elles une échelle métrique.

Choisissons deux d'entre elles, par exemple celles qui correspondent à $k = 0$

([1]) Nous avons tenu ici à faire dériver ce nomogramme de la théorie générale, mais on l'obtient plus directement, comme nous l'avions fait précédemment (**O.4**, p. 28) par le simple mode de disjonction indiqué à la fin du n° 41, et qui consiste, l'équation ici considérée étant prise sous sa forme primitive, à y poser

$$x = \mu p \cos^2\varphi, \qquad y = \mu p \sin\varphi \cos\varphi,$$

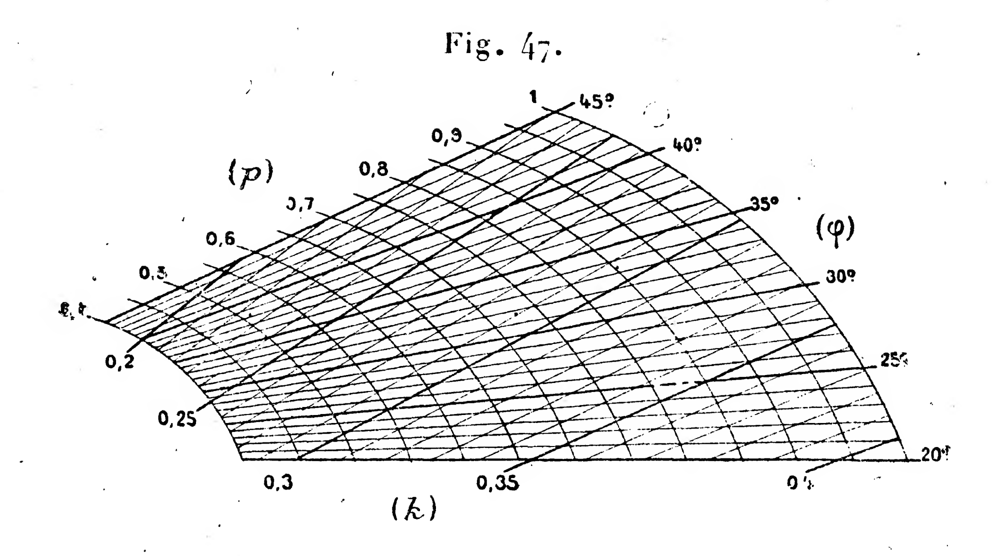
puis à éliminer successivement p et φ entre les expressions de x et y.

et $k = -\frac{1}{3}$, dont les équations sont

$$x = 0,$$
$$x + y = \frac{\mu}{3}.$$

Sur ces deux droites les autres donneront des échelles métriques, ce qui permettra de les construire très aisément lorsqu'on aura tracé celles qui correspondent aux valeurs limites de k, résultant de celles qui ont été admises pour φ et p et qui sont $k = 0,2$ et $k = 0,5$.

Fig. 47.



En limitant le nomogramme à sa partie utile, et prenant $\mu = 10^{cm}$, on obtient la figure 47 (¹). A titre d'exemple, on voit sur cette figure que, pour $\varphi = 28°$, $p = 0,65$, on a $k = 0,3$.

On peut, comme cela a été indiqué dans le premier renvoi du n° 25 pour les abaques à radiantes, se dispenser de tracer les droites (φ) en conservant seulement l'échelle qu'elles déterminent sur le cercle extérieur auquel on les a limitées sur la figure 47 (²).

47. *Représentation des équations quadratiques par droites et cercles concourants* (³). — Soit l'équation générale quadratique

(¹) La partie utile du nomogramme a été disposée dans le cadre de la figure, de façon que la droite $\varphi = 20°$ soit parallèle au bord inférieur de ce cadre. L'axe Ox, dont l'origine est d'ailleurs confondue avec le point de convergence des droites (φ), ferait donc un angle de 20° avec ce bord inférieur et en dessous de lui.

(²) On trouvera un exemple ancien de nomogramme à cercles cotés dans un *Mémoire sur les mines militaires*, du capitaine Ricour, inséré dans le *Mémorial de l'Officier du Génie* (n° 21, p. 323; 1873).

(³) Extrait de **O.29** où il est démontré, en outre, que la représentation des équations quadratiques par systèmes de cercles concourants ne saurait revêtir un caractère de plus grande généralité.

en z_1, z_2, z_3

$$(Q)\quad \begin{cases} A_1 z_1^2 + A_2 z_2^2 + A_3 z_3^2 + 2B_1 z_2 z_3 + 2B_2 z_3 z_1 + 2B_3 z_1 z_2 \\ \qquad + 2C_1 z_1 + 2C_2 z_2 + 2C_3 z_3 + D = 0. \end{cases}$$

Faisant correspondre à z_1 et z_2 respectivement les systèmes de droites

$$(z_1)\qquad m_1 x + n_1 y + z_1 = 0,$$
$$(z_2)\qquad m_2 x + n_2 y + z_2 = 0,$$

éliminons z_1 et z_2 entre les équations (z_1), (z_2) et (Q), et voyons s'il est possible de déterminer, pour les coefficients des deux premières, des valeurs *réelles*, telles que l'équation quadratique en x et y résultante représente un cercle.

Si l'on tire z_1 et z_2 des équations (z_1) et (z_2) ci-dessus pour les porter dans l'équation (Q), on obtient, en égalant entre eux les coefficients des termes en x^2 et y^2 de l'équation obtenue, et annulant celui du terme en xy, les équations

$$A_1 m_1^2 + A_2 m_2^2 + 2B_3 m_1 m_2 = A_1 n_1^2 + A_2 n_2^2 + 2B_3 n_1 n_2,$$
$$A_1 m_1 n_1 + A_2 m_2 n_2 + B_3(m_1 n_2 + m_2 n_1) = 0.$$

De la seconde, on tire

$$n_2 = -n_1 \frac{A_1 m_1 + B_3 m_2}{A_2 m_2 + B_3 m_1}.$$

Portant, dans la précédente, on trouve, après réduction,

$$n_1^2 = \frac{(A_2 m_2 + B_3 m_1)^2}{A_1 A_2 - B_3^2}.$$

Le numérateur de cette fraction étant positif, on voit que la réalité de n_1 exige

$$A_1 A_2 - B_3^2 > 0.$$

Comme on peut permuter entre eux les indices affectés aux trois variables, on voit que la condition de réalité peut s'exprimer ainsi :

Si, dans l'équation (Q), *les variables z_1, z_2 et z_3 sont considérées comme les coordonnées courantes d'un point de l'espace, il faut que la section, par l'un des plans de coordonnées, de la quadrique définie par cette équation soit du genre elliptique* ([1]).

([1]) Ce résultat comporte l'interprétation géométrique fort simple que voici, et

Supposant la condition remplie, on a

$$n_1 = \pm \frac{A_2 m_2 + B_3 m_1}{\sqrt{A_1 A_2 - B_3^2}},$$

et, de même

$$n_2 = \mp \frac{A_1 m_1 + B_3 m_2}{\sqrt{A_1 A_2 - B_3^2}}.$$

Le choix de m_1 et m_2 est libre, à cette seule réserve près qu'on ne saurait prendre à la fois $m_1 = m_2 = 0$, parce qu'alors, n_1 et n_2 étant nuls aussi, les deux faisceaux de droites (z_1) et (z_2) seraient tout entiers rejetés à l'infini.

Dès lors, m_1 *et* m_2 *étant quelconques mais non nuls à la fois*, n_1 et n_2 ayant les valeurs ci-dessus, et l'inégalité de condition étant satisfaite, on pourra représenter l'équation (Q) au moyen d'un nomogramme constitué par les systèmes de droites

$$(z_1) \qquad m_1 x + n_1 y + z_1 = 0,$$

$$(z_2) \qquad m_2 x + n_2 y + z_2 = 0,$$

et le système de cercles

$$(z_3) \quad \left\{ \begin{aligned} &(x^2+y^2)(A_1 m_1^2 + 2 B_3 m_1 m_2 + A_2 m_2^2) \\ &\quad - 2[(B_1 m_2 + B_2 m_1) z_3 + C_1 m_1 + C_2 m_2] x \\ &\quad - 2[(B_1 n_2 + B_2 n_1) z_3 + C_1 n_1 + C_2 n_2] y \\ &\quad + A_3 z_3^2 + 2 C_3 z_3 + D = 0, \end{aligned} \right.$$

cercles ayant leurs centres en ligne droite, et dont l'enveloppe est une conique.

48. *Nomogrammes polaires.* — Un nomogramme quelconque pourrait évidemment être obtenu à l'aide d'un système quelconque de coordonnées ponctuelles; il n'y a là qu'une question de plus ou moins de commodité; avec M. G. Pesci, nous appellerons *nomogrammes polaires* ceux qui sont le plus commodément définis au

---

qui nous a été communiquée par Duporcq : si, par exemple, le plan $z_3 = 0$ donne une section elliptique, considérons le cylindre ayant cette section pour base et ses génératrices parallèles à Oz_3. Soit P un plan de section circulaire de ce cylindre. Le nomogramme n'est autre que la projection cylindrique, parallèlement à Oz_3, de la quadrique sur le plan P. La conique enveloppe est le contour apparent de la quadrique.

moyen des coordonnées polaires

$$\rho = \mu_1 z_1, \qquad \omega = \mu_2 z_2,$$

de même que nous avons appelé plus haut *abaques cartésiens* ceux qui ont été définis au moyen des coordonnées cartésiennes

$$x = \mu_1 z_1, \qquad y = \mu_2 z_2.$$

Soit donc une équation

$$F_{123}(z_1, z_2, z_3) = 0,$$

que l'on représente, en posant

(z_1) $$\rho = \mu_1 z_1,$$
(z_2) $$\omega = \mu_2 z_2,$$

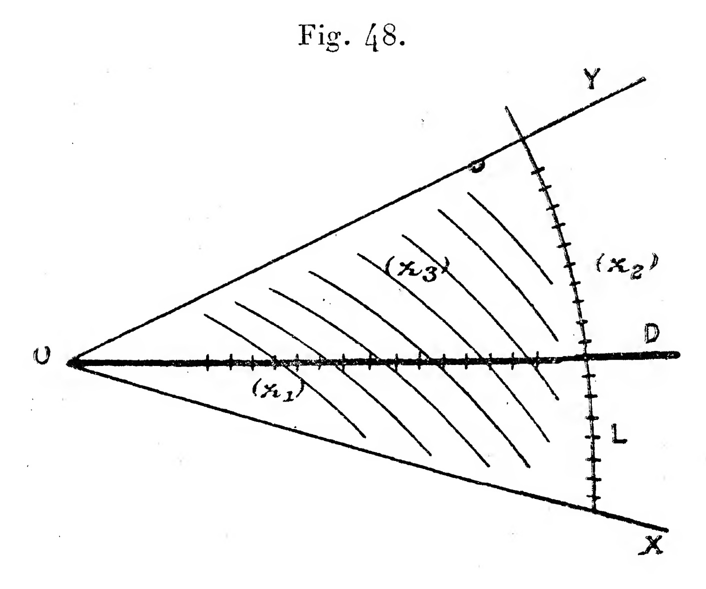
ce qui donne

(z_3) $$F_{133}\left(\frac{\rho}{\mu_1}, \frac{\omega}{\mu_2}, z_3\right) = 0.$$

Les lignes cotées (z_1) et (z_2) sont respectivement des cercles ayant leur centre à l'origine et des droites passant par cette origine.

Supposons que sur une droite D pivotant sans glisser autour de cette origine nous portions l'échelle définie par l'équation (z_1) (*fig.* 48) et que sur une ligne quelconque, de préférence un cercle

Fig. 48.



ayant son centre à l'origine, nous marquions ses points de rencontre avec les droites (z_2), munis des cotes correspondantes. Dès lors, lorsque nous amènerons la droite D à passer par le point (z_2) de la ligne L, cette droite D se confondra avec la droite (z_2). Comme,

d'autre part, dans le mouvement de pivotement de cette droite, son point (z_1) décrit le cercle (z_1), on voit que ce point (z_1) sera venu à la rencontre de la droite (z_2) et du cercle (z_1), c'est-à-dire au point même par où passe la courbe (z_3) dont on doit prendre la cote.

De là ce mode d'emploi : *La droite* D *étant amenée à passer par le point* (z_2) *de la ligne* L, *on lit la cote* z_3 *de la courbe sur laquelle tombe le point* (z_1) *de cette droite* D.

Le nomogramme permet évidemment de déterminer l'une quelconque des trois variables quand on se donne les deux autres.

Comme exemple d'un tel genre de nomogramme proposé par M. G. Pesci, nous emprunterons à cet auteur le suivant :

Soit à représenter l'équation

$$\cos(z_3 - z_2) = \frac{\cos z_3}{z_1},$$

qui se rencontre dans un problème de Navigation (1). Si l'on pose

$$(z_1) \qquad \rho = \mu z_1,$$

$$(z_2) \qquad \omega = z_2,$$

on a

$$(z_3) \qquad \rho\cos(z_3 - \omega) = \mu\cos z_3,$$

équation qui représente une droite coupant l'axe polaire à la distance μ de l'origine et faisant avec cet axe un angle égal à $z_3 - \frac{\pi}{2}$.

On obtient ainsi le nomogramme représenté par la figure 49 sur laquelle l'axe polaire a été placé dans la direction dite *verticale*.

La ligne L est ici le cercle ABC. La droite pivotante est représentée en OP, la graduation des droites issues du point O' de l'axe polaire est inscrite à leur rencontre avec un cercle DEF de centre O.

On a figuré en pointillé la position de la droite pivotante pour $z_3 = 135$ et $z_1 = 2$; le nomogramme donne $z_2 = 24°$.

Remarque. — Il va sans dire que le même artifice sera encore applicable tant que les lignes cotées (z_1) et (z_2) seront des cercles de centre O et des droites issues de O, c'est-à-dire lorsque ρ et ω seront pris égaux à des fonc-

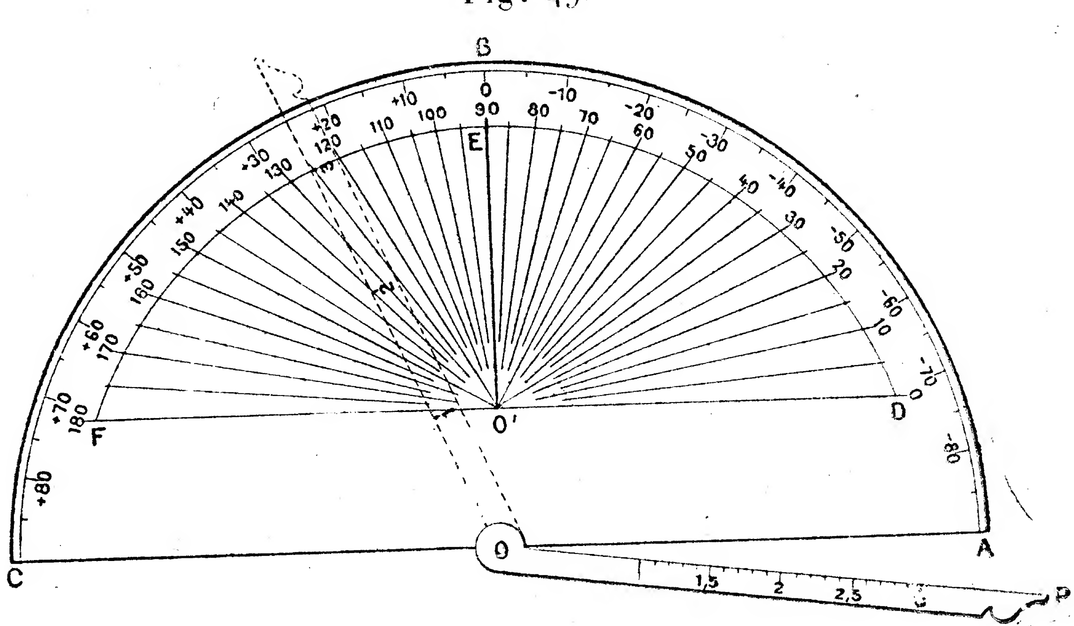
---

(1) G. PESCI, *Sui metodi per cambiare il rilevamento.....*, dans la *Rivista marit tima* (mars 1897). La formule ici envisagée est la formule (7) de ce Mémoire, dans laquelle on a fait $k = z_1$, $\varphi = z_2$, $\theta + \frac{\omega}{2} = z_3$.

tions quelconques, l'un de z_1, l'autre de z_2,

$$\rho = f_1,$$
$$\omega = f_2.$$

Fig. 49.



Les nomogrammes correspondants pourraient être dits à *anamorphose polaire*

CHAPITRE III.

REPRÉSENTATION PAR LIGNES CONCOURANTES DANS LE CAS DE PLUS DE TROIS VARIABLES.

I. — Systèmes ramifiés. Échelles multiples.

49. *Équations à quatre variables. Lignes condensées à deux cotes.* — Essayons d'abord de procéder comme nous l'avons fait au nº 16 dans le cas de trois variables : soit l'équation

$$F_{1234} = 0. \tag{1}$$

Donnons à l'une des variables, z_4 par exemple, une valeur déterminée. Nous avons alors une équation entre les trois variables z_1, z_2 et z_3, que nous pouvons représenter, ainsi que cela a été indiqué au Chapitre précédent, au moyen de trois faisceaux (z_1), (z_2), (z_3) de lignes concourantes, parmi lesquels il nous est loisible d'en choisir deux arbitrairement (nº 40); ces deux systèmes formeront d'ailleurs, le plus ordinairement, un quadrillage métrique (nº 16) ou non (nº 23), orienté parallèlement aux axes.

Lorsque nous passerons à une autre valeur de z_4, les systèmes (z_1) et (z_2) étant toujours choisis de même, seul le système (z_3) sera modifié. Or, il ne sera pas possible de faire figurer plusieurs systèmes (z_3) sur le même réseau (z_1, z_2). La coexistence de deux tels systèmes (z_3) conduirait déjà à une confusion à peu près inextricable. *A fortiori*, lorsqu'il s'agirait d'un plus grand nombre de systèmes (z_3). De là, la seule ressource, pour représenter l'équation à quatre variables de recourir à une collection de nomogrammes à trois systèmes (z_1), (z_2), (z_3) de lignes concourantes, distingués chacun par une valeur de z_4, et constituant, par conséquent, une sorte d'atlas dont les feuillets seraient numérotés au moyen des valeurs successives de z_4.

On se trouve, en somme, ici en face du même obstacle auquel se heurtent les tables numériques à plus de deux entrées.

Inutile d'insister sur le peu de commodité pratique d'une telle solu-

tion rendant pénible la détermination de z_4 prise pour inconnue (par la recherche du feuillet sur lequel les lignes correspondant aux valeurs données de z_1, z_2 et z_3 concourent en un même point), et ne pouvant absolument pas se prêter aux interpolations à vue entre les valeurs successives de z_4.

Quant à l'introduction d'une cinquième variable (et, *a fortiori*, d'un plus grand nombre), il n'y a même pas, par ce procédé, à y songer.

On pourra toutefois se tirer d'affaire, en certains cas, et recourir à une représentation sur feuille unique, lorsque se produira la circonstance que voici : supposons que *la variation de z_4 ait simplement pour effet de faire varier les cotes du système (z_3) sans modifier le tracé des lignes constituant ce système.*

Dans de telles conditions, chacune de ces lignes correspondra, en réalité, à une infinité de couples de valeurs de z_3 et z_4; nous dirons que c'est une *ligne condensée* pour cet ensemble de couples (z_3, z_4); toute la question sera d'individualiser, par un procédé graphique, dans ce système de lignes condensées (qui, au point de vue géométrique, est simplement infini), la ligne correspondant à un couple (z_3, z_4) donné.

Or, rien n'est plus aisé. Si nous représentons par ζ le paramètre, d'ailleurs quelconque, au moyen duquel nous pourrons individualiser géométriquement les lignes de ce système condensé, nous voyons que ζ sera une certaine fonction de z_3 et z_4; il nous suffira de représenter, selon ce qui a été vu au Chapitre précédent, l'équation par laquelle ζ se trouve lié à z_3 et z_4. Dès lors, à chaque ligne condensée (ζ) correspondront tous les couples (z_3, z_4) de cotes constitués par les cotes des lignes (z_3) et (z_4) se coupant deux à deux sur cette ligne (ζ) (*fig.* 50).

En remplaçant, dans chacun des types à trois variables du Chapitre précédent, le système (z_3) par un système (ζ) qui lui soit géométriquement identique mais pourvu de deux cotes (z_3, z_4), on a la représentation d'une équation à quatre variables.

Quel est le caractère analytique d'une telle équation? Il est facile de le reconnaître.

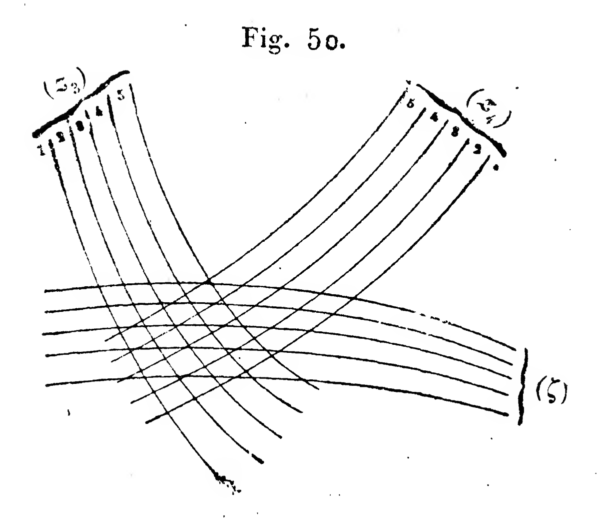
Le concours des lignes (z_1), (z_2) et (ζ) étant représentatif d'une certaine équation

$$f(z_1, z_2, \zeta) = 0,$$

et de même celui des lignes (z_3), (z_4) et (ζ), d'une autre équation,

$$g(z_1, z_2, \zeta) = 0,$$

Fig. 50.



l'accouplement de ces deux nomogrammes par un système (ζ) commun (1) équivaut à la représentation de l'équation provenant de l'élimination de ζ entre les deux précédentes. Ainsi, l'équation à quatre variables donnée devra apparaître comme le résultat de l'élimination d'une variable auxiliaire ζ entre deux équations contenant chacune, avec cette variable, deux des variables données, z_1 et z_2 d'une part, z_3 et z_4 de l'autre. Quand il en sera ainsi nous dirons que l'équation donnée est *dissociable*, et la formation des deux équations auxiliaires en ζ portera le nom de *dissociation*.

Si l'on suppose les valeurs de ζ tirées de ces équations auxiliaires, sous la forme

$$\zeta = f_{12} \quad \text{et} \quad \zeta = g_{34},$$

on voit que l'équation résultante pourra s'écrire

$$f_{12} = g_{34}.$$

Aucune équation à quatre variables, non dissociable, ne sera représentable par lignes concourantes ; et il convient de bien remarquer que, sous le rapport nomographique, c'est, en réalité, un ensemble de deux équations à trois variables qui se trouve ainsi représenté.

Or, il existe, dans les applications, de nombreuses équations à

(1) Il est clair qu'il est superflu de coter les lignes de ce système (ζ) qui ne servent qu'à établir un lien graphique entre l'ensemble des systèmes (z_1) et (z_2) et celui des systèmes (z_3) et (z_4).

quatre variables que l'on a à représenter et qui ne sont pas ainsi dissociables ([1]). Nous le disons dès maintenant pour faire pressentir l'intérêt d'autres modes de représentation que nous étudierons plus tard ([2]) et qui échappent à cette sujétion. Pour le moment, contentons-nous d'étudier plus à fond ce mode généralisé d'utilisation des lignes concourantes.

Remarque. — Si l'on coupe les lignes (ζ) par une ligne L quelconque, chacun des points d'intersection pourra être considéré comme affecté de tous les couples de cotes définis pour la ligne ζ correspondante, par le concours de deux lignes (z_3) et (z_4) sur cette ligne ζ. On a ainsi la notion des *points condensés à deux cotes* situés sur la ligne L.

50. *Échelles binaires.* — Les systèmes de lignes condensées à deux cotes les plus fréquents sont ceux qui sont constitués par des droites parallèles. Considérons un tel système (Δ) (*fig.* 51) et rapportons-le à deux axes rectangulaires, l'un Ox perpendiculaire, l'autre Oy parallèle à sa direction.

Rapportées à ces deux axes, les courbes (z_1) et (z_2) du réseau ont des équations telles que

$$f_1(x, y, z_1) = 0, \tag{1}$$

$$f_2(x, y, z_2) = 0, \tag{2}$$

([1]) Si l'on fait usage de la notation simplifiée $\frac{D(f, g)}{D(z_1, z_2)}$ pour le jacobien de deux fonctions f et g des variables indépendantes z_1 et z_2, dont l'expression est

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_1} & \frac{\partial g}{\partial z_1} \\ \frac{\partial f}{\partial z_2} & \frac{\partial g}{\partial z_2} \end{vmatrix},$$

la condition, trouvée par M. Goursat (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXVII, p. 27) pour que l'équation à quatre variables $F = 0$ puisse être mise sous la forme $f_{12} = g_{34}$ est que l'on ait identiquement

$$\frac{\partial F}{\partial z_4} \cdot \frac{D\left(F, \frac{\partial F}{\partial z_3}\right)}{D(z_1, z_2)} = \frac{\partial F}{\partial z_3} \cdot \frac{D\left(F, \frac{\partial F}{\partial z_4}\right)}{D(z_1, z_2)}.$$

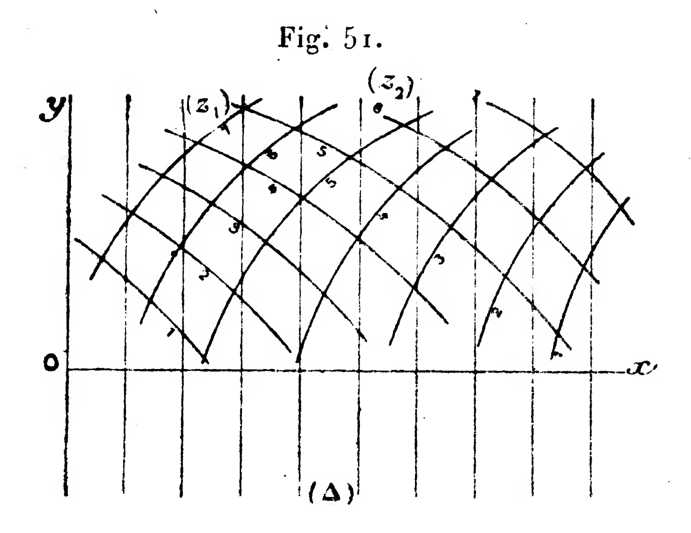
([2]) *Voir* notamment n° 101.

et l'équation de la droite Δ passant par le point de rencontre de ces courbes, obtenue par élimination de y entre (1) et (2), sera

$$x = f_{12}. \tag{3}$$

Ainsi le système (Δ) donne sur Ox les valeurs de la fonction f_{12}. Pour cette raison, l'ensemble qui vient d'être défini peut être dit

Fig. 51.



l'*échelle binaire de la fonction f_{12} le long de* Ox, suivant la terminologie de M. Lallemand ([1]).

Réciproquement, étant donnée la fonction f_{12}, on peut se proposer de construire pour elle une échelle binaire. Il suffira pour cela de se donner une des deux premières équations, (1) par exemple. L'équation (2) résultera alors de l'élimination de z_1 entre (1) et (3).

On reconnaît là un cas particulier du principe du n° 40.

Il va sans dire que, dans chaque cas particulier, la fonction f_{12} étant donnée, on choisira l'équation (1) en vue de la plus grande simplicité de construction possible. On s'attachera notamment, chaque fois que faire se pourra, à n'avoir à tracer que des droites. Si, par exemple, la fonction f_{12} est de la forme

$$f_{12} = g_1 g_2 + h_2,$$

on prendra pour équation (3)

$$x = \mu(y_1 g_2 + h_2), \tag{3$_1$}$$

([1]) M. Lallemand qui, dans son Mémoire autographié sur les abaques hexagonaux, semble avoir, pour la première fois, fait un usage systématique des échelles binaires, déclare, dans la Note préliminaire de ce Mémoire (p. 7), être redevable de leur idée première à M. Prévot, alors chef de bureau et maintenant ingénieur au Service du Nivellement général de la France.

μ étant un module quelconque, puis pour équation (1)

$$(1_1) \qquad y_1 = \mu' g_1,$$

μ' étant un autre module, parce qu'alors l'équation (2) sera

$$(2_1) \qquad \mu' x = \mu g_2 y + \mu\mu' h_2$$

qui représente des droites.

Remarque I. — Les parallèles Δ pourront, dans tous les cas, être tracées équidistantes, mais on aura aussi la possibilité de les remplacer, ainsi que cela a déjà été vu au n° 13, par un index mobile maintenu dans une direction parallèle à la leur. Dans ce cas, c'est l'ensemble des courbes (z_1) et (z_2) qui sera dit *l'échelle binaire de la fonction f_{12} le long de Ox.*

Remarque II. — On peut, pour la plus grande commodité du dessin, déplacer comme on veut l'échelle binaire dans la direction des droites Δ puisque, dans un tel déplacement, les points du réseau qui sont primitivement sur une certaine droite Δ ne cessent pas de s'y trouver.

Remarque III. — L'échelle binaire (z_1, z_2) étant accolée à l'axe Ox, les points de cet axe peuvent être considérés comme des points condensés à deux cotes z_1 et z_2, les couples de cotes de chacun d'eux étant ceux afférents à la parallèle à Oy passant en ce point.

Remarque IV. — Le plus souvent, l'échelle binaire de la fonction f_{12} accolée à Ox,

$$x = \mu f_{12},$$

sera constituée par des parallèles à cet axe, cotées au moyen des valeurs de z_1,

$$(z_1) \qquad y = \mu' z_1$$

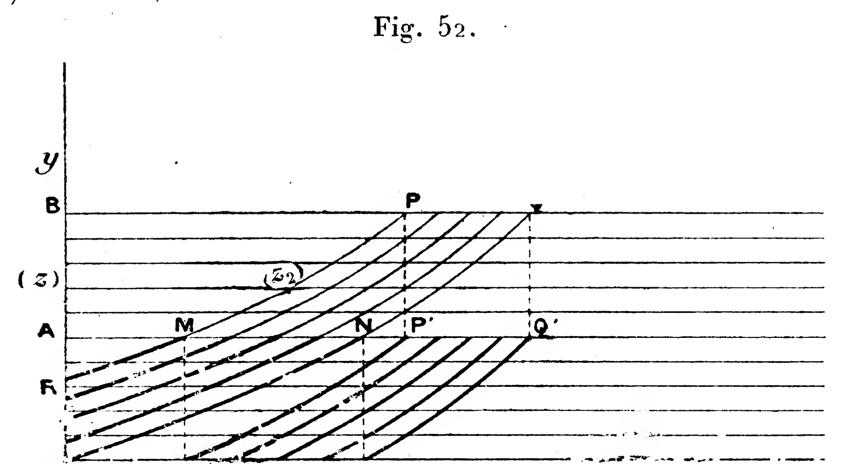
et par les courbes (z_2) dont l'équation est

$$(z_2) \qquad x = \mu f_{12}\left(\frac{y}{\mu'}, z_2\right).$$

Supposons que les nécessités de l'application pratique que l'on a

en vue exigent que ces courbes soient construites jusqu'à la parallèle PQ à Ox (*fig.* 52) correspondant à la valeur limite de z_1 (cote du point B).

Fig. 52.



Puisqu'on est libre de déplacer une échelle binaire dans le sens perpendiculaire à Ox (*Rem. II*), on pourra, par exemple, en coupant l'échelle le long de l'horizontale du point A, milieu de OB, amener la partie supérieure de l'échelle à se superposer, par une translation parallèle à Oy, à la partie inférieure. Dans ce déplacement, la portion du système (z_2) comprise à l'intérieur de MNPQ vient en M'N'P'Q' et les horizontales comprises entre A et B viennent coïncider respectivement avec celles qui se trouvent entre O et A. Seulement, comme elles conservent leurs cotes, chacune des horizontales de O à A présentera, sur l'échelle binaire définitive, deux cotes distinctes, l'une se référant aux points situés à l'intérieur de ORMN, l'autre aux points situés à l'intérieur de M'N'P'Q'.

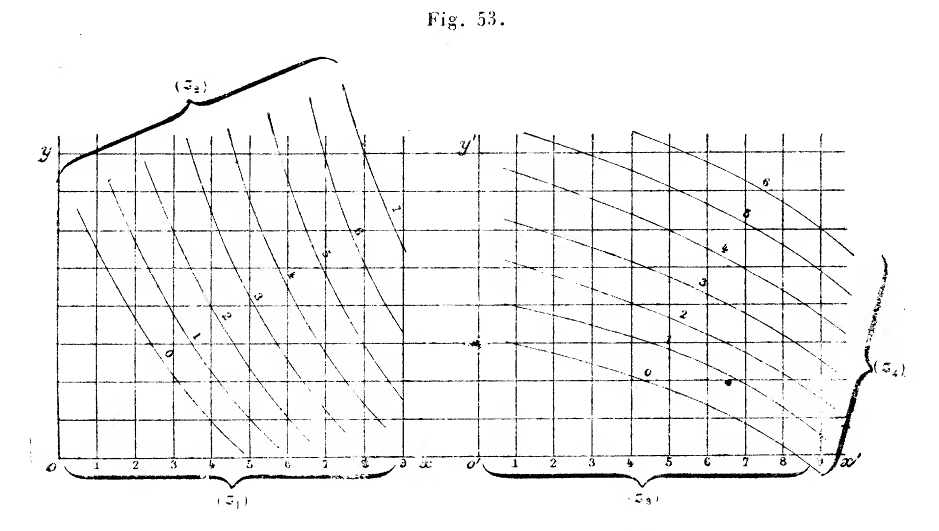
L'exemple donné plus loin (n° 51, 2°) éclaircira ce point. C'est d'ailleurs à cet exemple, dû à M. Chancel, que nous avons emprunté l'artifice qui vient d'être indiqué.

51. *Représentation d'équations à quatre variables par échelles binaires accolées.* — En reprenant chacun des modes de représentation étudiés dans les Chapitres précédents et y remplaçant les éléments, points ou lignes, à une cote qui y interviennent par des éléments de même nature, mais condensés à deux cotes, on obtient de nouveaux modes de représentation pour lesquels le nombre des variables est doublé.

Par exemple, les échelles accolées (n° 9), lorsqu'on les suppose

binaires, fournissent le type représenté par la figure 53, où les deux échelles binaires, accolées par l'axe Oy, ont été écartées l'une de l'autre dans le sens perpendiculaire à cet axe (¹).

Fig. 53.



On voit immédiatement que le même type d'abaque serait obtenu si l'on partait de celui des abaques cartésiens à trois variables (n° **16**) et que l'on y munît les parallèles à Ox de deux cotes au moyen d'une échelle binaire.

L'échelle binaire de gauche donnant

$$y = f_{12}$$

et celle de droite

$$y = g_{34},$$

(¹) Bien des auteurs ont, indépendamment les uns des autres, eu recours à l'emploi d'échelles binaires accolées en vue d'applications particulières. Cet emploi se trouve indiqué, sous sa forme générale, dans le travail de M. Lallemand sur les abaques hexagonaux où cet auteur le présente comme dérivant de ce qu'il appelle le principe de l'élimination graphique et qui consiste à relier deux abaques à trois variables par un système commun de courbes cotées.

Dans la déclaration déjà citée (renvoi du n° 50) de la Note préliminaire de son Mémoire, il fait savoir que c'est M. Renard, agent du Service du Nivellement général de la France, qui lui en a suggéré l'idée. Celle-ci avait d'ailleurs été antérieurement émise, et sous une forme plus générale, par Massau, dans son Mémoire déjà plusieurs fois cité *Sur l'intégration graphique* (Livre III, Chap. III, § I, n° 183).

on voit que l'équation représentée est de la forme

$$f_{12} = g_{34}.$$

C'est, comme on l'a vu au n° 49, le type le plus général d'équation à quatre variables représentable par lignes concourantes.

Le mode d'emploi d'un tel abaque est fort simple. Si, par exemple, connaissant z_1, z_2 et z_3, on veut avoir z_4, on n'a qu'à suivre l'horizontale passant par le point de rencontre de la verticale z_1 et de la courbe z_2 jusqu'à la verticale z_3. La courbe passant par ce nouveau point a pour cote z_4.

Exemples (¹) : 1° *Annuités.* — Si l'on représente par
A le montant d'un emprunt,
n la durée en années de l'amortissement,
t le taux de l'intérêt,
a le montant de l'annuité,

on a

$$\frac{a}{A} = \frac{\frac{t}{100}}{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n}}.$$

Cette équation est représentable par l'accolement, le long de Ox par exemple, de deux échelles binaires faisant correspondre l'une et l'autre à la valeur commune ζ des deux membres de l'équation les droites

$$x = \mu \zeta,$$

et constituées, l'une par les droites cotées

(a) $$y = \mu' a,$$

(A) $$y = A x \frac{\mu'}{\mu},$$

l'autre par les lignes cotées

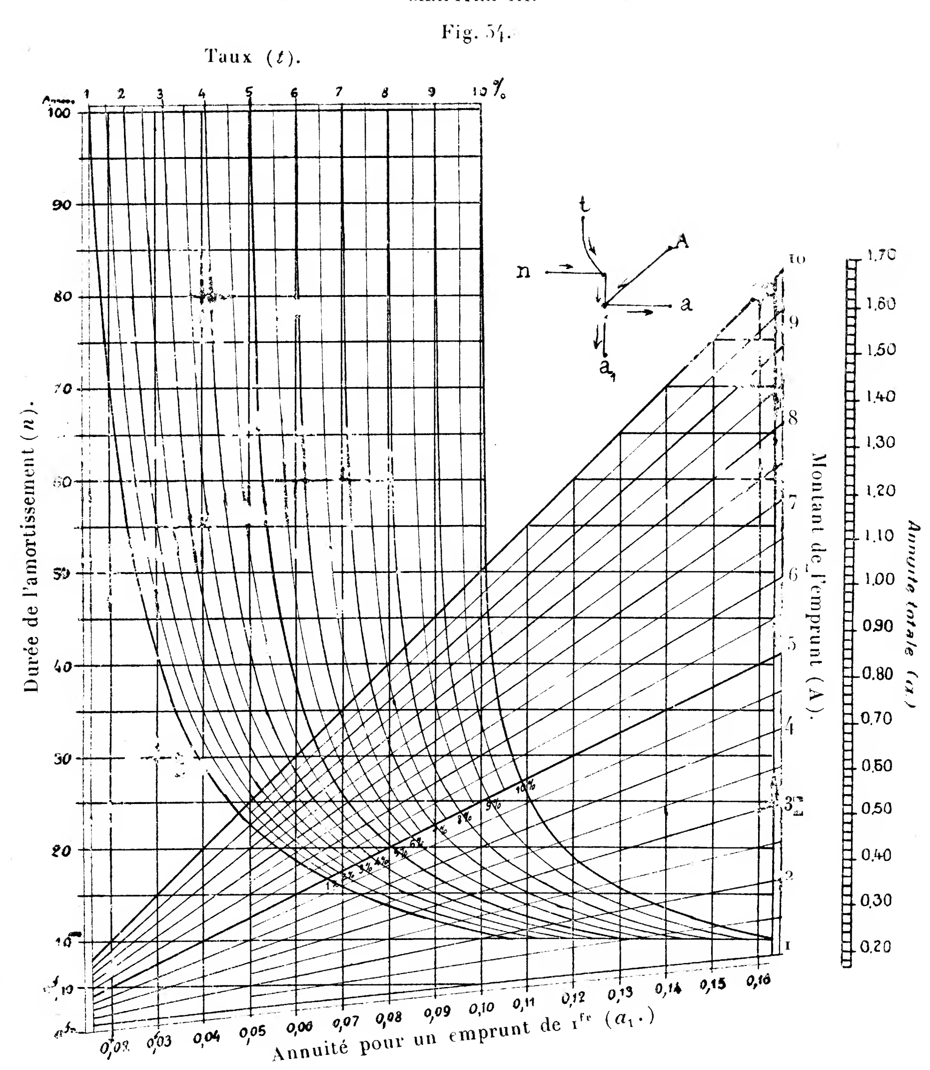
(n) $$y = \mu'' n,$$

(t) $$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^y = \left(\frac{x}{x - \frac{\mu t}{100}}\right)^{\mu''},$$

μ, μ' et μ'' étant des modules quelconques.

(¹) On trouvera d'autres exemples pratiques dans l'intéressant travail de M. Duplaix intitulé : *Abaques des efforts tranchants et des moments de flexion développés dans les poutres à une travée par les surcharges du Règlement du* 29 *août* 1891 *pour les ponts métalliques* (Paris, Carré et Naud; 1899).

Fig. 54.



Le nomogramme ainsi obtenu (¹), qui a été construit par M. Prévot, est représenté par la figure 54.

(¹) Pour donner le degré d'approximation requis par les calculs de banque, ce nomogramme devrait être construit sous des dimensions qui rendraient son emploi impraticable. Tel quel, il permet d'obtenir un résultat approché pouvant être utile lorsqu'on veut se faire une première idée d'une opération projetée.

Le mode d'emploi est rappelé par le croquis placé dans l'angle supérieur de droite.

La formule de la première échelle binaire

$$x = \mu\zeta = \mu\frac{a}{A}$$

montre que les abscisses font connaître dans chaque cas l'annuité $a_1 = \frac{a}{A}$ pour un emprunt de 1 franc. La graduation correspondante a été inscrite à la partie inférieure du nomogramme.

2° *Formule de jauge de l'Union des Yachts français.* — Cette formule est

$$T = \frac{\left(Lp - \frac{p_2}{4}\right)\sqrt{s}}{130},$$

où T représente le tonnage de course,
p le périmètre,
L la longueur de flottaison,
s la surface de voilure.

Elle peut s'écrire

$$\frac{13\,T}{\sqrt{s}} = \frac{Lp - \frac{p_2}{4}}{10}.$$

On voit dès lors qu'elle pourra être représentée par l'accolement, le long de Ox, des échelles binaires définies par

$$x = \mu\frac{13\,T}{\sqrt{s}} \qquad \text{et} \qquad x = \mu\frac{Lp - \frac{p^2}{4}}{10},$$

μ étant un module quelconque.

Si l'on représente par μ' et μ'' d'autres modules, la première sera constituée par les droites cotées

$$(T) \qquad y = \mu' T, \qquad\qquad (s) \qquad y = x\frac{\mu'\sqrt{s}}{13\,\mu},$$

la seconde par

$$(L) \qquad y = \mu'' L, \qquad\qquad (p) \qquad 10\frac{x}{\mu} = \frac{p}{\mu''}y - \frac{p^2}{4}.$$

Ce dernier système de droites cotées du second degré rentre dans un type précédemment étudié (n° 39).

Le nomogramme correspondant, construit par M. Chancel (¹) avec les modules

$$\mu = \mu' = 6^{\text{mm}},25, \qquad \mu'' = 2\mu = 12^{\text{mm}},5,$$

et que reproduit la figure 55, présente plusieurs particularités intéressantes.

Les deux échelles binaires ont été accolées de façon que le point o de l'échelle (T) corresponde au point 16 de l'échelle (L).

En outre, les droites parallèles à Ox correspondantes n'ont été tracées qu'à des intervalles assez grands pour ne pas embrouiller la figure. Aux parallèles non tracées, on a substitué, ainsi que cela a été indiqué d'une manière générale au n° **14**, un transparent portant d'une part des parallèles que l'on fait glisser sur celles du nomogramme, de l'autre un axe perpendiculaire à leur direction et portant les graduations (T) et (L).

L'emploi du nomogramme peut alors s'énoncer ainsi: *le bord inférieur du transparent étant appliqué sur le bord inférieur du cadre, on fait glisser ce transparent jusqu'à ce que le point coté* L *de son échelle mobile se trouve sur la droite cotée p. La cote du point de l'échelle mobile qui se trouve alors sur la droite cotée s fait connaître le tonnage* T.

Sur la figure 55, on a dessiné la position de l'échelle mobile pour l'exemple numérique

$$L = 12^{\text{m}},80, \qquad p = 13^{\text{m}},80, \qquad s = 210^{\text{m}^2}.$$

Cette position est définie par la condition que le point $L = 12,8$ se trouve sur la droite $p = 13,8$. On voit que la droite $s = 210$, qui appartient au faisceau (s) inférieur, passe alors par le point

$$T = 14,4,$$

dont la cote est la valeur du tonnage cherché.

D'autre part, le périmètre p variant dans le même sens que la longueur L, on a limité chaque droite (p) à la portion qui correspond aux valeurs de L qui peuvent lui être jointes. C'est là ce qui produit ces sortes de gradins qu'on observe sur la figure 55.

L'échelle binaire (s, T) a été fractionnée (Remarque IV du n° **50**) à la ligne $T = 16$, la seconde partie du système (s) étant remontée à la ligne $T = 0$. Si donc on a affaire à un point d'une ligne (s), pris dans le faisceau supérieur, l'horizontale T passant en ce point a pour cote la valeur de T, lue sur l'échelle de droite, *augmentée de* 16.

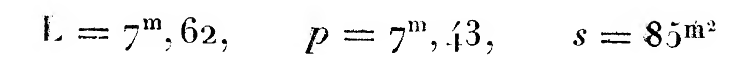
Enfin, la forme de l'équation représentée montre qu'on peut appliquer le principe des multiplicateurs correspondants (n° **20**) en posant

$$L' = \lambda_1 L, \qquad p' = \lambda_1 p, \qquad s' = \lambda_2^2 s, \qquad T' = \lambda_1^2 \lambda_2 T.$$

(¹) *Étude et graphique de la formule de jauge de l'Union des Yachts français* Grenoble; 1894.

Voici un exemple numérique emprunté à l'auteur :

Les données sont



$$L = 7^{m},62, \qquad p = 7^{m},43, \qquad s = 85^{m^2}$$

Fig. 55.

Pour avoir des nombres rentrant dans les limites de la graduation, prenons les multiplicateurs

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 2.$$

Nous avons ainsi

$$L' = 15,24, \qquad p' = 14,86, \qquad s' = 340.$$

L'horizontale $L' = 15,24$ rencontre la droite $p' = 14,86$ en un point dont la verticale coupe la droite $s' = 340$ du faisceau ***supérieur*** sur l'horizontale $T' = 8,3$. On doit donc, d'après ce qui vient d'être vu, et puisqu'on se trouve ici dans le faisceau supérieur, ajouter 16 à la valeur lue et prendre

$$T' = 24,3.$$

Donc

$$T = \frac{24,3}{8} = 3,04.$$

3° *Résolution des triangles rectilignes dont un angle au moins est connu.* — Si α_1, α_2, α_3 représentent les angles d'un triangle quelconque, γ_1, γ_2, γ_3 les côtés opposés, on peut résoudre tous les cas pour lesquels un angle figure parmi les éléments connus au moyen de la formule facile à démontrer

$$\text{(1)} \qquad \frac{\operatorname{tang} \frac{\alpha_1}{2}}{\operatorname{tang}\left[\pi - \left(\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{2}\right)\right]} = \frac{\gamma_2 - \gamma_3}{\gamma_2 + \gamma_3},$$

dans laquelle on prendra toujours pour γ_2 le plus grand des côtés donnés, lorsqu'on lui adjoint

$$\text{(2)} \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi.$$

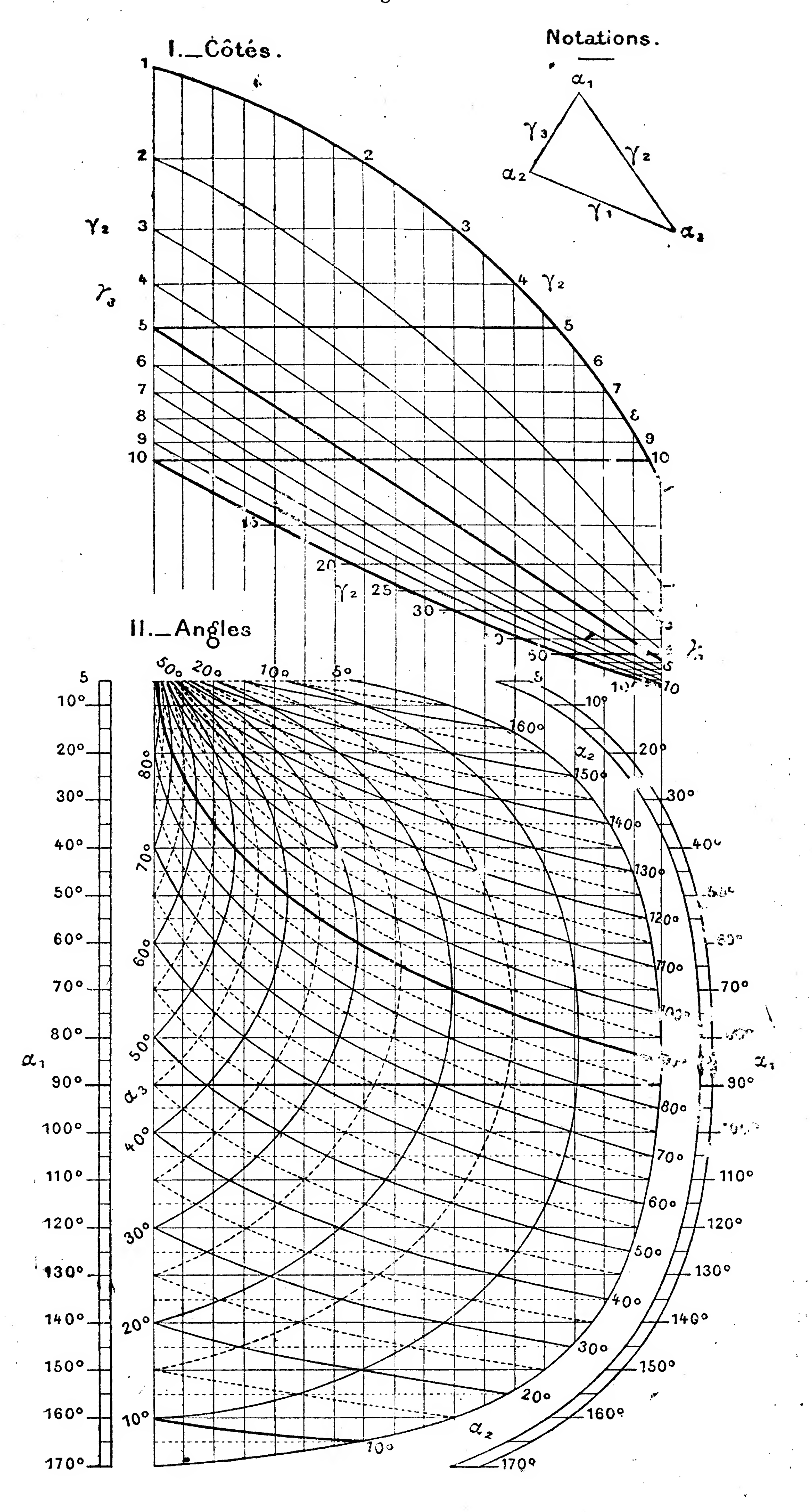
Les quatre cas à considérer peuvent se résumer ainsi :

	Données.	Inconnues.
Premier cas..................	a, B, C	A, b, c
Deuxième cas................	b, B, C	A, a, c
Troisième cas................	a, b, C	A, B, c
Quatrième cas...............	a, b, A	B, C, c

Les formules précédentes permettent de les résoudre, grâce aux identifications suivantes :

1[er] *cas :*	Pour	$\alpha_1 \equiv B$,	$\alpha_2 \equiv C$,		(2)	donne	$\alpha_3 \equiv A$.
	»	$\alpha_2 \equiv B$,	$\alpha_1 \equiv C$,	$\gamma_3 \equiv a$,	(1)	»	$\gamma_2 \equiv b$,
	»	$\alpha_2 \equiv C$,	$\alpha_1 \equiv B$,	$\gamma_3 \equiv a$,	(1)	»	$\gamma_2 \equiv c$.
2[e] *cas :*	Pour	$\alpha_1 \equiv B$,	$\alpha_2 \equiv C$,		(2)	»	$\alpha_3 \equiv A$,
	»	$\alpha_1 \equiv C$,	$\alpha_2 \equiv B$,	$\gamma_2 \equiv b$,	(1)	»	$\gamma_3 \equiv a$,
	»	$\alpha_1 \equiv A$,	$\alpha_2 \equiv B$,	$\gamma_2 \equiv b$,	(1)	»	$\gamma_3 \equiv c$.
3[e] *cas :*	Pour	$\alpha_1 \equiv C$,	$\gamma_2 \equiv a$,	$\gamma_3 \equiv b$,	(1)	»	$\alpha_2 \equiv A$,
	»	$\alpha_1 \equiv C$,	$\alpha_2 \equiv A$,		(2)	»	$\alpha_3 \equiv B$.
	»	$\alpha_1 \equiv B$,	$\alpha_2 \equiv A$,	$\gamma_2 \equiv a$,	(1)	»	$\gamma_3 \equiv c$.
4[e] *cas :*	Pour	$\alpha_2 \equiv A$,	$\gamma_2 \equiv a$,	$\gamma_3 \equiv b$,	(1)	»	$\alpha_1 \equiv C$.
	»	$\alpha_1 \equiv c$,	$\alpha_2 \equiv A$,		(2)	»	$\alpha_3 \equiv B$.
	»	$\alpha_1 \equiv A$,	$\alpha_2 \equiv C$,	$\gamma_3 \equiv b$,	(1)	»	$\gamma_2 \equiv c$.

Fig. 56.



Le nomogramme à échelles accolées construit pour l'équation (1) ci-dessus par M. Lallemand est représenté par la figure 56.

En vue d'une plus grande netteté, ce nomogramme a d'ailleurs subi l'anamorphose graphique qui a précisément servi d'exemple au n° 28 (¹).

Ici les deux échelles accolées sont placées l'une au-dessus de l'autre, la première étant constituée par les horizontales (γ_2) et les courbes (γ_3), la seconde par les horizontales (α_1) et les courbes (α_2). De l'une à l'autre, les points se correspondent sur les verticales.

Quant au nomogramme de l'équation (2), il a été superposé à l'échelle inférieure. Il a suffi, comme cela a été expliqué au n° 36, de joindre entre eux les points du réseau formé par les courbes (α_1) et (α_2) pour lesquels la somme $\alpha_1 + \alpha_2$ était égale au supplément d'une certaine valeur de α_3 pour avoir la courbe α_3 correspondante et obtenir ainsi le système (α_3).

Comme exemple numérique, plaçons-nous dans le troisième cas en nous donnant

$$a = 70^{m}, \qquad b = 43^{m}, \qquad C = 60^{o}.$$

Pour rester dans les limites de nos graduations, nous diviserons par 10 la longueur de chaque côté. Dès lors, l'horizontale $\gamma_2 = 7$ et la courbe $\gamma_3 = 4,3$ de l'échelle supérieure se coupant en un point, suivons la verticale de ce point jusqu'à l'horizontale $\alpha_1 = 60^{o}$ de l'échelle inférieure. Par le point ainsi obtenu passent les courbes $\alpha_2 = 82^{o}$ et $\alpha_3 = 38^{o}$; donc

$$A = 82^{o} \qquad \text{et} \qquad B = 38^{o}.$$

Puis, si du point de rencontre de l'horizontale $\alpha_1 = 38^{o}$ et de la courbe $\alpha_2 = 82^{o}$, nous remontons par une verticale à l'échelle supérieure, nous obtenons sur l'horizontale $\gamma_2 = 7$ un point par lequel passe la courbe $\gamma_3 = 6,1$; donc

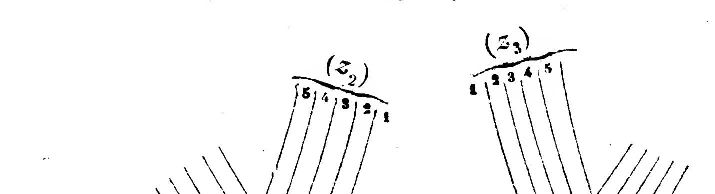
$$c = 61^{m}.$$

32. *Éléments condensés à n cotes. Échelles multiples.* — On vient de voir (n° 49) comment on pouvait définir des éléments condensés, lignes ou points, à deux cotes, au moyen d'un réseau constitué par deux systèmes de lignes à une cote. Rien n'empêche de munir à son tour l'un de ces deux systèmes, ou même les deux, d'un réseau de doubles cotes, et de continuer de même pour les systèmes constituant les nouveaux réseaux introduits. La répétition de cette opération permet, comme on voit, de multiplier autant qu'on le veut, théoriquement du moins, le nombre des cotes afférentes à un système quelconque d'éléments donnés.

(¹) La figure 40 n'est autre que l'indication de l'anamorphose graphique qui a fourni l'échelle supérieure de la figure 56.

La figure 57 donne, par exemple, la représentation schématique d'un système de courbes C à quatre cotes z_1, z_2, z_3, z_4. La courbe C

Fig. 57.



correspondant à un système de valeurs des quatre variables est celle qui passe par le point de rencontre de la courbe (z_1, z_2) et de la courbe (z_3, z_4). Et l'on voit que, si la courbe C est connue ainsi que trois de ses cotes, la quatrième s'en déduit immédiatement.

Dans le cas où les courbes C deviennent des droites parallèles, ces droites déterminent, sur un axe quelconque perpendiculaire à leur direction, une échelle dont les divers segments, comptés à partir d'une origine arbitrairement choisie, se trouvent être fonctions des cotes afférentes à ces parallèles. On obtient ainsi des *échelles multiples*, dont l'idée, sous la forme particulière indiquée ci-après, est due à M. Lallemand.

Considérons un système de parallèles à Oy tracées à travers un réseau (z_1, z_2) (*fig.* 58), c'est-à-dire définies par une équation de la forme

$$x = f_{12},$$

et un système de radiantes issues de l'origine, et tracées à travers un réseau (z_3, z_4), c'est-à-dire définies par une équation de la forme

$$y = x f_{34}.$$

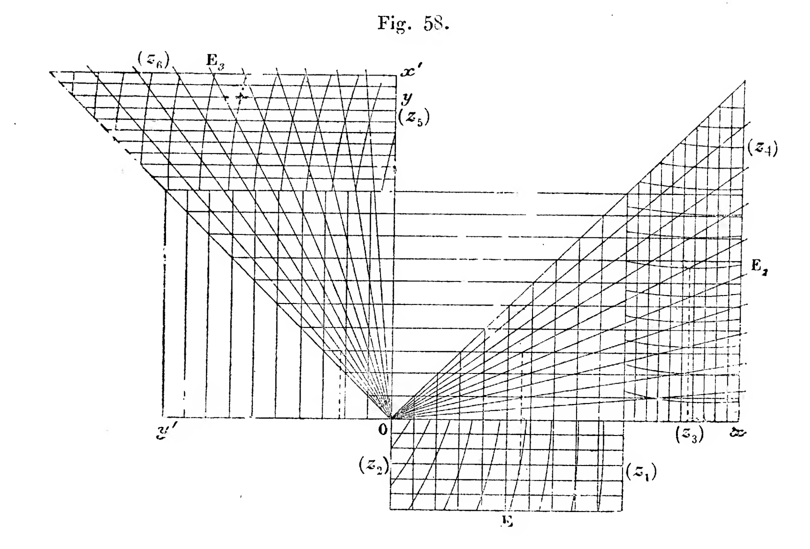
On aura, dès lors, pour les parallèles à Ox passant par les points de rencontre des droites des deux premiers systèmes, l'équation

$$y = f_{12} f_{34}.$$

Ces parallèles donneront donc sur Oy une échelle multiple, celle de la fonction de quatre variables dont l'expression est fournie par la dernière formule.

Faisant coïncider de même l'axe Ox' d'un nouveau système de

Fig. 58.



radiantes à deux cotes z_5 et z_6 avec l'axe Oy de l'échelle précédente, on voit qu'on obtient, pour les parallèles à cet axe, une équation de la forme

$$y' = f_{12} f_{34} f_{56},$$

et ainsi de suite.

Si, au lieu de radiantes issues de l'origine, on avait, sur le réseau (z_3, z_4), tracé des droites appartenant à un système simplement infini quelconque, leur équation eût été de la forme

$$y = x f_{34} + g_{34}$$

et l'échelle multiple le long de Oy aurait représenté une fonction de la forme

$$y = f_{12} f_{34} + g_{34}.$$

Il est inutile d'insister davantage sur ce sujet. On trouvera plus loin (n° 56) un exemple, dû à M. Lallemand, de l'emploi de ces échelles multiples.

Il y a lieu toutefois de remarquer le caractère très spécial des équa-

tions ainsi représentées. Supposons, pour fixer les idées, que les courbes C de la figure 57 concourent, sur un nomogramme, avec des lignes cotées (z_5) et (z_6). On se trouvera avoir ainsi représenter une équation à six variables, mais, en réalité, qu'a-t-on fait? Désignons par ζ_1, ζ_2, ζ_3 les paramètres dont dépendent, dans les systèmes simplement infinis auxquels elles appartiennent respectivement, les lignes condensées (z_1, z_2), (z_3, z_4) et C. Les divers concours de lignes intervenant dans le nomogramme s'exprimeront respectivement par des équations telles que

$$f(z_1, z_2, \zeta_1) = 0, \quad g(z_3, z_4, \zeta_2) = 0, \quad h(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = 0, \quad j(\zeta_3, z_5, z_6) = 0.$$

Par conséquent, l'équation à six variables, représentée par ces systèmes ramifiés, n'est autre que celle qui provient de l'élimination de ζ_1, ζ_2, ζ_3 entre les quatre équations précédentes. Étendant à ce cas la définition donnée au n° 49, nous dirons que l'équation à six variables donnée est dissociée en ces quatre équations.

La généralisation est évidente. Une équation à n variables ne pourra être ainsi représentée par systèmes ramifiés que si, moyennant l'introduction de $n-3$ variables auxiliaires, elle peut être dissociée en $n-2$ équations ne renfermant chacune que trois variables prises parmi les n variables données et les $n-3$ variables auxiliaires, chacune de ces équations renfermant au moins une des variables auxiliaires.

Le nomogramme total comprendra donc en tout $2n-3$ systèmes simplement infinis de lignes, dont n cotés au moyen des valeurs des variables z_1, z_2, ..., z_n données, et $n-3$ non cotés correspondant aux variables auxiliaires et que nous appellerons les *systèmes de liaison*.

Remarquons, en outre, que, puisque nous pouvons disposer de la nature géométrique de deux des trois systèmes servant à représenter une équation à trois variables, nous pourrons, dans ce système ramifié, provenant de l'enchaînement de $n-2$ nomogrammes à trois systèmes de lignes concourantes, choisir arbitrairement la nature géométrique de $n-1$ de ces systèmes, sous cette réserve toutefois que, lorsque, dans un de ces nomogrammes partiels, deux des systèmes sont déterminés, le troisième s'en déduit.

Pour fixer les idées sur ce dernier point, reprenons l'exemple ci-dessus : dans la représentation de $f = 0$, nous pourrons choisir les

systèmes (z_1) et (ζ_1), d'où (z_2) se déduira; passant à l'équation $h = 0$, (ζ_1) étant déjà déterminé, on pourra encore se donner (ζ_2), et (ζ_3) s'en déduira; enfin, pour les équations $g = 0$, et $j = 0$, on pourra se donner encore arbitrairement (z_3) d'une part, (z_5) de l'autre; (z_4) et (z_6) s'en déduiront.

II. — Abaques hexagonaux à échelles multiples.

53. *Abaques hexagonaux à glissement.* — C'est précisément à propos des abaques hexagonaux que M. Lallemand a mis en œuvre pour la première fois, sous forme systématique, l'idée des échelles binaires et, plus généralement, des échelles multiples dont il vient d'être question.

En premier lieu, on peut remplacer les échelles simples d'un abaque hexagonal par des échelles binaires susceptibles de prendre elles-mêmes la forme d'un abaque hexagonal, et ainsi de suite, de proche en proche. Cela conduit à un dispositif dont la description peut se faire comme suit :

$f_1, f_2, f_3, \ldots$ étant des fonctions de chacune des variables z_1, z_2, z_3, ... soumises au calcul, ζ_3, ζ_4, ζ_5, ... des variables auxiliaires, considérons les équations de dissociation (n° 52) :

(1) $$f_1 + f_2 = \zeta_3,$$
(2) $$f_3 + \zeta_3 = \zeta_4.$$
(3) $$f_4 + \zeta_4 = \zeta_5,$$
(4) $$f_5 + \zeta_5 = \zeta_5,$$
... $$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$(n-2)$ $$f_{n-1} + \zeta_{n-1} = \zeta_n.$$

Nous pourrons représenter ces diverses équations par des abaques hexagonaux définis par les mêmes axes Ox, Oy et Ot, en ayant soin d'écarter les unes des autres les échelles parallèles à un même axe par application de ce qui a été vu au n° 11, c'est-à-dire en alignant les origines de ces échelles sur une perpendiculaire à leur direction commune menée par l'origine O.

Nous définirons, d'ailleurs, les échelles des divers abaques par les formules (où, pour plus de simplicité, nous faisons le module μ

égal à 1) :

(I)	$x = f_1,$	$y = \ \ f_2,$	$t = \zeta_3;$
(II)	$x = \zeta_4,$	$y = -f_3,$	$t = \zeta_3,$
(III)	$x = \zeta_4.$	$y = \ \ f_4,$	$t = \zeta_5,$
(IV)	$x = \zeta_6.$	$y = -f_5;$	$t = \zeta_5.$
....	......,	.........,	......

Suivant que n sera pair ou impair, les formules relatives au dernier abaque seront :

(N — II) $\quad x = \zeta_n, \quad y = -f_{n-1}, \quad t = \sigma_{n-1}$

ou

(N — II)′ $\quad x = \zeta_{n-1}, \quad y = f_{n-1} \quad t = \sigma_n.$

On voit que les abaques des équations (k) et ($k+1$) ont en commun l'échelle de Ot si k est impair, celle de Ox si k est pair. Par conséquent, *pour faire passer le transparent de sa position sur l'abaque de rang* (k) *à sa position sur l'abaque de rang* ($k+1$), *il suffit, en maintenant son orientation, de le faire glisser perpendiculairement à* Ot, *c'est-à-dire dans la direction de l'index* I_3, *si k est impair, perpendiculairement à* Ox, *c'est-à-dire dans la direction de l'index* I_1, *si k est pair.*

Cela posé, remarquons que les équations (1) à ($n-2$), additionnées ensemble, donnent

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} = \zeta_n.$$

Construisons sur l'abaque les échelles (z_1), (z_2), ..., (z_{n-1}) à l'exclusion des échelles (ζ_3), (ζ_4), ..., (ζ_{n-1}) et sur l'axe qui porterait l'échelle (ζ_n), construisons celle de la fonction $-f_n$, c'est-à-dire construisons l'échelle $x = -f_n$ si n est pair, l'échelle $t = -f_n$ si n est impair.

Nous aurons ainsi

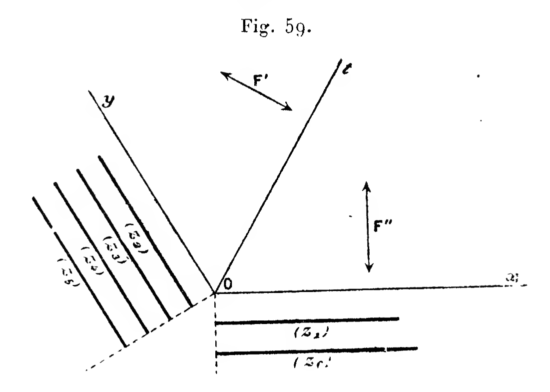
(E) $$f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + f_n = 0.$$

et nous voyons, d'après ce qui vient d'être dit, que tout système de valeurs de z_1, z_2, ..., z_n satisfaisant à l'équation (E) sera tel que, si, après avoir fait passer l'index I_1 par le point (z_1), on donne au transparent les glissements alternatifs qui viennent d'être définis, de

manière à prendre successivement avec l'index I_2 les points (z_2), (z_3), ..., (z_{n-1}), l'index I_1 si n est pair, I_3 si n est impair, donnera, dans la dernière position du transparent, la valeur de z_n sur l'échelle correspondante.

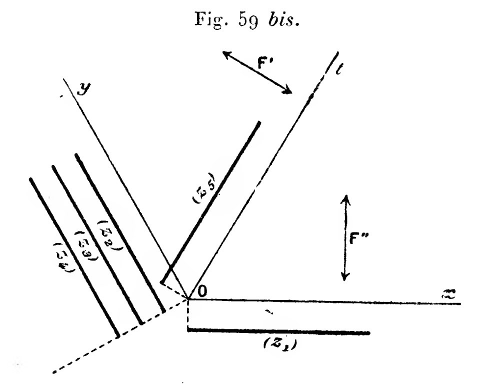
Grâce à la terminologie introduite aux n°s 49 et 52, on voit que ce qui précède peut être résumé dans l'énoncé suivant : *une équation à n variables est représentable par abaque hexagonal lorsqu'elle peut être dissociée en $n-2$ équations à trois variables susceptibles chacune de ce mode de représentation.*

Fig. 59.



En résumé, la représentation de l'équation (E) ci-dessus s'obtiendra comme suit (*fig.* 59 et 59 *bis*) :

Fig. 59 *bis*.



En ayant soin d'aligner les origines des échelles parallèles à un même axe sur une perpendiculaire élevée en O à cet axe, on

construit parallèlement à Ox l'échelle de la fonction f_1, parallèlement à Oy celles des fonctions f_2, $-f_3$, f_4, $-f_5$, ..., $(-1)^n f_{n-1}$, enfin parallèlement à Ox si n est pair (fig. 59), à Ot si n est impair (fig. 59 bis), celle de la fonction $-f_n$.

On trace, en outre, deux flèches F′ et F″ perpendiculaires l'une à Ot, l'autre à Ox.

Et le mode d'emploi de l'abaque est le suivant :

Le transparent étant convenablement orienté, on fait passer son index I_1 par le point (z_1), son index I_2 par le point (z_2), puis on le fait glisser alternativement dans le sens des flèches F′ et F″, de façon à amener successivement son index I_2 à passer par les points (z_3), (z_4), (z_5), ... Quand cet index I_2 passe par le point (z_{n-1}), l'index, I_1 ou I_3, perpendiculaire à l'échelle (z_n), rencontre cette échelle en un point dont la cote est la valeur de z_n demandée.

Exemple : Analogies des sinus et des tangentes. — Nous emprunterons à M. Lallemand l'exemple suivant :

Soit à représenter les équations

$$\alpha_1 \sin\alpha_2 = \alpha_4 \sin\alpha_3,$$
$$\alpha_1 \operatorname{tang}\alpha_2 = \alpha_4 \operatorname{tang}\alpha_3,$$

qui sont d'un usage fréquent dans les applications de Trigonométrie plane. Nous les écrirons

$$\log\alpha_1 + \log\sin\alpha_2 - \log\sin\alpha_3 - \log\alpha_4 = 0,$$
$$\log\alpha_1 + \log\operatorname{tang}\alpha_2 - \log\operatorname{tang}\alpha_3 - \log\alpha_4 = 0.$$

Pour représenter la première, nous n'aurons, d'après ce qui précède, qu'à construire parallèlement à Ox l'échelle des fonctions $\log\alpha_1$ et $\log\alpha_4$ qui n'en formeront qu'une, parallèlement à Oy celle des fonctions $\log\sin\alpha_2$ et $\log\sin\alpha_3$ qui se confondront également.

De même pour la seconde équation, en changeant les log sin en log tang. On pourra, d'ailleurs, faire coïncider les échelles logarithmiques (α_1), ou échelles des longueurs, des deux abaques. On obtient ainsi la figure 60 sur laquelle l'échelle des tangentes a été fractionnée au point coté 45°.

Il n'y a ici à effectuer qu'un seul glissement dans la direction des parallèles équidistantes tracées sur l'abaque.

Le mode d'emploi sera donc le suivant :

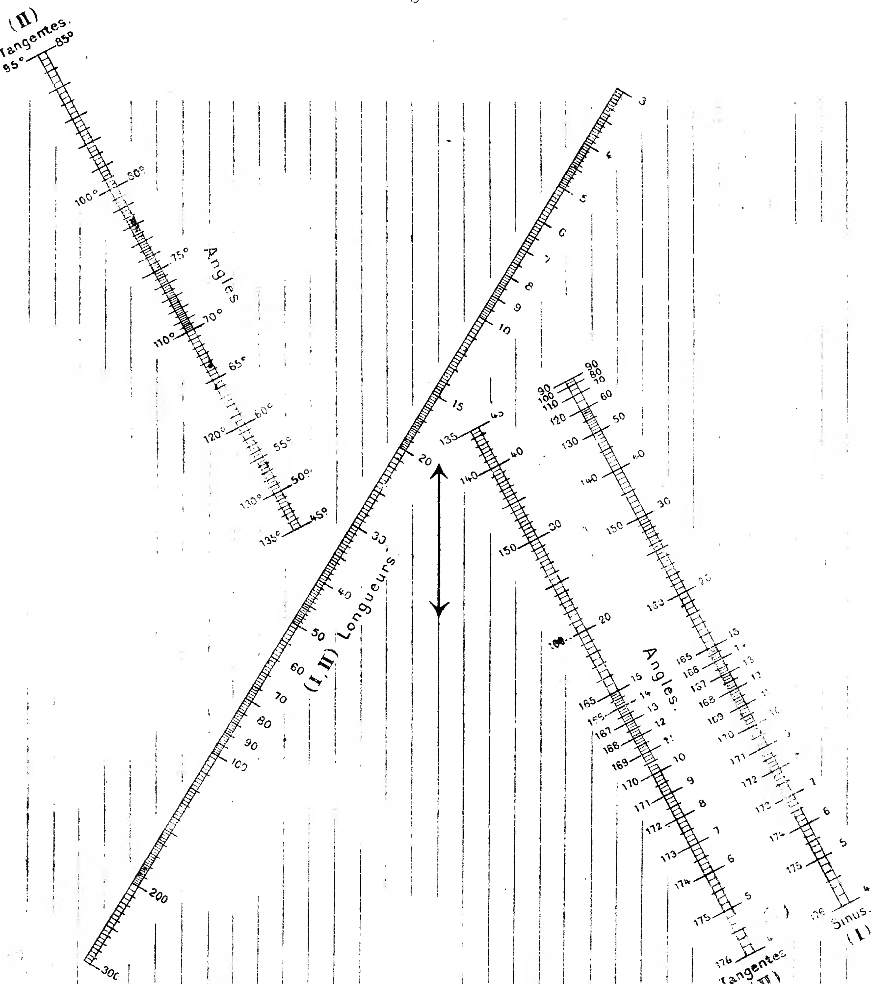
Faire passer les index I_1 et I_2 du transparent convenablement orienté respectivement par les points (α_1) de l'échelle des longueurs et (α_2) de l'échelle des sinus (ou des tangentes), puis faire glisser ce transparent dans la direction des parallèles équidistantes jusqu'à ce que son index I_2

passe par le point (α_3) *de l'échelle des longueurs; son index* I_1 *coupe alors l'échelle des sinus (ou des tangentes) au point coté* (α_4).

Si, après avoir pris l'échelle des sinus dans la première position du transparent, on prenait, après glissement, l'échelle des tangentes, on aurait résolu l'équation

$$\alpha_1 \sin \alpha_2 = \alpha_4 \operatorname{tang} \alpha_3.$$

Fig. 60.



54. *Abaques hexagonaux à échelles binaires.* — Si les échelles binaires introduites dans un abaque hexagonal ne sont pas suscep-

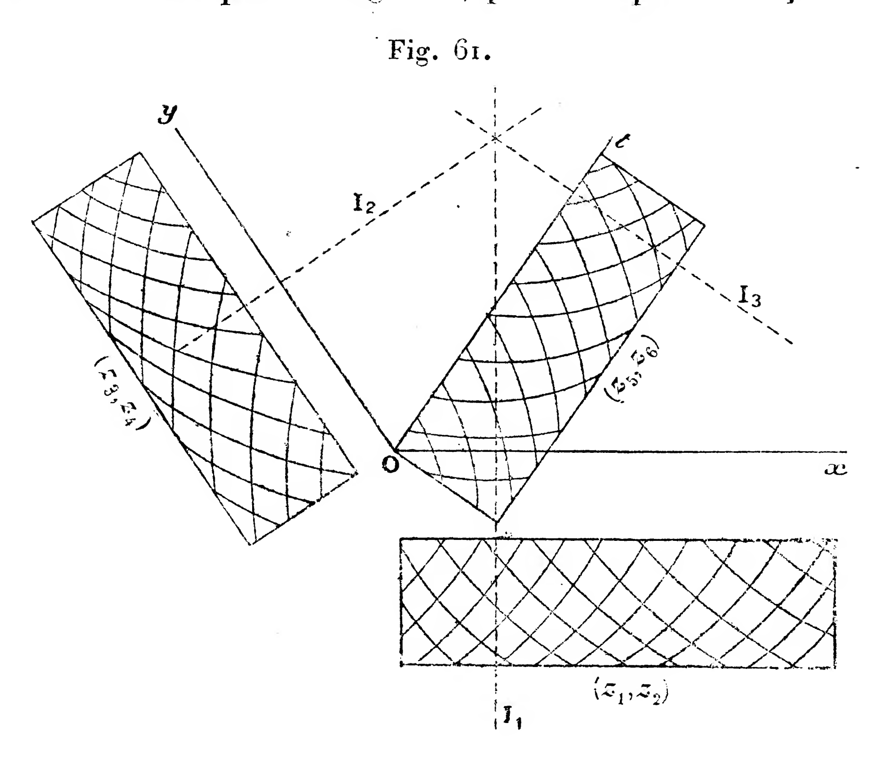
tibles de prendre elles-mêmes la forme d'abaques hexagonaux, on obtient la disposition générale représentée par la figure 61 ([1]).

Le type de l'équation correspondante est, d'après ce qui a été vu au n° 31,

$$f_{12}+f_{34}=f_{56},$$

On dispose à volonté des trois échelles accolées respectivement aux trois axes de l'abaque hexagonal, pourvu que trois points (z_1, z_2),

Fig. 61.



(z_3, z_4), (z_5, z_6) pris dans chacune de ces échelles et correspondant à une solution particulière de l'équation ci-dessus se trouvent simultanément sous les trois index du transparent.

L'emploi de l'abaque, si, par exemple, on prend z_6 pour inconnue, est le suivant : *deux des index du transparent convenablement orienté passant l'un par le point* (z_1, z_2), *l'autre par le point* (z_3, z_4), *le troisième index coupe la courbe* z_5 *de l'échelle binaire correspondante en un point, et la cote de la courbe* z_6 *passant en ce point est la valeur demandée.*

On pourra, dans certains cas, se servir de cette méthode en faisant entrer une même variable dans deux groupes binaires différents. Il convient toutefois de remarquer que, dans ce cas, la variable figurant dans deux groupes binaires ne saurait être prise pour inconnue.

([1]) *Voir* le renvoi du n° 50 (p. 123).

Pour qu'une variable intervenant dans un nomogramme quelconque puisse y être prise comme inconnue, il est évident, en effet, qu'il ne doit lui correspondre sur cet abaque qu'un seul système d'éléments cotés (¹).

Exemples : 1° *Intérêts composés* (²). — La formule des intérêts composés est

$$A = a(1 + r)^n,$$

dans laquelle

a désigne le capital placé;
r le taux;
n le nombre d'années du placement;
A le capital produit.

Il suffit de l'écrire sous la forme

$$\log A = \log a + n \log(1 + r)$$

pour voir qu'elle rentre dans le type ci-dessus lorsqu'on prend le long de deux des axes des échelles logarithmiques ordinaires pour A et a, et le long du troisième une échelle binaire pour l'ensemble de n et de r.

Si μ est le module des échelles logarithmiques (A) et (a), l'échelle binaire (n, r) sera définie par

$$x = \mu n \log(1 + r),$$

l'axe des x étant supposé coïncider avec l'axe correspondant de l'abaque hexagonal. On constituera donc cette échelle au moyen de deux systèmes de droites cotées

$$y = \mu' \log(1 + r),$$
$$\mu' x = \mu n y.$$

L'abaque correspondant, pour lequel, sur la figure 62, on a pris

$$\mu = \mu' = \frac{2}{3} \times 1^{m},$$

(¹) On peut, par exemple, représenter l'équation

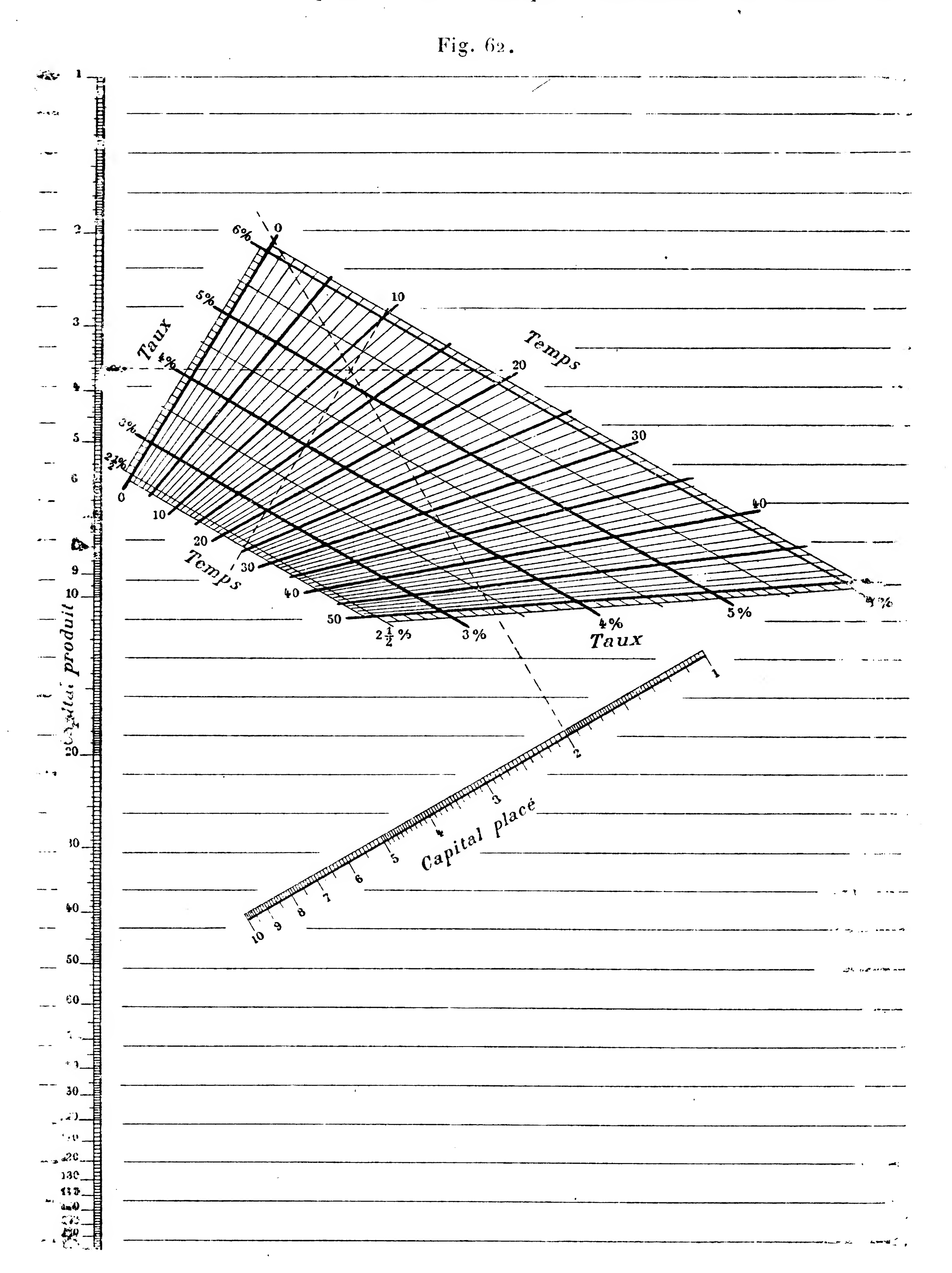
$$z^3 + nz^2 + pz + q = 0$$

par un abaque hexagonal comportant une échelle binaire (z, n) représentative de $z^3 + nz^2$, une échelle binaire (z, p) représentative de pz et une échelle simple (q), mais un tel abaque ne permettrait pas de prendre z pour inconnue, alors que c'est précisément en vue du calcul de cette variable que l'on peut avoir à représenter une telle équation. Cela souligne l'intérêt de la solution qui sera donnée plus loin (n° 104) pour ce problème.

(²) On trouvera plus loin (n° 102), un nomogramme plus simple pour la même formule.

est dû à M. Prévot. Il prête à une remarque intéressante d'où résulte une

Fig. 62.



grande simplification de construction et qui peut trouver son application

dans des cas analogues. Elle consiste en ce que, dans le champ de variation très limité de la variable r, les accroissements de $\log(1+r)$ sont sensiblement proportionnels à ceux de r.

Calculons, par exemple, au milieu de cet intervalle, $\log 1{,}04$, en admettant cette proportionnalité. Nous aurons

$$\frac{\log 1{,}04 - \log 1{,}025}{\log 1{,}06 - \log 1{,}025} = \frac{1{,}04 - 1{,}025}{1{,}06 - 1{,}025},$$

d'où

$$\log 1{,}04 = \log 1{,}025 + \frac{15}{35}(\log 1{,}06 - \log 1{,}025) = 0{,}0169739.$$

La véritable valeur de $\log 1{,}04$ est

$$\log 1{,}04 = 0{,}0170333.$$

L'erreur commise est donc

$$\varepsilon = -0{,}0000594$$

ou sensiblement

$$\varepsilon = -0{,}00006.$$

Avec la valeur de μ' admise sur la figure 62, cela donne pour l'écart entre la position de la droite $r = 0{,}04$, obtenue par cette interpolation proportionnelle, et sa position rigoureuse la valeur

$$\tfrac{2}{3} \times 0^{\text{m}}{,}00006 = 0^{\text{m}}{,}00004,$$

soit $\frac{1}{25}$ de millimètre, écart qui peut être pratiquement regardé comme tout à fait négligeable.

La position des index du transparent, marquée en pointillé sur la figure 62 correspond à l'exemple numérique $a = 20000^{\text{fr}}$, $T = 0{,}04$, $n = 15^{a}$, pour lequel l'abaque donne $A + 36000^{\text{fr}}$ (1).

2° *Poussée des terres.* — M. Boussinesq a donné, pour le calcul de la poussée des terres sur un mur vertical de soutènement, la formule suivante :

$$P = \varpi \frac{H^2}{2} \frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left[\varphi_1 - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right]},$$

laquelle

φ désigne l'angle de frottement des terres sur elles-mêmes;

φ_1 l'angle de frottement des terres sur la maçonnerie;

ϖ le poids en tonnes du mètre cube de terre;

(1) On peut faire à propos de cet abaque la même observation que celle qui a été présentée au sujet de l'abaque des annuités (renvoi du n° 51, Ex. 1°, p. 128).

H la hauteur en mètres du mur;
P la poussée en tonnes par mètre carré.

Pour traduire cette formule en abaque hexagonal, il n'y a qu'à la mettre sous la forme

$$\log P = \log \varpi + 2 \log H + 2 \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$+ \log\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \log 2 - \log\cos\left[\varphi_1 - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

Le terme du premier membre donne pour P une échelle logarithmique simple, les deux premiers termes du second membre donnent une échelle binaire pour l'ensemble (ϖ, H), et le reste du second membre une échelle binaire pour l'ensemble (φ, φ_1).

L'abaque correspondant, construit par M. Renard, et sur lequel l'échelle de la poussée P a été fractionnée au point $P = 5$ pour que l'abaque tienne dans un cadre plus restreint, est reproduit sur la figure 63.

La position des index du transparent, marquée en pointillé, correspond à l'exemple numérique

$$\varpi = 2^{T}, \qquad H = 4^{m},5, \qquad \varphi = 30°, \qquad \varphi_1 = 35°,$$

pour lequel l'abaque donne $P = 5^{T},87$.

55. *Combinaison des deux types précédents.* — L'emploi des échelles binaires peut aussi se combiner avec le principe des abaques hexagonaux à glissement dont il a été question au n° 53.

On aura ainsi la représentation d'une équation de la forme

$$f_{12} + f_{34} + \ldots + f_{n,n+1} = 0.$$

Exemple : Erreur de réfraction dans le nivellement. — Si l'on représente par

B la pression barométrique;
D la différence brute de niveau prise en valeur absolue;
L la longueur de la nivelée;
t_2 la température de l'air à la hauteur de la lunette;
t_3 et t_1 ses températures aux points où la ligne de visée rencontre les deux mires d'arrière et d'avant,

et si l'on pose, en outre,

$$\theta = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3},$$
$$\tau = t_2 - t_1, \qquad \tau' = t_3 - t_2,$$

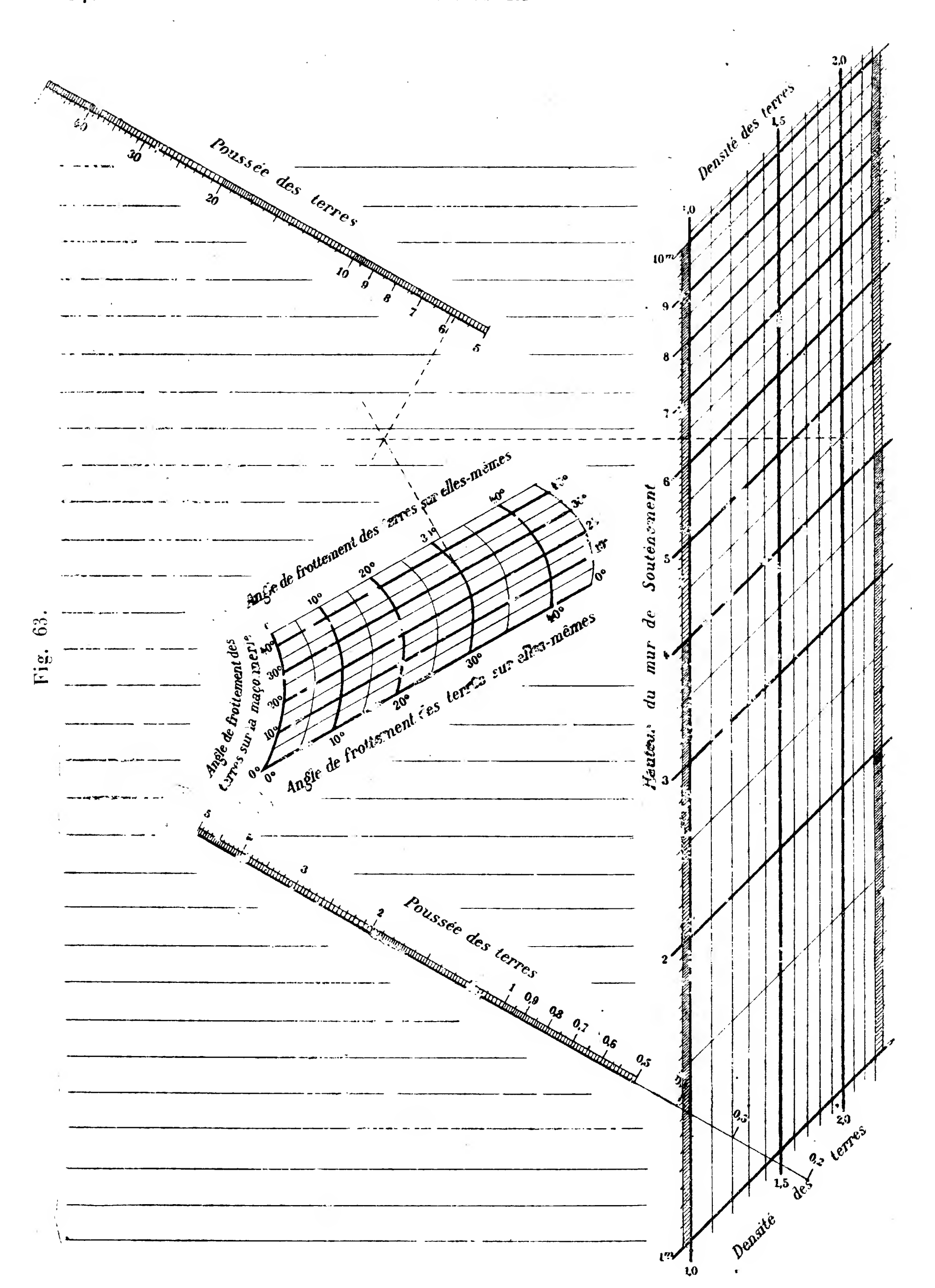

Poussée des terres
Angle de frottement des terres sur elles-mêmes
Angle de frottement des terres sur la maçonnerie
Angle de frottement des terres sur elles-mêmes
Poussée des terres
Densité des terres
Hauteur du mur de Soutènement
Densité des terres

Fig. 63.

l'erreur de réfraction ε est donnée par la formule

$$(1)\quad \varepsilon = \frac{0^{\text{mm}},00108}{76}\,\frac{B}{D}\,\frac{L^2}{(1+0,00366\,\theta)^2}\,(\tau+\tau')\left[\frac{0,4343-\frac{1}{2}\log(1-\delta^2)}{\log\frac{1+\delta}{1-\delta}}-\frac{1}{2\delta}\right],$$

δ étant défini par l'équation

$$(2)\qquad \frac{\log(1+\delta)}{\log(1-\delta)} = \frac{\tau'}{\tau}.$$

En outre, ε *est ou non de même signe que la différence de niveau* D (qui, sur l'abaque, ne sera prise, comme on vient de le dire, qu'en valeur absolue), *suivant que le quotient* $\frac{\tau+\tau'}{D}$ *est négatif ou positif.*

Posant

$$\frac{0,00108}{76} = k, \qquad 0,00366 = \alpha$$

et remarquant qu'en vertu de (2) δ est une fonction de τ et τ', on voit que la formule (1) peut s'écrire

$$\varepsilon = k\,\frac{B}{D}\,\frac{L^2}{(1+\alpha\theta)^2}\,(\tau+\tau')\,\varphi(\delta),$$

ou encore

$$\log\varepsilon - \log k = \log B - \log D + 2\log L - 2\log(1+\alpha\theta) + \log(\tau-\tau')\log\varphi(\delta),$$

δ dépendant de τ et de τ' en vertu de l'équation (2).

Sous cette dernière forme, elle apparaît comme susceptible d'être représentée par un abaque hexagonal à glissement du type de la figure 59 (n° 53), comprenant une échelle simple (ε) et trois échelles binaires (B, D), (L, θ) et (τ, τ').

L'échelle (ε) et l'une des échelles binaires, (L, θ) par exemple, seront accolées à l'axe Ox de la figure 59, les deux autres échelles à l'axe Oy, et le glissement aura lieu normalement à l'axe Ot (1).

Si nous représentons par $O_1x_1y_1$, $O_2x_2y_2$, $O_3x_3y_3$ les systèmes d'axes rectangulaires auxquels sont rapportées respectivement ces trois échelles binaires, elles seront définies par

$$(E_1)\qquad x_1 = \mu(\log B - \log D),$$

$$(E_2)\qquad x_2 = \mu 2[\log L - \log(1+\alpha\theta)],$$

$$(E_3)\qquad x_3 = \mu[\log(\tau+\tau') + \log\varphi(\delta)],$$

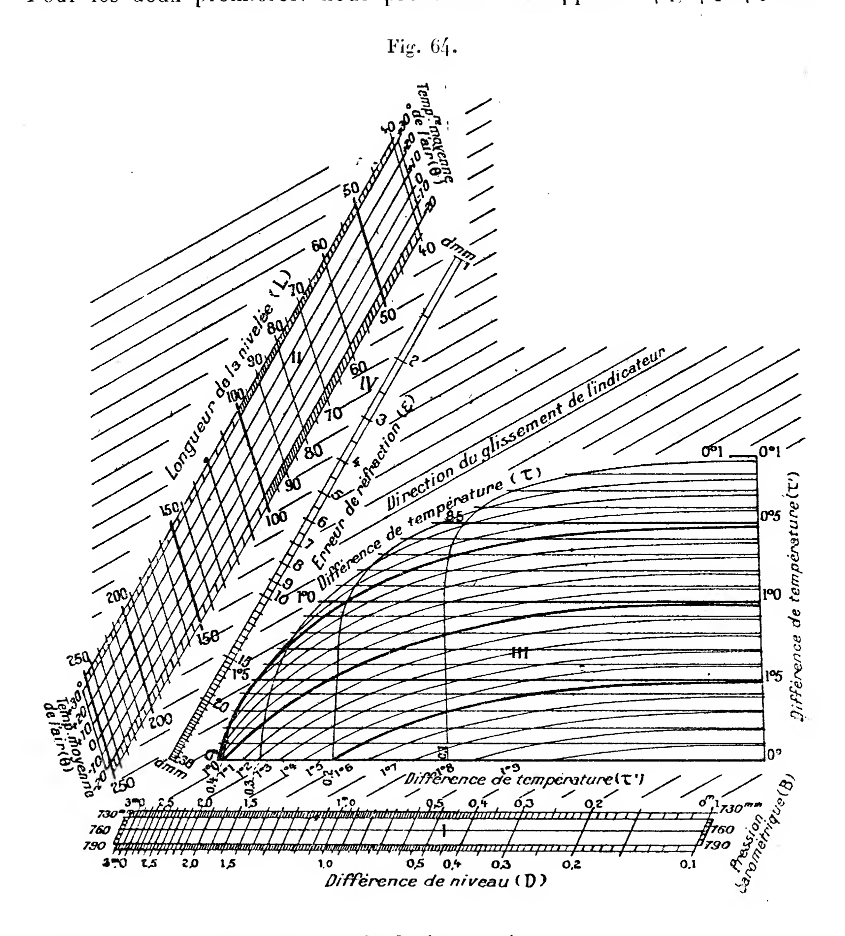
où μ est le module commun aux trois axes.

---

(1) Pour passer de la disposition de la figure 59 à celle de la figure 64, il faut, avec un tel choix d'axes, supposer que l'on fasse tourner la première de 120° dans le sens rétrograde.

Pour les deux premières, nous prendrons, en appelant μ_1, μ_2, μ_3 trois

Fig. 64.



nouveaux modules, les systèmes de droites cotées

(B) $$y_1 = \mu_1 \log B,$$

(D) $$\mu_1 x_1 = \mu y_1 - \mu\mu_1 \log D$$

et

(θ) $$y_2 = \mu_2 \log(1 + \alpha\theta),$$

(L) $$\mu_2 x_2 = 2\mu\mu_2 \log L - 2\mu y_2.$$

Pour la troisième, nous prendrons d'abord le système

(τ) $$y_3 = \mu_3 \tau.$$

Quant au système (τ'), on serait d'abord tenté, pour le construire, d'obtenir l'équation des courbes qui le composent, en éliminant δ et τ entre les équations (2), (E_3) et (τ) ci-dessus. Malheureusement, cette élimination est algébriquement impossible. On peut toutefois tirer τ de la dernière de ces équations pour en porter la valeur dans les deux autres, ce qui donne

$$y_3 = \mu_3 \tau' \frac{\log(1-\delta)}{\log(1+\delta)},$$

$$x_3 = \mu \left[\log\left(\frac{y_3}{\mu_3} + \tau'\right) + \log \varphi(\delta) \right].$$

Dès lors, les coordonnées de chaque point de la courbe τ' se trouvant exprimées en fonctions du paramètre δ, il est possible, en faisant varier ce paramètre, de construire la courbe point par point.

L'abaque correspondant, représenté sur la figure 64 est dû à M. Lallemand. Son mode d'emploi, d'après ce qui a été vu au n° 53, se réduit à ceci : *ayant d'abord fait passer les index* I_1 *et* I_2 *du transparent respectivement par les points* (L, θ) *et* (B, D), *on fait glisser ce transparent dans la direction de l'index* I_3 *jusqu'à ce que l'index* I_2 *passe par le point* (τ, τ'). *L'index* I_1 *coupe alors l'échelle* (ε) *en un point dont la cote est l'erreur demandée.*

Par exemple, pour

$$B = 0^{m},76, \quad D = -2^{m},22, \quad L = 150^{m}, \quad \theta = 1^{\circ},6, \quad \tau = 0^{\circ},75, \quad \tau' = 0^{\circ},35,$$

l'abaque donne

$$\varepsilon = 0^{mm},6$$

et, comme ici le rapport $\dfrac{\tau+\tau'}{D}$ est négatif, il faut prendre

$$\varepsilon = +0^{mm},6.$$

56. *Abaque hexagonal à échelles mutiples : déviation du compas.* — La déviation du compas d'un navire, variable avec la position de celui-ci à la surface du globe, est donnée par la formule

$$\delta = A + m \sin\zeta + n \cos\zeta + B \sin 2\zeta + C \cos 2\zeta,$$

où ζ est le cap du compas, m et n des fonctions de la longitude L et de la latitude l, qui seront définies plus loin ; A, B, C des constantes pour le navire donné.

Les coefficients m et n étant des fonctions de L et de l peuvent être représentés par des échelles binaires que nous désignerons par $m(L, l)$ et $n(L, l)$.

Si maintenant nous posons

$$\delta' = m(L, l) \sin\zeta,$$

nous voyons que nous n'aurons qu'à combiner, ainsi qu'on l'a vu au n° 52,

l'échelle binaire

$$x' = m(\mathrm{L},\ l)$$

avec les radiantes

$$y' = x' \sin\zeta,$$

pour obtenir l'échelle ternaire

$$y' = m(\mathrm{L},\ l)\sin\zeta = \delta'(\mathrm{L},\ l,\ \zeta).$$

De même, si nous posons

$$\delta'' = n(\mathrm{L},\ l)\cos\zeta + \mathrm{A} + \mathrm{B}\sin 2\zeta + \mathrm{C}\cos$$

nous n'aurons qu'à combiner l'échelle binaire

$$x'' = n(\mathrm{L},\ l)$$

avec les droites cotées (ζ) définies par l'équation

$$y'' = x''\cos\zeta + \mathrm{A} + \mathrm{B}\sin 2\zeta + \mathrm{C}\cos 2\zeta,$$

pour obtenir l'échelle ternaire

$$y'' = n(\mathrm{L},\ l)\cos\zeta + \mathrm{A} + \mathrm{B}\sin 2\zeta + \mathrm{C}\cos 2\zeta = \delta''(\mathrm{L},\ l,\ \zeta);$$

et, puisque

$$\delta = \delta' + \delta'',$$

il suffira que les échelles ternaires $\delta'(\mathrm{L},\ l,\ \zeta)$ et $\delta''(\mathrm{L},\ l,\ \zeta)$ soient accolées à deux des axes d'un abaque hexagonal pour que les valeurs de δ soient données par une échelle métrique portée sur le troisième axe (n° 32).

Reste à voir comment on pourra construire les échelles binaires $m(\mathrm{L},\ l)$ et $n(\mathrm{L},\ l)$. On a

$$m = \arc\sin\left[\frac{1}{\lambda}\left(e\operatorname{tang}\theta + \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{H}}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\sin\mathrm{B}\right)\right],$$

$$n = \arc\sin\left[\frac{1}{\lambda}\left(f\operatorname{tang}\theta + \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{H}}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\sin\mathrm{B}\right)\right],$$

formules où tout est constant, sauf l'inclinaison magnétique θ et la composante magnétique horizontale H, fonctions l'une et l'autre de L et l.

Pour construire l'échelle binaire de m

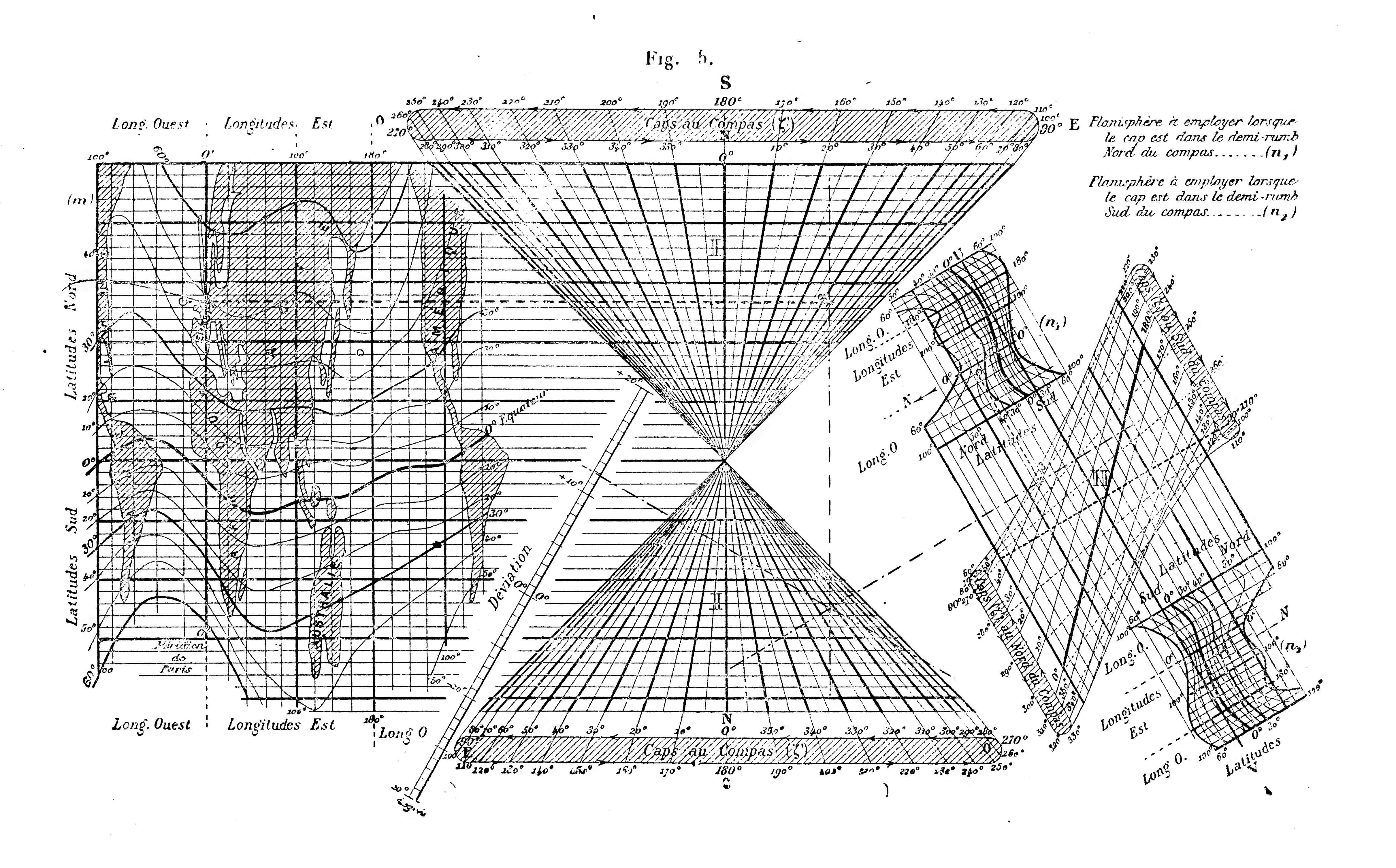
$$x' = m,$$

nous pouvons prendre pour lignes cotées L les parallèles à l'axe des x'

$$y' = \mathrm{L}.$$

Reste à tracer les courbes cotées (l). Nous nous servirons pour cela des planisphères terrestres sur lesquels sont marquées les courbes, obtenues par l'observation, le long desquelles θ d'une part, H de l'autre, ont une valeur constante. Pour avoir la courbe cotée l il suffit, pour diverses valeurs de L

Fig. 5.



S
Caps au Compas (ζ)
Caps au Compas (ζ)
E
N
Long. Ouest
Longitudes Est
Long. O
Latitudes Nord
Latitudes Sud
Équateur
Méridien de Paris
AUSTRALIE
Déviation
Flanisphère à employer lorsque le cap est dans le demi-rumb Nord du compas ....(n_1)
Flanisphère à employer lorsque le cap est dans le demi-rumb Sud du compas ....(n_2)
Caps (ζ) au Sud du Compas
Caps (ζ) au Nord du Compas
Latitudes Nord
Latitudes Sud
Longitudes Est
Long. O.
Latitudes

ou y', associées à cette valeur de l, d'avoir les valeurs correspondantes de m ou x'. Or rien n'est plus simple, attendu que pour un couple de valeurs de l et L le planisphère dont il vient d'être question donne les valeurs de θ et H qui, portées dans l'expression de m écrite plus haut (et que l'on peut, au besoin, traduire par un abaque) font, à leur tour, connaître m.

De même pour l'échelle binaire de n.

C'est ainsi qu'a été construit l'abaque de la figure 65, dû à M. Lallemand, qui se rapporte au navire *le Triomphe*, pour lequel les constantes ci-dessus ont les valeurs

$$\begin{array}{llll} A = -1^\circ 9', & e = & 0,106, \\ B = \;\; 6^\circ 45', & f = -0,013, \\ C = -0^\circ 5', & P = -0,033, \\ \lambda = \;\; 0,84, & Q = -0,02. \end{array}$$

Pour plus de netteté dans l'échelle ternaire de δ'', on n'a fait varier le cap du compas que d'une demi-circonférence. Afin donc d'avoir la valeur de δ'' correspondant à toutes les valeurs de ζ, on a dû répéter deux fois l'échelle binaire de n ([1]), l'une de ses positions correspondant à la graduation du demi-rumb nord, l'autre à celle du demi-rumb sud.

En résumé, *ayant pris dans l'échelle de* δ' (indiquée sur la figure par le chiffre I) *le point de rencontre de la droite* ζ *et de la parallèle au premier axe passant par l'intersection de la droite* L *et de la ligne* l, *et dans l'échelle de* δ'' (indiquée par le chiffre II), *le point de rencontre de la droite* ζ *et de la parallèle au second axe passant par l'intersection de la droite* L *et de la ligne* l (en tenant compte du demi-rumb où se trouve le compas), *il suffit de faire respectivement passer par ces deux points les deux premiers index du transparent convenablement orienté pour que le troisième donne sur le troisième axe, qui porte l'échelle de la déviation, la valeur de* δ.

On a indiqué en pointillé sur la figure les positions de ces index pour l'exemple numérique suivant :

$$l = 42^\circ \text{N}, \qquad L = 20^\circ \text{O}, \qquad \zeta = 41^\circ,5.$$

L'abaque donne alors

$$\delta = 11^\circ,8.$$

([1]) Afin de faciliter la lecture, on a, sur l'échelle binaire de m, qui est, en somme un planisphère anamorphosé, fait figurer les contours des continents. On s'est dispensé de le faire sur l'échelle binaire de n, parce qu'il en serait résulté une certain confusion dans le dessin.

CHAPITRE IV.

REPRÉSENTATION PAR POINTS ALIGNÉS DANS LE CAS DE TROIS VARIABLES.

I. — Nomogrammes généraux à points alignés (¹).

57. *Principe des points alignés.* — Nous avons déjà exposé au nº 29 les raisons pour lesquelles il est désirable, chaque fois que la chose est possible, de ne faire intervenir comme éléments cotés, dans

(¹) C'est dans le Mémoire **O.1**, paru en novembre 1884, mais présenté en février 1884 à la Commission des *Annales des Ponts et Chaussées*, que le principe de cette méthode a été donné pour la première fois.

La portée en a été précisée dans la Note **O.2** avant qu'il ait fait l'objet d'un exposé plus détaillé dans la brochure **O.4**, Chap. IV.

La méthode est désignée à cet endroit sous le nom de *méthode des points isoplethes* eu égard au fait que les systèmes de points qui y interviennent sont corrélatifs des systèmes de droites isoplèthes figurant sur les abaques construits par la méthode de Lalanne. Or, nous avons déjà dit (nº 16) pourquoi nous nous étions décidé à abandonner le terme d'*isoplèthe* pour nous en tenir à celui de *coté*. D'autre part, on verra par la suite qu'on peut construire des nomogrammes où n'interviennent que des points cotés, mais où la relation de position établie entre ceux-ci est autre que l'alignement. Il nous a donc semblé que la meilleure manière de caractériser la présente méthode consistait à rappeler qu'elle reposait sur l'emploi de *points alignés*.

On a pu, après coup, rattacher à la méthode des points alignés la table graphique de multiplication obtenue par Möbius à titre d'interprétation du théorème des transversales de Menelaüs (*Werke*, t. IV, p. 620). Mais, ainsi que cela résulte de l'exposé contenu dans l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (t. I, vol. 4, fasc. 3, p. 379) le principe général de la méthode ne s'était nullement dégagé de ce problème particulier et n'a été mis en lumière pour la première fois que dans le Mémoire **O.1**.

C'est, d'ailleurs, un fait d'observation générale que, lorsqu'apparait quelque méthode nouvelle applicable à tout un ordre de questions, on arrive toujours à lui rattacher *a posteriori* les solutions antérieurement données pour certains cas très particuliers, sans que celles-ci aient même fait soupçonner le principe général d'où l'on pouvait les faire dériver.

C'est ainsi, par exemple, que l'on peut regarder la construction de la carte de Mercator comme résultant d'une application du principe de l'anamorphose. Il n'en est pas moins vrai que ce principe n'a été acquis, à un premier degré de généralité, que depuis les travaux de Lalanne et que l'on ne saurait équitablement le faire dater de plus haut.

la représentation d'une équation, que des points. Ces raisons peuvent se résumer ainsi : avec des points comme seuls éléments côtés on abrège et on simplifie la construction, on affranchit la lecture du nomogramme de toute chance d'erreur, on rend l'interpolation à vue beaucoup plus précise.

La méthode que nous allons maintenant exposer assure la pleine réalisation de ces desiderata pour la catégorie, extrêmement générale dans les applications, des équations précédemment représentables par le concours de trois systèmes de droites *quelconques*, c'est-à-dire de celles qui sont de la forme (¹)

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous verrons (n° **101**) que cette méthode possède, en outre, l'inappréciable avantage de permettre une représentation directe et individuelle d'équations à plus de trois variables, non dissociables, en une suite d'équations à trois variables (nᵒˢ **49** et **52**), et, conséquemment, non susceptibles d'être représentées par lignes concourantes.

L'idée de principe sur laquelle se fonde cette nouvelle méthode se confond avec celle de la *dualité*, fondamentale aujourd'hui dans le domaine de la géométrie pure.

On sait qu'on peut, d'une infinité de manières, faire correspondre à une figure composée de droites une figure composée de points, telle qu'à trois droites concourantes quelconques de la première figure correspondent trois points en ligne droite, ou trois points *alignés*, sur la seconde. Toute transformation jouissant d'une telle propriété,

---

(¹) La question, d'un intérêt purement théorique qui consiste à reconnaître si une équation $F_{123} = 0$ quelconque est réductible à cette forme, constitue un difficile problème d'Analyse résolu de la façon la plus remarquable, en 1912, par M. Gronwall, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliqués* (p. 59). Mais, en pratique, on n'a ordinairement pas besoin d'y recourir, le procédé de disjonction précédemment indiqué (n° 41) étant suffisant dans presque tous les cas.

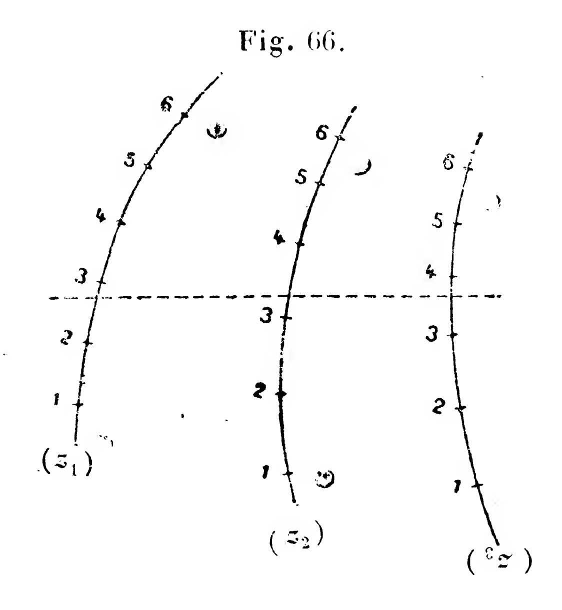
Pour les formes plus particulières correspondant aux cas : 1° de trois échelles rectilignes à supports parallèles (n° 67); 2° de deux échelles rectilignes parallèles avec une troisième échelle quelconque (n° 78); la question avait été antérieurement résolue : 1° par le comte Paul de Saint-Robert (*Mem. della R. Acad. di Turino*, 1871, p. 53); 2° séparément par Massau (*Mém. sur l'intégration graphique* (Livre III, Chap. III, n° 178) et par M. Lecornu (*C. R. de l'Acad. des Sc.*, 1ᵉʳ sem., 1885, p. 818.)

dont le type le plus classique est fourni par la transformation par polaires réciproques, est dite *dualistique*.

Supposons donc que nous appliquions une telle transformation à un nomogramme constitué par trois systèmes de droites concourantes quelconques, *en conservant*, bien entendu, dans le passage d'une figure à l'autre, *la cote de chaque élément*.

Nous obtiendrons ainsi un nouveau nomogramme (*fig*. 66) sur lequel, à chacune des variables z_1, z_2 et z_3, correspondra un système de points cotés distribués sur une courbe, dite leur *support*, qui sera, dans la transformation effectuée, la corrélative de l'enveloppe des droites du système correspondant sur le premier nomogramme.

Fig. 66.



Ces trois systèmes de points cotés constitueront des *échelles curvilignes*.

De même que, sur le premier nomogramme, les trois droites cotées au moyen d'un système de valeurs de z_1, z_2, z_3 satisfaisant à l'équation représentée étaient concourantes, ici les trois points correspondants seront alignés.

De là le mode d'emploi du nomogramme : *la droite joignant les points cotés z_1 et z_2 sur les deux premières échelles curvilignes rencontre la troisième échelle au point coté z_3*.

Pour n'avoir pas à dessiner cette droite, on pourra se servir d'un *transparent à index* ou encore d'un fil fin que l'on tendra entre les points (z_1) et (z_2) (¹).

(¹) Ce dernier procédé, outre l'avantage d'une plus grande rapidité, offre celui, également appréciable, de ne pas exiger que la feuille sur laquelle le nomogramme

Les nomogrammes à points alignés peuvent se classer d'après le nombre des échelles à support rectiligne qu'ils comportent. Nous appellerons *genre* d'un tel nomogramme le nombre de ses échelles à support curviligne. Nous aurons donc lieu d'envisager les nomogrammes de genre 0, 1, 2 et 3.

58. *Emploi des coordonnées parallèles.* — Il s'agit maintenant de réaliser sous une forme pratique la transformation dualistique dont l'effet vient d'être indiqué.

Le moyen qui s'offre à cet effet consiste à regarder les coordonnées courantes, dans les équations définissant les divers éléments cotés du nomogramme non plus comme des coordonnées ponctuelles, mais comme des *coordonnées tangentielles donnant pour le point une équation du premier degré* (¹).

Parmi celles-ci, les plus avantageuses, parce qu'elles représentent directement des segments de droite, sont les *coordonnées parallèles* dont nous allons, en quelques mots, rappeler la définition.

Les coordonnées parallèles (²) u et v d'une droite sont les distances AM et BN, prises avec leur signe, des points M et N où cette droite coupe deux axes parallèles dirigés Au et Bv, aux origines A et B respectivement choisies sur ces axes (*fig.* 67).

Dans ce système de coordonnées, toute équation du premier degré

$$au + bv + c = 0 \qquad (1)$$

définit bien un point P. On peut le voir ainsi : prenons pour origine O d'un système de coordonnées cartésiennes le milieu de AB, pour axe Ox

---

est dessiné soit rigoureusement plane, pourvu toutefois qu'elle reste convexe, comme les feuillets, par exemple, d'un livre ouvert. Si, en effet, on tend un fil sur une telle surface, il se dispose suivant une ligne géodésique, transformée d'une ligne droite du plan, et les points qu'il recouvre sont bien des points alignés.

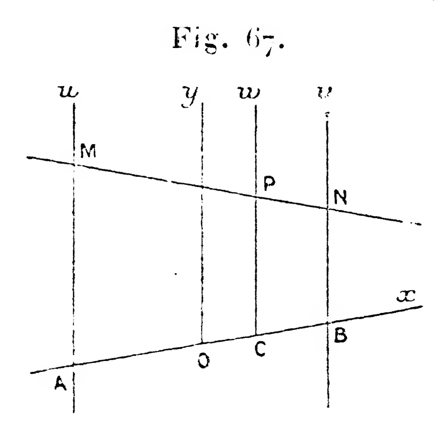
Quant aux variations du papier dont nous avons signalé les conséquences en ce qui concerne les abaques avec transparent à trois index dans le second renvoi du n° 30, elles n'ont ici aucun inconvénient lorsqu'on suppose, comme à l'endroit cité, le papier suffisamment homogène pour que les variations dans chaque sens soient uniformes, puisque, dans ces conditions, des points situés sur une droite quelconque ne cessent, à aucun moment, de se trouver en ligne droite.

(¹) On trouvera une théorie entièrement générale de ces coordonnées dans notre *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, t. I, p. 21 (Gauthier-Villars, 1917).

(²) Au sujet de ces coordonnées, voir ce qui est dit dans l'Introduction (p. XI).

la droite OB, avec sens positif de O vers B, pour axe Oy la parallèle à Au et Bv menée par O et de même sens positif que ces axes; si l'on pose $OB = \delta$, les coordonnées cartésiennes des points M et N, où la droite (u, v) rencontre les axes Au et Bv, sont respective-

Fig. 67.



ment $x = -\delta$, $y = u$ et $x = \delta$, $y = v$. L'équation cartésienne de la droite MN peut donc s'écrire

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -\delta & u & 1 \\ \delta & v & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Remplaçant les éléments de la seconde ligne par la somme de ceux des deux dernières, respectivement multipliés par a et b, et tenant compte de l'équation (1), on transforme ce déterminant en

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \delta(b-a) & -c & a+b \\ \delta & v & 1 \end{vmatrix} = 0$$

qui, sous cette forme, montre immédiatement que la droite MN passe constamment par le point P dont les coordonnées sont

$$(2) \qquad x = \delta\frac{b-a}{b+a}, \qquad y = \frac{-c}{a+b}.$$

Il est, en outre, bien clair que la condition pour que trois points, donnés par leurs équations, soient en ligne droite, est la même que celle qui exprime que les trois droites obtenues en remplaçant u et v par x et y dans ces équations passent par un même point.

Si a, b, c sont des fonctions d'un paramètre variable z, l'équation en u et v du lieu des points correspondants s'obtient par élimination de z entre l'équation de ce point et sa dérivée prise par rapport à z.

On peut établir les formules (2) par un autre procédé dont on saisira l'intérêt par la suite.

Supposons, lorsque la droite MN varie, que les points M et N soient respectivement affectés des masses a et b (prises bien entendu avec leur signe). Leur barycentre P, affecté de la masse $a+b$, se trouve sur la droite MN qu'elle divise dans le rapport

$$\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PN}} = -\frac{b}{a}. \tag{3}$$

Or, ce barycentre est fixe lorsque l'équation (1) est satisfaite; en effet, les moments pris successivement par rapport à Ox et à Oy fournissent, si l'on appelle x et y les coordonnées du point P, les équations

$$(a+b)y = au + bv = -c$$

et

$$(a+b)x = -a\delta + b\delta,$$

d'où se tirent les expressions (2) ci-dessus de x et y.

Remarquons en passant que si, δ_0 et x_0 sont les distances des points N et P au point de rencontre de MN et Oy, on a de même

$$x_0 = \delta_0 \frac{b-a}{a+b}. \tag{2 bis}$$

Il est bien clair que l'on pourrait faire toute la théorie des nomogrammes à points alignés au moyen des coordonnées ponctuelles cartésiennes, ainsi que nous le montrerons plus loin (n° 62). Mais, d'une part, la théorie y perdrait en unité, puisque, avec la première manière, il n'y a simplement qu'à donner *dans les mêmes équations* une signification géométrique différente aux coordonnées courantes pour que cette théorie se confonde avec celles des nomogrammes à droites concourantes; de l'autre, l'emploi des coordonnées parallèles permet, dans le cas de beaucoup le plus fréquent où deux des échelles sont portées sur des droites parallèles, d'opérer sans tâtonnement ce que nous avons appelé la *disjonction des variables* (n° 40).

59. *Nomogrammes tangentiels généraux.* — Il n'a été question dans ce qui précède que de la transformation des nomogrammes à droites concourantes en nomogrammes à points alignés. Qu'obtiendrait-on en faisant subir la même transformation à tout autre nomogramme à lignes concourantes?

Considérons d'abord le nomogramme le plus général constitué par trois systèmes de courbes concourantes quelconques (n° 40). Chacun de ces systèmes donnera corrélativement sur le nouveau nomogramme un autre système de courbes; mais alors que, sur le premier nomogramme, trois courbes correspondantes, prises chacune dans un des systèmes, devaient se couper en un même point, sur le second, trois courbes correspondantes devront être tangentes à une même droite que (sous forme de l'index d'un transparent ou d'un fil tendu) l'on appliquera sur le nomogramme.

Au surplus, toute équation entre trois variables étant susceptible d'une représentation ponctuelle comportant deux systèmes de droites et un système de courbes, savoir celle que donne la méthode cartésienne (n° 16), elle pourra, de même, être représentée tangentiellement au moyen de deux systèmes de points et d'un système de courbes. Il suffira, pour cela, si l'équation donnée est

(E) $$F_{123} = 0,$$

de poser, en appelant μ_1 et μ_2 des modules quelconques,

(z_1) $$u = \mu_1 z_1,$$

(z_2) $$v = \mu_2 z_2,$$

d'où

(z_3) $$F_{123}\left(\frac{u}{\mu_1}, \frac{v}{\mu_2}, z_3\right) = 0.$$

Les deux premières équations définissent des échelles métriques supportées respectivement par l'axe des u et l'axe des v, la troisième un système de courbes quelconques. Toute équation à trois variables pourra donc être ainsi représentée, et le mode d'emploi du nomogramme sera le suivant :

Lire la cote z_3 de la courbe à laquelle est tangente la droite qui unit les points cotés respectivement z_1 et z_2 sur les deux axes.

Une telle substitution ne présenterait quelque avantage que si elle permettait de remplacer les courbes intervenant sur le nomogramme ponctuel par d'autres courbes d'un tracé beaucoup plus simple.

Si, par exemple, l'équation est de la forme

$$(f_1 f_3 + f_2 \varphi_3 + \psi_3)^2 = k^2 + (f_2 - f_1)^2,$$

il suffira, après avoir pris deux axes parallèles distants de μk et ayant

leurs origines sur une même perpendiculaire à leur direction commune, de poser

$$(z_1) \qquad u = \mu f_1,$$

$$(z_2) \qquad v = \mu f_2,$$

pour avoir

$$(z_3) \qquad (uf_3 + v\varphi_3 + \mu\psi_3)^2 = \mu^2 k^2 + (v - u)^2,$$

équation d'un cercle [1] de rayon $\frac{\mu k}{f_3 + \varphi_3}$ ayant pour centre le point

$$uf_3 + v\varphi_3 + \mu\psi_3 = 0$$

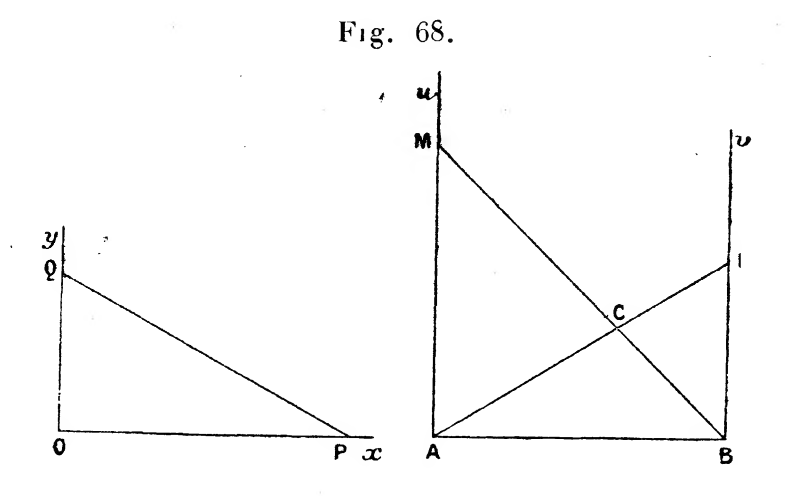
ou, si l'on choisit les axes cartésiens, comme au n° 58,

$$x = \frac{\mu k}{2} \frac{\varphi_3 - f_3}{f_3 + \varphi_3}, \qquad y = \frac{-\mu\psi_3}{f_3 + \varphi_3}.$$

60. *Transformation géométrique des droites concourantes en points alignés.* — Avant d'étudier la construction directe des nomogrammes à points alignés, faisons voir comment on peut très aisément, si l'on possède un nomogramme à droites concourantes, le transformer en un nomogramme à points alignés.

Chaque droite PQ (*fig.* 68) du nomogramme donné peut être

Fig. 68.



définie par deux de ses points. Prenant les coordonnées x et y de chacun de ces points et les reportant, comme coordonnées u et v, sur les axes parallèles de la seconde figure, on obtient les deux droites

(1) Voir *Coordonnées parallèles et axiales*, formule (14), p. 14.

corrélatives dont le point de rencontre C est le point transformé de la droite PQ.

On pourra en particulier se servir des points P et Q, où la droite considérée rencontre les axes Ox et Oy.

Au point P ($x = OP, y = 0$) correspondra la droite

$$BM (u = AM = OP, \; v = 0);$$

au point Q ($x = 0, y = OQ$) correspondra la droite

$$AN (u = 0, \; v = BN = OQ).$$

La construction se résumera donc en ceci : *Porter sur* Au *et* Bv *les segments* $AM = OP$, $BN = OQ$, *et tirer les droites* AN et BM dont le point de rencontre C est le transformé de la droite PQ (¹).

Voici un exemple (²) d'une telle transformation bien propre à mettre en relief les avantages de la méthode des points alignés.

La figure 69 représente un fragment d'une *Table graphique pour l'arpentage des coupes*, dressée par M. Théry, professeur à l'École forestière.

Pour s'en servir, on prend le point de rencontre de la verticale cotée z_1 et de l'horizontale cotée z_2. La cote de l'oblique passant par ce point de rencontre fait connaître z_3, et cette cote est précisément celle inscrite à côté du point où cette oblique rencontre l'axe Oy.

La transformation qui vient d'être décrite, appliquée à ce nomogramme, donne celui de la figure 69 *bis*. Les cotes des points (z_3) sont d'ailleurs obtenus par la remarque que voici : puisque sur le premier nomogramme une oblique et une horizontale de même cote se coupent sur l'axe Oy, un point de l'échelle curviligne du second nomogramme et le point de même cote de l'axe Bv sont alignés sur l'origine A de l'axe Au.

Il suffit de jeter un coup d'œil sur les deux figures (³) pour que les avan-

---

(¹) Ici se placent deux remarques importantes : 1° Pour que (ce qui est préférable) les points C, correspondant aux droites PQ, soient situés *entre* les axes Au et Bv, il faut que ces droites PQ aient un coefficient angulaire négatif; or on peut toujours faire en sorte qu'il en soit ainsi en choisissant convenablement le sens positif sur l'un des axes Ox ou Oy, celui de l'autre étant quelconque; 2° rien n'empêche, en passant de l'échelle de Ox à celle de Au, et de celle de Oy à celle de Bv, de changer de module s'il doit en résulter une meilleure disposition, ces deux changements de module étant d'ailleurs indépendants l'un de l'autre (*voir* à ce propos les figures 69 et 69 *bis*).

(²) On trouvera un autre exemple d'une telle transformation dans un article de M. Quiquet : *Sur trois modes de réduction graphique des assurances mixtes aux assurances en cas de décès*, paru dans le *Bulletin de l'Institut des actuaires français* (juillet 1897). *Voir* aussi n° 90.

(³) Encore convient-il de remarquer que les modules des axes de la figure 69 sont supérieurs à ceux de la figure 69 *bis*. S'ils avaient été les mêmes, la première de ces figures serait devenue à peu près illisible.

Fig. 69.

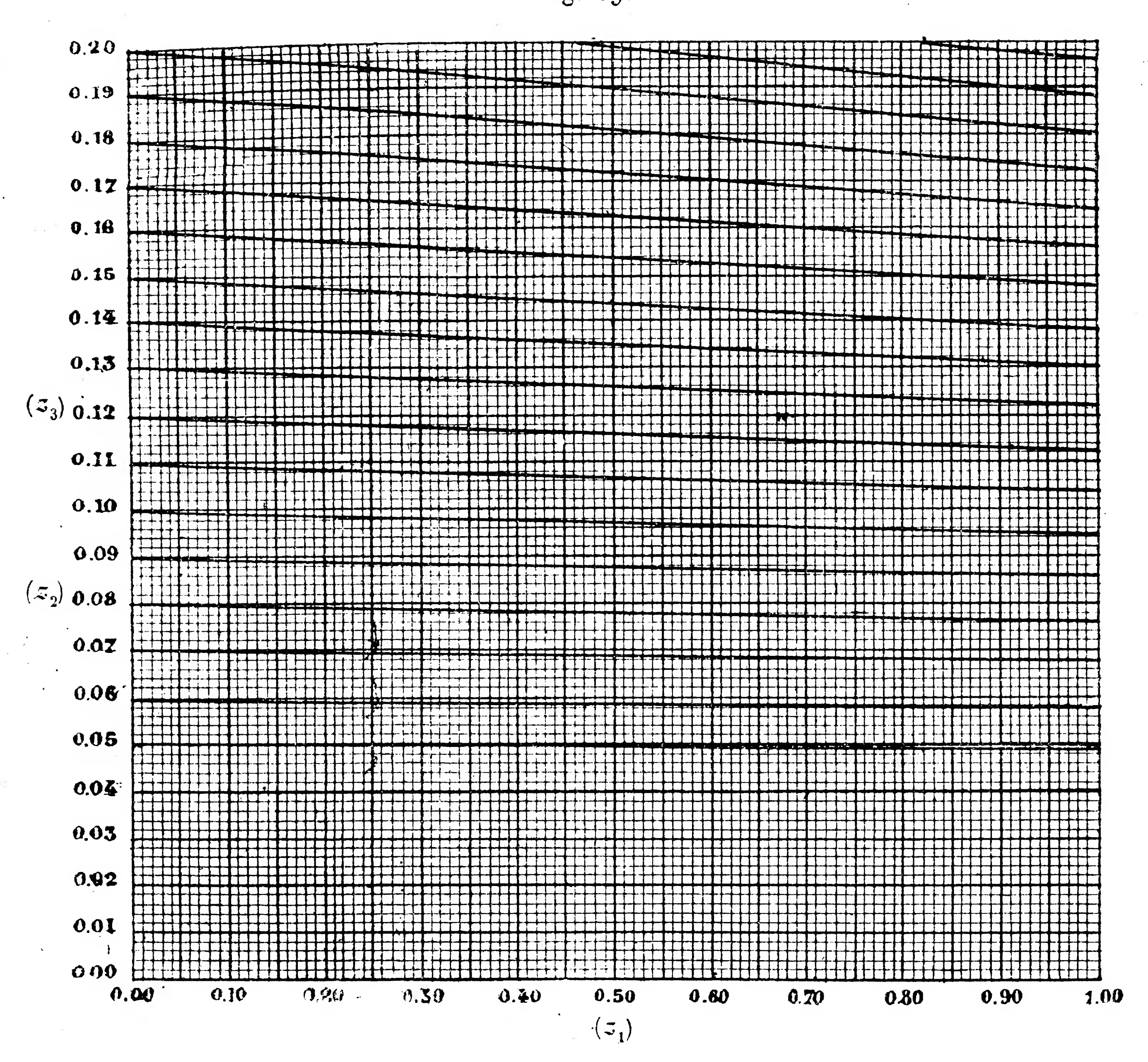
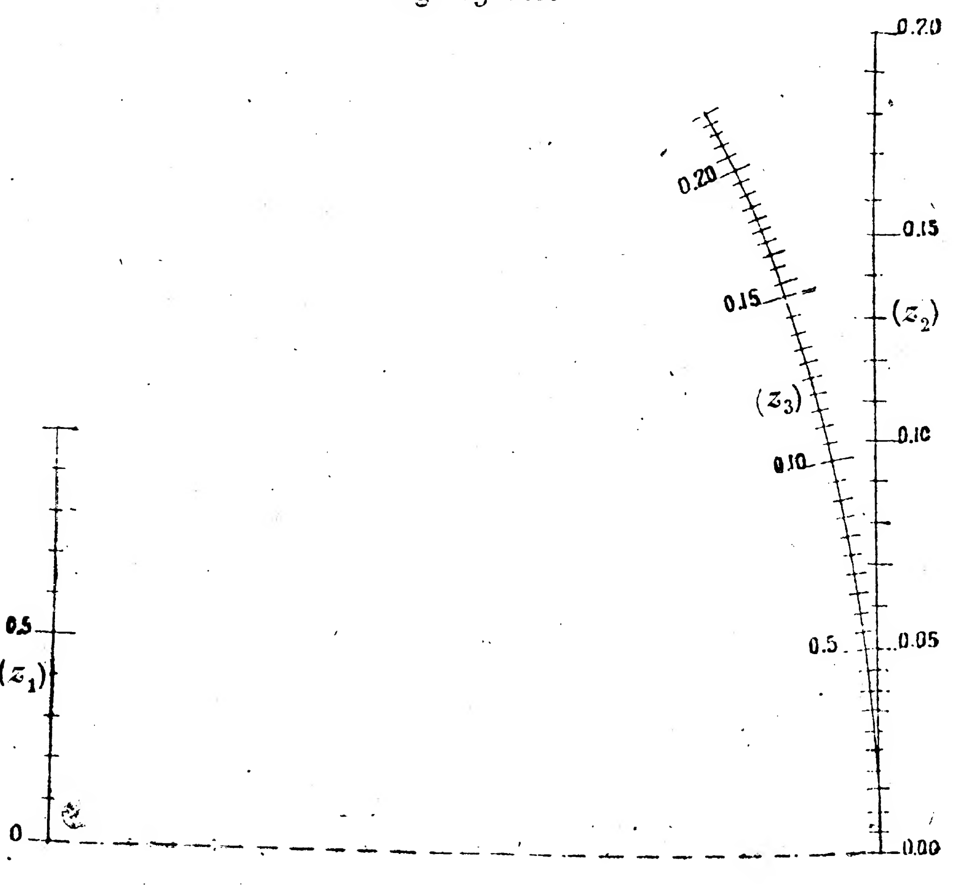


Fig. 69 *bis*.



tages de la seconde par rapport à la première sautent aux yeux, en ce qui concerne les desiderata formulés au n° 29.

On peut faire, en outre, les deux remarques suivantes :

1° Sur la figure 69 les obliques (z_3) se distinguent mal des horizontales (z_2). On a même dû renoncer à les tracer pour les valeurs de z_3 inférieures à 0,04, tandis que sur la figure 69 *bis* les points (z_3) sont nettement séparés des points (z_2) et ont pu être marqués jusqu'à $z_3 = 0$.

2° Sur la figure 69 l'enveloppe des droites (z_3) n'apparaît pas. Le seul aspect de la figure ne permettrait même pas d'affirmer si cette enveloppe se réduit ou non à un point. Sur la figure 69 *bis*, au contraire, ainsi que sur tout nomogramme à points alignés, la construction même de ces points fait connaître le tracé de la courbe qui leur sert de support. On verra par la suite (n° 90) que cette circonstance est, en certains cas, d'un haut intérêt.

61. *Construction directe des nomogrammes à points alignés.* — Supposons qu'une équation ait été mise sous la forme

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0.$$

D'après ce qui a été vu au n° 58, nous n'aurons, pour obtenir un nomogramme à points alignés de cette équation, qu'à prendre, en coordonnées parallèles u et v, les équations

(z_1) $$uf_1 + vg_1 + h_1 = 0,$$
(z_2) $$uf_2 + vg_2 + h_2 = 0,$$
(z_3) $$uf_3 + vg_3 + h_3 = 0.$$

Pour construire chacun de ces systèmes de points cotés nous pouvons obtenir individuellement chaque point (z_i) par la rencontre de deux droites (u, v) particulières dont les coordonnées satisfassent à l'équation

$$uf_i + vg_i + h_i = 0,$$

et notamment des droites $\left(u = 0,\ v = -\dfrac{h_i}{g_i}\right)$ et $\left(u = -\dfrac{h_i}{f_i},\ v = 0\right)$, ou bien par le tracé d'une seule de ces droites (u, v) sur laquelle (avec les notations du n° 58) on marque le point défini en vertu de la formule (2 *bis*) de ce numéro, par

$$x_0 = \delta\, \frac{g_i - f_i}{f_i + g_i}.$$

On peut aussi, en prenant les mêmes axes cartésiens Ox et Oy qu'au n° 68 et représentant toujours par δ *la moitié de la longueur* AB, se servir des coordonnées

$$x = \delta \frac{g_i - f_i}{f_i + g_i}, \qquad y = \frac{-h_i}{f_i + g_i}$$

du point considéré.

On pourra enfin, lorsque les fonctions f_i, g_i, h_i s'exprimeront sous forme algébrique et entière au moyen d'une seule fonction de z_i, recourir aux constructions simplifiées dont il sera question plus loin (n° 65).

Si P_1 et Q_1, P_2 et Q_2 sont les points correspondant respectivement aux valeurs limites a_1 et b_1 de z_1, a_2 et b_2 de z_2, on tirera les droites P_1P_2, P_1Q_2, P_2Q_1, Q_1Q_2 qui, sur le support du système (z_3), détermineront quatre points, dont deux extrêmes et deux intermédiaires. En aucun cas on n'aura à construire de points (z_3) en dehors de ces points extrêmes.

Ici encore la transformation homographique, puisqu'elle conserve l'alignement des points, pourra être utilisée. Comme au n° 43, on obtiendra ainsi les trois systèmes de points

$$\begin{array}{ll} (z_1) & u(\lambda f_1 + \mu g_1 + \nu h_1) + v(\lambda' f_1 + \mu' g_1 + \nu' h_1) + \lambda'' f_1 + \mu'' g_1 + \nu'' h_1 = 0, \\ (z_2) & u(\lambda f_2 + \mu g_2 + \nu h_2) + v(\lambda' f_2 + \mu' g_2 + \nu' h_2) + \lambda'' f_2 + \mu'' g_2 + \nu'' h_2 = 0, \\ (z_3) & u(\lambda f_3 + \mu g_3 + \nu h_3) + v(\lambda' f_3 + \mu' g_3 + \nu' h_3) + \lambda'' f_3 + \mu'' g_3 + \nu'' h_3 = 0, \end{array}$$

les paramètres λ, μ, ..., ν'' étant quelconques et astreints à la seule condition que leur déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Ces équations (z_1), (z_2), (z_3) font alors connaître une infinité de nomogrammes à points alignés correspondant à l'équation proposée. On pourra fixer les valeurs des paramètres λ, μ, ..., ν'' en vue d'obtenir, pour le nomogramme, une disposition aussi favorable que possible. Nous reviendrons plus loin (n° 63) sur ce point.

En tout cas, puisque ces paramètres sont au nombre de 9 sous forme homogène, ce qui équivaut à 8 indépendants, nous voyons que

nous pouvons toujours disposer arbitrairement de quatre points du nomogramme.

Remarque. — Il arrivera souvent que, lorsque deux systèmes de points cotés, (z_1) et (z_2) par exemple, auront été construits, le troisième (z_3) s'en déduira immédiatement. Cette circonstance se produira lorsque, pour chaque valeur attribuée à z_3, on pourra sans calcul, ou du moins par un calcul très simple, déterminer deux couples correspondants de valeurs pour z_1 et z_2. Chacun de ces couples définira une position de l'index que l'on marquera au crayon. La rencontre des deux droites ainsi tracées donnera le point coté au moyen de la valeur z_3 considérée.

Si même le support du système (z_3) est une droite connue d'avance, une seule position de l'index, et, par suite, un seul couple de valeurs de z_1 et z_2, suffira pour obtenir le point coté z_3.

62. *Emploi des coordonnées cartésiennes*. — Les coordonnées parallèles nous ont permis de faire dériver corrélativement les nomogrammes à points alignés du même principe que les nomogrammes à droites concourantes; elles nous seront, en outre, d'un grand secours, pour définir immédiatement les points cotés correspondant aux divers types d'équations se rencontrant fréquemment dans la pratique (sections II et III). Mais il est bien clair que la théorie des points alignés peut se faire également en coordonnées cartésiennes, de même que ces coordonnées permettent, si l'on veut, de démontrer les propositions obtenues dualistiquement par le moyen de la transformation par polaires réciproques.

Il suffit de remarquer, en effet, que l'équation

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0$$

exprime aussi l'alignement des trois points définis en coordonnées cartésiennes, par

$$x = \frac{f_1}{h_1}, \qquad y = \frac{g_1}{h_1},$$

$$x = \frac{f_2}{h_2}, \qquad y = \frac{g_2}{h_2},$$

$$x = \frac{f_3}{h_3}, \qquad y = \frac{g_3}{h_3},$$

ou, en coordonnées homogènes, par

$$x = f_1, \quad y = g_1, \quad t = h_1,$$
$$x = f_2, \quad y = g_2, \quad t = h_2,$$
$$x = f_3, \quad y = g_3, \quad t = h_3,$$

Tous les nomogrammes qui se déduiront homographiquement de celui-ci seront dès lors donnés par les formules

$$x = \frac{\lambda_0 f_1 + \mu_0 g_1 + \nu_0 h_1}{\lambda''_0 f_1 + \mu''_0 g_1 + \nu''_0 h_1}, \qquad y = \frac{\lambda'_0 f_1 + \mu'_0 g_1 + \nu'_0 h_1}{\lambda''_0 f_1 + \mu''_0 g_1 + \nu''_0 h_1},$$
$$x = \frac{\lambda_0 f_2 + \mu_0 g_2 + \nu_0 h_2}{\lambda''_0 f_2 + \mu''_0 g_2 + \nu''_0 h_2}, \qquad y = \frac{\lambda'_0 f_2 + \mu'_0 g_2 + \nu'_0 h_2}{\lambda''_0 f_2 + \mu''_0 g_2 + \nu''_0 h_2},$$
$$x = \frac{\lambda_0 f_3 + \mu_0 g_3 + \nu_0 h_3}{\lambda''_0 f_3 + \mu''_0 g_3 + \nu''_0 h_3}, \qquad y = \frac{\lambda'_0 f_3 + \mu'_0 g_3 + \nu'_0 h_3}{\lambda''_0 f_3 + \mu''_0 g_3 + \nu''_0 h_3},$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 & \mu_0 & \nu_0 \\ \lambda'_0 & \mu'_0 & \nu'_0 \\ \lambda''_0 & \mu''_0 & \nu''_0 \end{vmatrix}$$

étant supposé différent de zéro.

On voit que le nomogramme correspondant à un système de valeurs de λ_0, μ_0, ..., ν''_0 sera identique à celui que donnent les dernières formules (z_1), (z_2), (z_3) du numéro précédent avec un certain système de valeurs de λ, μ, ..., ν'', lorsque l'on aura

$$\lambda_0 = \lambda' - \lambda, \quad \mu_0 = \mu' - \mu, \quad \nu_0 = \nu' - \nu,$$
$$\lambda'_0 = -\lambda'', \quad \mu'_0 = -\mu'', \quad \nu'_0 = -\nu'',$$
$$\lambda''_0 = \lambda' + \lambda, \quad \mu''_0 = \mu' + \mu, \quad \nu''_0 = \nu' + \nu.$$

En particulier, on retrouvera le nomogramme donné par les premières formules (z_1), (z_2), (z_3) du numéro précédent, en prenant

$$\lambda_0 = -1, \quad \mu_0 = 1, \quad \nu_0 = 0,$$
$$\lambda'_0 = 0, \quad \mu'_0 = 0, \quad \nu'_0 = -1,$$
$$\lambda''_0 = 1, \quad \mu''_0 = 1, \quad \nu''_0 = 0.$$

63. *Transformation homographique des nomogrammes à points alignés. Quadrangle limite.* — La transformation homographique conservant l'alignement des points peut être d'un grand secours pour donner à un nomogramme du genre ici étudié la meilleure disposition.

En particulier, si l'on considère le quadrangle formé par les points qui correspondent aux valeurs limites a_1 et b_1, a_2 et b_2 des variables z_1 et z_2 prises comme indépendantes, quadrangle qui forme le cadre de la partie utile de l'abaque, on peut le faire coïncider avec un rectangle de hauteur h dont les sommets seront définis, par exemple, par

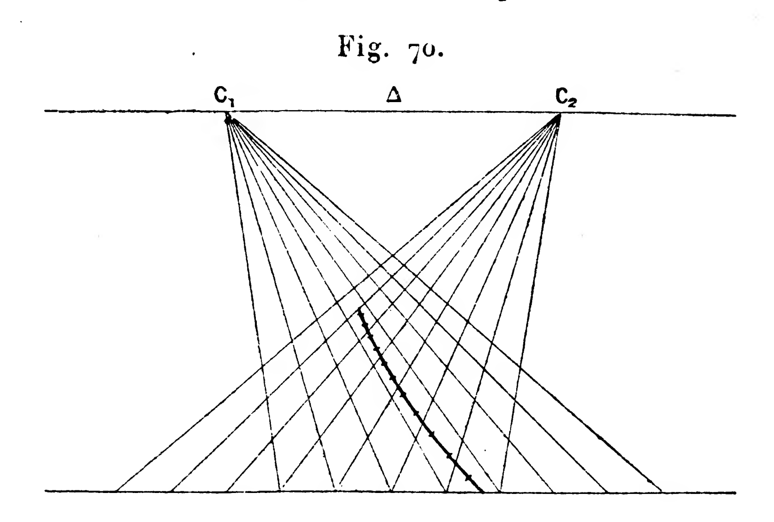
$$(a_1) \qquad u = 0,$$
$$(b_1) \qquad u = h,$$
$$(a_2) \qquad v = 0,$$
$$(b_2) \qquad v = h.$$

Le problème est analytiquement le même que celui qui a été traité au n° 44 et conduira aux valeurs à adopter pour λ, μ, ..., ν'' dans les dernières équations (z_1), (z_2) et (z_3) du n° 61. On trouvera plus loin (n° 86) un exemple détaillé d'un tel calcul.

Si l'on se propose de substituer à un nomogramme déjà construit, dont le quadrangle limite est quelconque, un autre nomogramme ayant pour quadrangle limite un rectangle donné, il suffira de recourir à la construction géométrique indiquée au n° 44.

Mais la transformation homographique peut encore être utilisée à d'autres points de vue, par exemple pour remédier au défaut consistant en ce que les intervalles correspondant à des échelons égaux se resserrent trop dans une partie d'échelle, alors qu'au contraire ils se dilatent notablement dans une autre. Pour définir la transformation homographique qui convient en pareil cas, le capitaine (depuis lors lieutenant-colonel) Lafay a eu l'idée de recourir à un procédé, en quelque sorte expérimental, qui mérite d'être signalé.

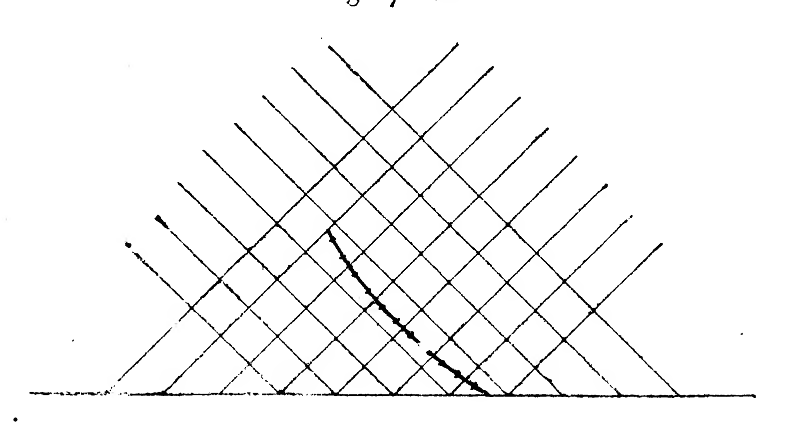
Fig. 70.



Imaginons qu'on ait dessiné sur deux transparents portant chacun un axe, Δ_1 ou Δ_2, deux faisceaux de droites identiques ayant leurs centres C_1

et C_2 sur ces axes et déterminant sur chaque parallèle à ces axes des segments égaux entre eux, puis plaçons ces transparents sur le nomogramme construit en mettant en coïncidence leurs axes Δ_1 ou Δ_2, qui se réduisent alors à un seul Δ. En faisant varier la position de la droite Δ sur le transparent, et celle de centres C_1 et C_2 sur la droite Δ, on engendre une infinité de réseaux auxquels on peut rapporter l'abaque et l'on arrive, par tâtonnement, à placer les divisions les plus dilatées de l'échelle que l'on veut transformer dans les mailles les plus dilatées de ce réseau, les divisions les plus resserrées dans les mailles les plus resserrées (*fig.* 70). Si donc, par une transformation homographique rejetant la droite Δ à l'infini, on substitue à ce réseau, formé de deux faisceaux convergents, un quadrillage régulier formé par deux systèmes de droites à angle droit (*fig.* 70 *bis*), toutes les mailles devenant identiques

Fig. 70 *bis*.



entre elles, les parties, qui tout à l'heure étaient trop dilatées, se seront contractées, et réciproquement. Cette idée théorique est ingénieuse, mais il s'agissait de la rendre pratique; voici comment M. Lafay y est parvenu ([1]).

Il a considéré le nomogramme déjà construit **N** comme une perspective du nomogramme **N'** qu'on veut lui substituer, *en prenant les points* C_1 *et* C_2 *comme points principaux de distance*. Dans ces conditions, les faisceaux de centres C_1 et C_2 de la perspective deviennent des systèmes de droites parallèles inclinées à 45°, les unes dans un sens, les autres dans l'autre, sur la ligne de terre, ou, ce qui revient au même, sur la ligne Δ prise comme ligne d'horizon. Il suffit alors de se donner la ligne de terre A'B' parallèlement à Δ ou AB, pour pouvoir effectuer la restitution perspective (*fig.* 71).

Si, par C_1 et C_2, on mène les droites C_1V et C_2V à 45° sur C_1C_2, on a le rabattement V du point de vue sur le tableau. Par suite, la transformée de toute droite sera parallèle à la droite joignant le point V au point de rencontre de cette droite et de Δ. En particulier, aux axes Ox et Oy correspondront les axes $O'x'$ et $O'y'$ menés respectivement par les points A' et B' parallèlement aux droites VA et VB.

([1]) A l'occasion d'une intéressante application à la représentation nomographique des formules de Fresnel pour la réflexion vitrée (*Journal de Physique théorique et appliquée,* 3e série, t. VIII, 1899, p. 96).

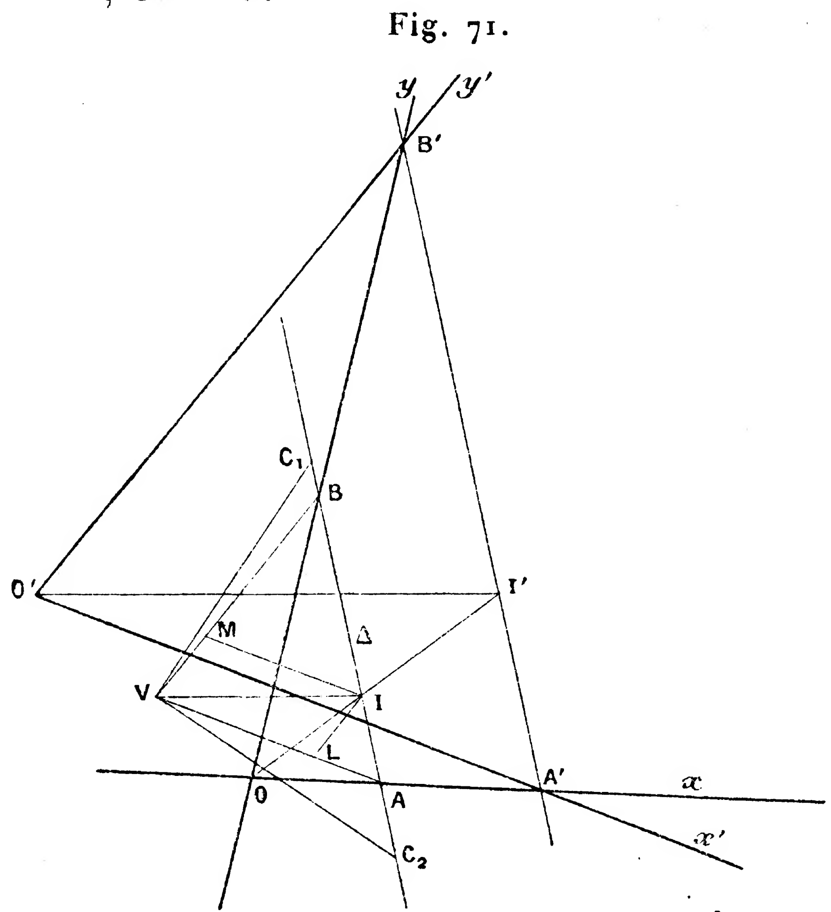
De même, si la bissectrice OI de l'angle des axes Ox et Oy coupe AB en I et A′B′ en I′, la droite O′I′ qui correspond à OI est parallèle à VI.

Si l'on rapporte le nomogramme **N** aux axes Ox et Oy, le nomogramme **N′** aux axes $O'x'$ et $O'y'$, puisque, d'une part, Ox correspond à $O'x'$, et Oy à $O'y'$, que, d'autre part, la droite AB correspond à la droite de l'infini sur $O'x'y'$, on voit que les formules de transformation seront

$$x' = \frac{mx}{bx + ay - ab}, \qquad y' = \frac{ny}{bx + ay - ab},$$

si l'on pose $OA = a$, $OB = b$.

Fig. 71.



Pour déterminer les paramètres m et n, ou plutôt leur rapport, il suffit de remarquer que l'équation de la droite O′I′, qui correspond, ainsi qu'il vient d'être dit, à OI, ou $x = y$, est

$$nx' = my'.$$

Or, nous venons de voir que $O'x'$, $O'y'$ et O′I′ sont respectivement parallèles à VA, VB et VI. Si donc nous menons par I les parallèles IL et IM à VB et VA, nous avons

$$\frac{m}{n} = \frac{VL}{VM}.$$

En résumé, une fois placés sur le nomogramme primitif, les points C_1 et C_2, d'où se déduit immédiatement V, la transformation voulue est définie par les formules ci-dessus, lorsqu'on prend deux axes $O'x'$ et $O'y'$ comprenant entre eux un angle égal à AVB et que l'on fait $a = OA$, $b = OB$, $m = \mu . VL$,

$n = \mu . VM$, μ étant un module dont on dispose en vue de l'échelle qu'on veut adopter.

M. Farid Boulad a donné, en vue du même objet, un autre procédé dont nous nous bornerons à faire connaître le principe, qui est ingénieux [1] : supposons qu'ayant dessiné sur un transparent un faisceau de droites faisant entre elles des angles égaux assez petits, on ait pu, par tâtonnement, faire sensiblement passer les rayons de ce faisceau par les points de division irrégulièrement espacés de l'échelle courbe E qu'on veut transformer. Fixant le transparent dans cette position, appelons O son centre de rayonnement, OA et OB ceux de ses rayons qui passent par les points extrêmes A et B de l'échelle E, OM la bissectrice de l'angle AOB qui rencontre E en M; cela fait, coupons le faisceau par un arc de cercle de rayon quelconque et de centre O, qui coupe OA, OB, OM en A', B', M'. Les trois couples de points homologues A et A', B et B', M et M' définissent une homologie de pôle O, dans laquelle les points homologues des points de division de E sont sur des rayons qui divisent l'angle AOB en parties égales. Le support de l'échelle E', transformée de E, ayant en commun avec l'arc de cercle AMB ses extrémités A et B et son milieu M, en différera généralement fort peu; par suite, les rayons qui, sur cet arc de cercle, donneraient des divisions rigoureusement égales, donneront, sur le support de E', des divisions qui seront près de l'être, ce qui est le résultat recherché.

64. *Fractionnement des nomogrammes à points alignés.* — Le tracé d'un nomogramme à points alignés ne comportant que trois échelles simples, on pourra sur une même feuille placer côte à côte plusieurs nomogrammes de cette espèce. De là la possibilité de fractionner un tel nomogramme, ses diverses fractions étant groupées sur un même tableau. Pour nous placer à un point de vue tout à fait général, supposons l'échelle (z_1) fractionnée entre ses limites a_1 et b_1 en n_1 tronçons et l'échelle (z_2) entre ses limites a_2 et b_2 en n_2 tronçons. Associant chacun des premiers à chacun des seconds, on voit qu'on aura ainsi à construire $n_1 n_2$ nomogrammes partiels.

Mais, ainsi qu'on l'a déjà remarqué au n° 34, il arrivera souvent, en pratique, que l'on n'aura pas besoin d'associer toutes les valeurs de z_1 comprises entre a_1 et b_1 à toutes les valeurs de z_2 comprises entre a_2 et b_2. Cela permettra, dans bien des cas, de réduire le nombre des nomogrammes partiels à substituer au nomogramme total qu'on aura fractionné. Si, par exemple, il existe respectivement dans les intervalles de a_1 à b_1 et de a_2 à b_2 des valeurs c_1 et c_2 telles que

---

(1) *Association française pour l'avancement des Sciences*, Congrès de Toulouse, 1910, p. 37.

les variables z_1 et z_2 soient ensemble supérieures ou inférieures respectivement à c_1 et à c_2, on n'aura besoin que d'associer le tronçon de a_1 à c_1 au tronçon de a_2 à c_2 et le tronçon de c_1 à b_1 au tronçon de c_2 à b_2, ce qui ne fera que deux au lieu de quatre nomogrammes partiels à construire à la place du nomogramme total qui associerait l'intervalle de a_1 à b_1 à l'intervalle de a_2 à b_2.

Il arrivera, en outre, que plusieurs des tronçons des échelles fractionnées seront superposables, sinon comme graduation, du moins comme support, ce qui introduira encore une simplification notable dans le dessin.

65. *Systèmes algébriques de points cotés.* — Avant d'examiner les principales variétés d'équations représentables par la méthode des points alignés, nous dirons quelques mots de la construction de certains systèmes de points cotés qui se rencontrent fréquemment dans les applications.

Si l'équation d'un système de points cotés (z), linéaire en u et v, est algébrique et de degré n en z, on dit que le *système* (z) *est algébrique et de degré* n. Dans ce cas, le *support du système est, en général, une courbe d'ordre* n. Puisque, en effet, à un couple quelconque de valeurs données pour u et v l'équation fait correspondre, en général, n valeurs pour z, c'est que, sur une droite donnée quelconque, il se trouve n points du système considéré, ce qui établit la proposition.

Parmi ces systèmes algébriques, les plus intéressants à envisager, au point de vue des applications, sont ceux du premier et du deuxième degré.

Un *système* (z) *du premier degré* est défini par une équation telle que

$$U + zV = 0,$$

où U et V sont des fonctions linéaires en u et v.

Le support de ce système est la droite qui joint les points $U = 0$ et $V = 0$, et puisque la position du point (z) sur cette droite dépend linéairement du paramètre z, on voit que ces points (z) forment une échelle homographique. Ainsi donc *tout système de points du premier degré se confond avec une échelle homographique*, et, par

suite, d'après ce qui a été vu au n° 7, un tel système peut être aisément construit lorsqu'on a déterminé trois de ses points.

Un *système du second degré* est défini par une équation telle que

$$U + zV + z^2 W = 0,$$

où U, V et W sont encore des fonctions linéaires en u et v.

Le support de ce système est une conique Γ dont l'équation en coordonnées parallèles est

$$V^2 - 4UW = 0.$$

Mais il sera généralement plus commode de former son équation cartésienne par l'élimination de z entre les formules donnant les coordonnées x et y du point défini par l'équation ci-dessus.

Nous pourrions reprendre corrélativement ici tout ce qui a été dit à propos des systèmes de droites du deuxième degré (n° 39). Nous aboutirions ainsi au résultat que voici :

Les projections de tous les points du système (z) *à partir de l'un d'eux sur une droite quelconque forment une échelle homographique.*

Il suffira de prendre cette droite parallèle à celle joignant le centre du faisceau au point coté (∞) pour que cette échelle soit métrique ([1]).

De même aussi que dans le cas d'un système de droites, on aura (*fig.* 72) :

pour $z = 0$, le point $U = 0$ ou M,
pour $z = \infty$, le point $W = 0$ ou N,

et le point de rencontre des tangentes en ces points à la conique Γ sera

$$V = 0 \quad \text{ou} \quad P.$$

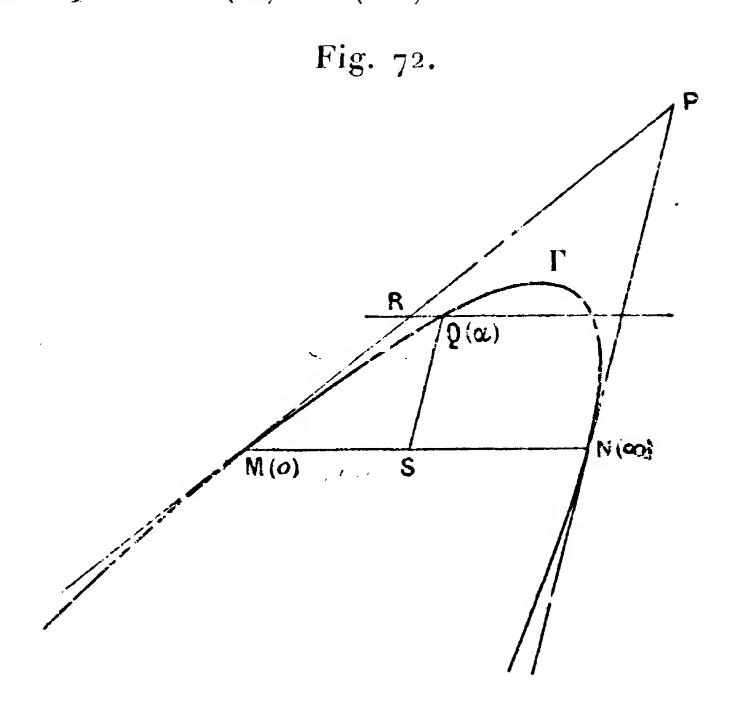
Déterminons, en outre, le point Q correspondant à une valeur particulière z_0, et par le point Q menons les parallèles QR et QS à MN et NP.

Les droites du faisceau de centre M passant par les points (0), (z_0) et (∞) coupent QR en R, en Q et à l'infini. Donc, *la projection du*

([1]) Il va sans dire, puisqu'on peut prendre une parallèle quelconque à cette direction, qu'on la choisira dans la pratique, de façon que son module soit exactement égal à l'une des subdivisions de l'étalon métrique dont on dispose, c'est-à-dire du double décimètre.

système faite à partir de M *sur* QR *est une échelle métrique ayant* R *et* Q *pour points* (o) et (z_0).

Fig. 72.



De même, *la projection faite sur* QS *à partir de* N *est une échelle métrique ayant* S *et* Q *pour points* (*o*) et (z_0).

Remarque I. — Il est à peine besoin d'ajouter que si, dans tout ce qui précède, on remplace la variable z par une fonction quelconque f de cette variable, la théorie subsiste intégralement, à cette seule différence près que l'échelle d'où, par projection, on déduira l'échelle demandée, sera celle de la fonction f au lieu d'être une échelle métrique.

Remarque II. — Nous avons vu (n° 63) que, par application de l'homographie la plus générale, on peut se donner arbitrairement quatre points cotés quelconques d'un nomogramme à points alignés; d'autre part, nous venons de reconnaître que toute échelle conique est entièrement déterminée par quatre de ses points cotés; il suit de là, ainsi que l'a remarqué M. Clark [1], que, lorsqu'une échelle conique figure sur un nomogramme à points alignés, on peut toujours faire en sorte que le support de cette échelle soit un cercle. Si, en effet, α, β, γ, δ sont les valeurs de la fonction f, que l'on fait correspondre aux sommets A, B, C, D du rectangle limite et si AT est la tangente en A à la conique support (*fig.* 72 *bis*), on a, pour le rapport anharmonique ρ du faisceau A(TBCD),

$$\rho = \frac{\delta - \alpha}{\delta - \gamma} \times \frac{\beta - \gamma}{\beta - \alpha}.$$

Or ce rapport est aussi donné par

$$\rho = \frac{\sin(D, A)\sin(B, C)}{\sin(D, C)\sin(B, A)}.$$

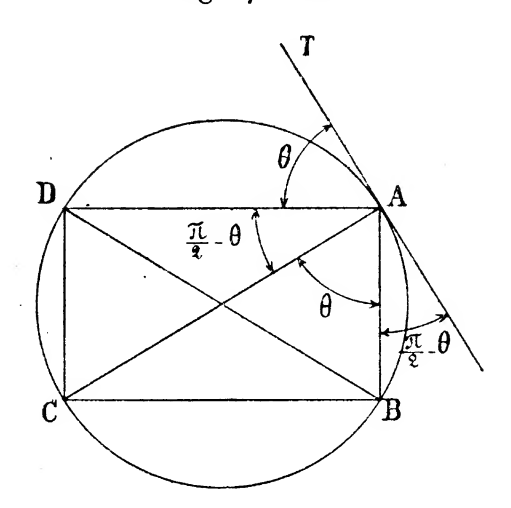
---

(1) A propos d'une application particulière que l'on trouvera plus loin (n° 84).

Si le support est un cercle, on a

$$(D, A) = (B, C) = \theta, \qquad (D, C) = (B, A) = -\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

Fig. 72 *bis*.



Il en résulte que

$$\tan g^2 \theta = \rho,$$

et il suffit de donner à θ la valeur tirée de là, ρ ayant la valeur ci-dessus, pour que l'échelle soit circulaire.

Remarque III. — Il est clair que l'artifice appliqué, au n° 39, à une équation du second degré, par rapport au paramètre variable, si on l'étend à une équation de degré n, montre que le faisceau projectif de tout système de points du $n^{\text{ième}}$ degré, à partir de l'un d'eux, est également projectif d'un système du $n - 1^{\text{ième}}$ degré et, par suite, que ce système du $n^{\text{ième}}$ degré peut être obtenu par rencontre des rayons correspondants de deux faisceaux projectifs de systèmes du $n - 1^{\text{ième}}$ degré, ce qui, de proche en proche, ramène la construction à des projections successives à partir de systèmes du premier degré, c'est-à-dire d'une échelle métrique, si le paramètre se confond avec la variable z, et de l'échelle de la fonction f, si c'est cette fonction qui est prise pour paramètre. On verra plus loin (n° 80) un exemple d'une telle circonstance.

66. *Système particulier du second degré.* — Prenons comme exemple le système défini par l'équation

$$z^2 + uz + v = 0.$$

Ici, t étant une variable d'homogénéité, on a :

pour $z = 0$, $\quad v = 0 \quad$ ou B,
pour $z = \infty$, $\quad t = 0 \quad$ ou le point I à l'infini sur Au et Bv.

Les tangentes en B et I se coupent au point $u = 0$ ou A (*fig.* 73).

La conique Γ est donc une hyperbole tangente en B à AB et ayant Au pour asymptote.

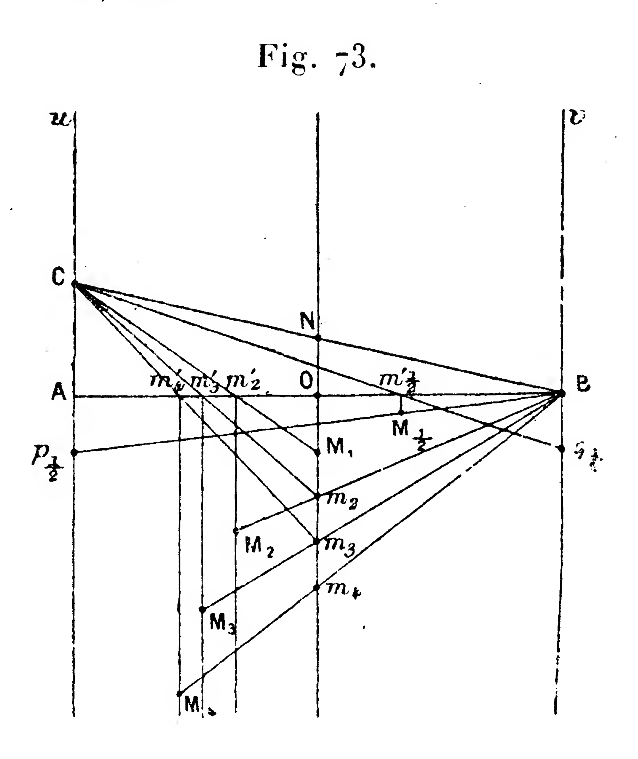
Pour $z = 1$, on a

$$u + v + 1 = 0,$$

c'est-à-dire le point M_1 situé sur la parallèle équidistante des axes, et tel que $OM_1 = -\frac{1}{2}$.

Si nous projetons les points B, M_1 et I à partir de B sur OM_1, nous avons les points O coté (0), M_1 coté (1) et I, à l'infini, coté (∞), donc une échelle métrique. Par suite, en portant sur OM_1 les segments M_1m_2, m_2m_3, m_3m_4, ... égaux à OM_1, nous aurons les rayons Bm_2, Bm_3, Bm_4, ..., sur lesquels devront se trouver M_2, M_3, M_4, ...

Fig. 73.



Projetons maintenant les points B, M_1 et I à partir de I sur AB; cela nous donne les points B coté (0), O coté (1) et A coté (∞). Prenons le symétrique N de M_2 par rapport à O; tirons BN qui coupe Au en C et projetons l'échelle AB à partir de C sur ON. Les points B, O et A nous donnent les points N coté (0), O coté (1) et I, à l'infini, coté (∞). L'échelle sera donc métrique et, puisque, par construction, $NO = OM_1$, le point coté (2) coïncidera avec M_1, le point coté (3) avec m_2, le point coté (4) avec m_3, ... Les rayons CM_1, Cm_2, Cm_3 ... nous donneront donc sur AB les points m'_2, m'_3, m'_4, ... A leur tour, les rayons unissant ces points au point I, c'est-à-dire les parallèles aux axes menées par ces points couperont les rayons correspondants Bm_2, Bm_3, Bm_4, ... aux points M_2, M_3, M_4, ... qui sont les points cotés (2), (3), (4) dans le système considéré.

La construction est absolument générale : *pour avoir le point* M_z, *coté* (z), *porter sur* OM_1 *les segments* $Om_z = \frac{z}{2}$, $Nm_{z-1} = \frac{z}{2}$; *tirer la droite* Cm_{z-1} *qui coupe* AB *au point* m'_z: *la parallèle aux axes menée par* m'_z *coupe le rayon* Bm_z *au point* M_z *cherché.*

Si l'on prolonge Bm_z jusqu'en sa rencontre p_z avec Au, et Cm'_z jusqu'en sa

rencontre q_z avec Bv, on voit que

$$Ap_z = 2\,O\,m_z = z$$

et

$$Bq_z = 2\,N\,m_{z-1} = z.$$

De là une variante de la construction, indiquée sur la figure pour $z = \frac{1}{2}$.

Nous allons étudier maintenant plus en détail les nomogrammes de genres divers (n° 57, dernier alinéa) auxquels s'applique la méthode des points alignés.

II. — Nomogrammes de genre zéro.

A. — Nomogrammes a trois échelles parallèles [1].

67. *Type des équations correspondantes.* — Ces équations sont celles de la forme [2]

$$(E) \qquad f_1 + f_2 = f_3$$

auxquelles est applicable la méthode des abaques hexagonaux (n° 31).

Rappelons qu'on y ramène aussi celles de la forme

$$f_1 f_2 = f_3$$

en les écrivant

$$\log f_1 + \log f_2 = \log f_3.$$

Pour représenter l'équation (E) ci-dessus par un nomogramme à points alignés, posons [3]

$$(z_1) \qquad u = \mu_1 f_1,$$

$$(z_2) \qquad v = \mu_2 f_2,$$

---

[1] Tout nomogramme à points alignés comportant trois échelles rectilignes concourantes peut être ramené à ce type par une transformation homographique rejetant à l'infini le point de concours des trois supports.

[2] *Voir* le premier renvoi du n° 57 (p. 156).

[3] Nous supposons que z_1 et z_2 sont des variables indépendantes naturelles de la question (*voir* le second renvoi du n° 16).

Quoique ce ne soit pas rigoureusement indispensable, il est préférable, au point de vue de la précision, que l'échelle du *résultat* (z_3) se trouve *entre* les échelles des *données* (z_1) et (z_2).

Par suite, si l'équation (E) s'écrit

$$f_1 - f_2 = f_3,$$

les fonctions f_1 et f_2 étant positives, on pose

$$u = \mu_1 f_1, \qquad v = -\mu_3 f_2.$$

ce qui nous donne, pour les points (z_3),

$$\frac{u}{\mu_1} + \frac{v}{\mu_2} = f_3,$$

équation qui, avec le choix d'axes que nous sommes convenus de faire (n° 58) définit, en coordonnées cartésiennes, les points

$$x = \delta\,\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \qquad y = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} f_3.$$

L'expression de x ne renfermant que des constantes, on voit que les points (z_3) sont distribués sur une parallèle Cw aux axes, dont le point de rencontre C avec AB (*fig.* 67, p. 159) est tel que [formule (3) du n° 58]

(1) $$\frac{CA}{CB} = -\frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Si donc nous représentons par

(z_3) $$w = \mu_3 f_3$$

l'échelle de la fonction déterminée sur cet axe, nous voyons, puisque w se confond avec y, que nous avons

$$\mu_3 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

ou

(2) $$\frac{1}{\mu_3} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}.$$

En résumé, ayant choisi arbitrairement les modules μ_1 et μ_2, et en ayant déduit le module μ_3 par la formule (2), nous voyons que pour construire le nomogramme de l'équation (E) ci-dessus, *il suffit, ayant pris sur la droite* AB *le point* C *déterminé par la formule* (1), *de mener par les points* A, B, C *trois axes parallèles* Au, Bv, Cw *et de porter sur ces trois axes à partir de leurs origines* A, B, C, *respectivement les échelles définies par les formules* (z_1), (z_2) *et* (z_3).

Pratiquement, on disposera les parties utiles des échelles sans avoir égard à la position des origines A, B, C sur les axes, ainsi qu'on le verra au numéro suivant.

Remarque. — Dans le cas particulier où l'on prend sur les axes

Au et Bv des modules égaux $\mu_1 = \mu_2$, la formule (1) montre que Cw se confond avec Oy, et la formule (2) que l'on a $\mu_3 = \frac{\mu_1}{2}$, ce qui d'ailleurs était évident *a priori*.

68. *Disposition et limitation des échelles.* — C'est la libre disposition que l'on a des modules μ_1 et μ_2 qui fait toute la souplesse de la méthode. Rappelons que, dans la méthode des abaques hexagonaux [1], ces modules sont *nécessairement* égaux; il en résulte que si, a_1 et b_1, a_2 et b_2 étant les limites respectives de z_1 et de z_2, les différences $f_1(b_1) - f_1(a_1)$ et $f_2(b_2) - f_2(a_2)$ présentent entre elles un notable écart, il en est de même des longueurs des échelles (z_1) et (z_2). Avec la présente méthode, on est libre, dans tous les cas, de donner aux échelles *la même longueur*, ou, tout au moins, des longueurs suffisamment rapprochées si l'on a, par ailleurs, à satisfaire à d'autres convenances.

On peut tout d'abord se donner arbitrairement la longueur L des échelles qui appartiennent en général à la catégorie des échelles dites *usuelles* (n° **5**) ou de leurs dérivées (n° **6**). Les modules μ_1 et μ_2 sont alors donnés respectivement par

$$\mu_1 = \frac{L}{f_1(b_1) - f_1(a_1)}, \qquad \mu_2 = \frac{L}{f_2(b_2) - f_2(a_2)},$$

et le module μ_3 par la formule (2) du n° **67**. On peut faire alors l'analyse des échelles (z_1), (z_2) et (z_3), comme cela a été indiqué au n° **2**.

Si cette analyse fait reconnaître que certains intervalles sont trop petits, il n'y a qu'à multiplier les trois modules d'abord choisis par un même nombre.

Portons alors sur deux axes parallèles les échelles (z_1) allant du point P_1 au point Q_1, et (z_2) allant du point P_2 au point Q_2 (*fig.* 74) [2].

L'inclinaison de l'axe AB, non tracé, des origines, par rapport aux axes de coordonnées Au et Bv étant quelconque, nous sommes

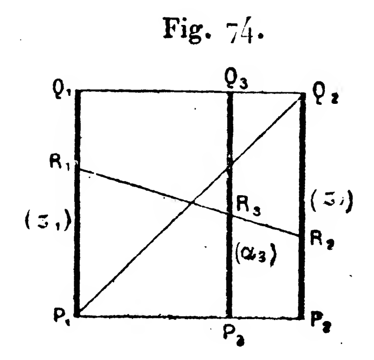
---

[1] Rappelons aussi que cette méthode exige le maintien de l'orientation du transparent, sujétion dont est affranchie la présente méthode.

[2] Sur cette figure et les suivantes la portion graduée de chaque axe est indiquée par un trait gras.

libres de choisir les points P_1 et P_2 sur une même perpendiculaire à ces axes. Les longueurs des échelles étant égales, la figure $P_1 Q_1 Q_2 P_2$

Fig. 74.



formée par ces échelles est un rectangle. Puisque l'échelle (z_3) sera parallèle à celles-ci, le plus petit angle sous lequel elle sera rencontrée par l'index servant à la lecture sera égal à l'angle $Q_1 P_1 Q_2$. Comme, d'autre part, l'écartement des axes est quelconque, nous pourrons en disposer de façon à donner à cet angle telle valeur qu'il nous plaira. Si, par exemple, nous adoptons la valeur $45°$, nous n'aurons qu'à prendre l'écartement $P_1 P_2$ des axes égal à la longueur $P_1 Q_1$ des échelles. Le quadrangle limite de l'abaque sera alors constitué par un carré et l'index coupera toujours les supports des échelles sous un angle compris entre $45°$ et $90°$.

Traçons alors la parallèle $P_3 Q_3$ aux axes telle que

$$\frac{P_1 P_3}{P_3 P_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

et choisissons un couple de valeurs z'_1 et z'_2 des variables z_1 et z_2, pour lesquelles la valeur correspondante de z'_3 de la variable z_3 se déduise très aisément de l'équation donnée.

Tirant sur la figure la position correspondante $R_1 R_2$ de l'index nous obtenons sur $P_3 Q_3$ le point R_3 coté z'_3. Connaissant ce point et le module μ_3 nous pouvons très aisément construire l'échelle de la fonction f_3, en la limitant d'ailleurs aux droites $P_1 P_2$ et $Q_1 Q_2$.

Tel est le type théoriquement le plus parfait du nomogramme à supports rectilignes parallèles. On pourra en pratique s'en écarter plus ou moins.

Il est bien évident, par exemple, qui si les valeurs de μ_1 et μ_2 calculées plus haut ne s'expriment pas par des nombres simples, on les arrondira pour qu'il en soit ainsi, ce qui introduira une inégalité entre les longueurs des échelles; d'autre part les nécessités du format pour-

ront conduire à réduire l'écartement des axes et, par suite, à abaisser un peu la limite inférieure 45° qu'on s'était d'abord imposée pour l'angle de l'index avec les supports.

Il peut arriver d'ailleurs que, pratiquement, les valeurs limites de chaque variable z_1 et z_2 n'aient à être associées qu'à une certaine partie de l'échelle de l'autre. Dans ce cas l'échelle (z_3) pourra être réduite de longueur.

Supposons, par exemple, que le nomogramme ne soit utilisé que pour des valeurs de z_1 et de z_2 satisfaisant à une égalité telle que

$$F(z_1, z_2) > 0.$$

Considérons toutes les positions limites de l'index, c'est-à-dire celles qui joignent les points dont les cotes satisfont à l'équation

$$F(z_1, z_2) = 0.$$

Ces positions limites enveloppent une courbe C (*fig.* 75 et 75 *bis*)

Fig. 75.

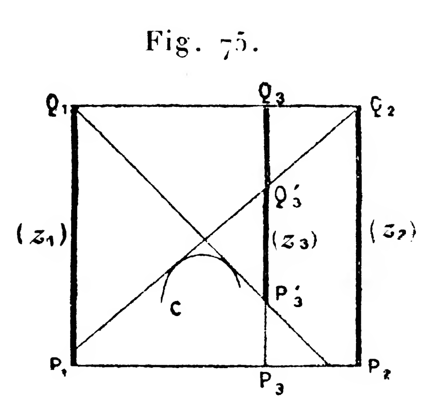
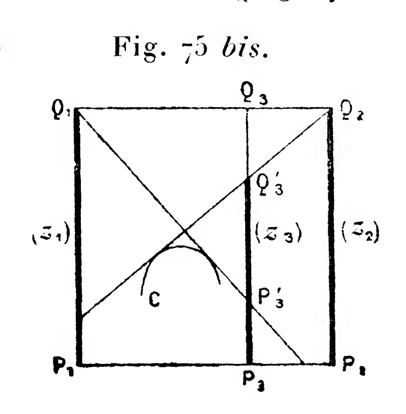


Fig. 75 *bis*.



et l'inégalité de condition signifie, selon le cas, que l'index doit être extérieur à cette courbe, ou, au contraire, la rencontrer. La position extrême de l'index sera l'une des tangentes menées de Q_1 et de Q_2 à la courbe C. Si l'inégalité donnée exprime que l'index doit être extérieur à la courbe C, l'échelle (z_3) ne devra être construite qu'entre les points P'_3 et Q_3 (*fig.* 75); si, au contraire, elle exprime que l'index doit rencontrer la courbe C, l'échelle (z_3) devra être construite entre les points P_3 et Q'_3 (*fig.* 75 *bis*).

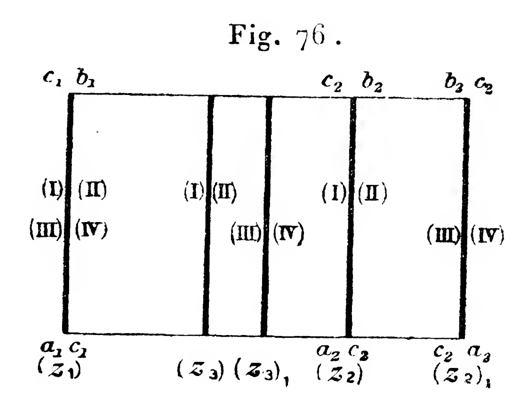
69. *Fractionnement des échelles.* — On peut effectuer le fractionnement des échelles comme dans le cas des abaques hexagonaux. Soient c_1 et c_2 des valeurs des variables z_1 et z_2 intermédiaires entre leurs limites respectives a_1 et b_1, a_2 et b_2.

On pourra fractionner le nomogramme en quatre autres ainsi limités :

I....................	z_1 entre	a_1 et c_1,	z_2 entre	a_2 et c_2,
II....................	z_1 »	c_1 et b_1,	z_2 »	c_2 et b_2,
III....................	z_1 »	a_1 et c_1,	z_2 »	c_2 et b_2,
IV....................	z_1 »	c_1 et b_1,	z_2 »	a_2 et c_2.

Nous pourrons construire le nomogramme I au moyen de trois axes parallèles (z_1), (z_2), (z_3), gradués sur leur côté gauche par exemple (*fig.* 76), et le nomogramme II au moyen des mêmes axes gradués sur leur côté droit, le rapport $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ des modules étant, bien entendu, supposé le même dans les deux cas.

Fig. 76.



De même pour les nomogrammes III et IV en remarquant que l'on peut se resservir pour ceux-ci du même axe (z_1), mais en l'associant avec deux autres nouveaux axes $(z_2)_1$ et $(z_3)_1$.

Les chiffres romains inscrits à côté des diverses graduations indiquent la façon dont elles doivent être associées [1].

D'ailleurs, suivant une remarque déjà faite au n° 34, et sur laquelle il convient d'insister, il arrivera souvent qu'il existera entre a_1 et b_1 d'une part, a_2 et b_2 de l'autre, des valeurs c_1 et c_2 telles qu'une valeur de z_1 inférieure à c_1 n'aura jamais à être prise avec une valeur de z_2 supérieure à c_2, et *vice versa*, ce qui fait qu'il n'y a lieu de considérer que les combinaisons I et II.

Pour ce qui est du fractionnement en un plus grand nombre de parties, il n'y aurait qu'à répéter ici ce qui a été dit à la fin du n° 34.

---

[1] En pratique, ce mode d'association est rendu encore plus frappant au regard par l'emploi de marques de diverses couleurs, une même couleur étant affectée aux portions d'axes qui se correspondent.

70. *Exemples* : 1° *Sixième type de nomogramme pour la multiplication.* — Écrivons encore l'équation de la multiplication sous la forme

$$\log z_1 + \log z_2 = \log z_3.$$

La symétrie de cette équation nous conduit, dans le cas général, à prendre pour les échelles (z_1) et (z_2) des modules μ égaux. Dès lors, le module de l'échelle (z_3), portée sur la parallèle équidistante des deux axes, sera égal à $\frac{\mu}{2}$ (n° 67, Remarque finale). Pour que cette dernière échelle soit du type usuel, il suffit, si z_3 varie de 1 à 100, comme dans les cas précédents, de prendre (n° 5, 2°)

$$\frac{\mu}{2} = 125^{\text{mm}}$$

ou

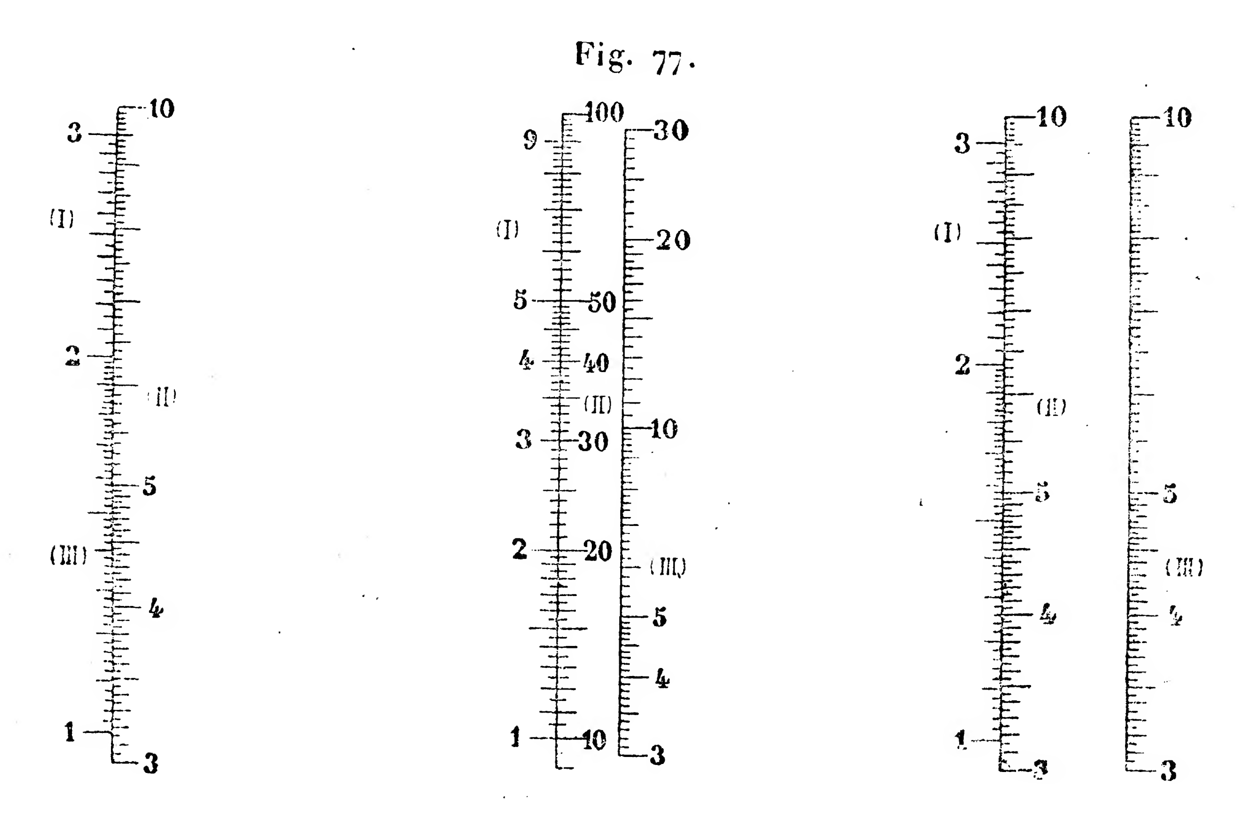
$$\mu = 250^{\text{mm}}.$$

Cela donne, pour la longueur L des échelles [1],

$$L = 125^{\text{mm}}.$$

Afin de réduire les dimensions du tableau, nous fractionnerons les échelles (z_1) et (z_2) vers le milieu de leur longueur, soit au point coté 9, et, suivant ce qui a été vu au n° 69, nous porterons les deux fragments de l'échelle (z_1) de part et d'autre de l'axe des u (*fig.* 77), les deux fragments de l'échelle (z_2) de part

Fig. 77.



et d'autre de l'axe des v, ce qui donnera pour (z_3) deux fragments de part et d'autre de la parallèle équidistante des deux premiers.

---

(1) La figure 77 est une réduction du nomogramme construit avec ces modules.

En outre, le point coté 3 du second fragment des échelles (z_1) et (z_2) a été disposé de telle sorte que le point coté 10 du second fragment de l'échelle (z_3) se trouve en face du point coté 1 du premier, ce qui fait que les points cotés 2 et 20, 3 et 30, ..., et, généralement, z_3 et $10\,z_3$ coïncident également.

Enfin, pour associer un nombre du premier fragment de (z_1) à un nombre du second fragment de (z_2), nous répéterons celui-ci sur un nouvel axe des v, en portant le fragment correspondant de (z_3) sur la parallèle équidistante de ce nouvel axe des v et de l'axe des u.

Ce dernier fragment se compose des tronçons de 3 à 9 d'une part, et de 9 à 30 de l'autre, empruntés aux deux premiers fragments de (z_3) et il suffit, pour le disposer, de remarquer que son point 3 doit se trouver sur la droite qui joint le point 1 du premier fragment de (z_1) au point 3 du troisième fragment de (z_2).

Les fragments qui doivent être associés ensemble sont marqués d'un même chiffre romain.

2° *Moments d'inertie des rectangles* (1). — Le moment d'inertie I d'un rectangle de base b et de hauteur h, par rapport à la parallèle à sa base menée par son centre, est donné par la formule

$$\mathrm{I} = \frac{bh^3}{12},$$

qui peut s'écrire

$$\log b + 3\log h = \log 12 + \log \mathrm{I}.$$

Si l'on veut donner aux échelles de (b) et de (h) la même longueur, il faut construire les échelles de $\log b$ et de $3\log h$ avec les modules μ et $\frac{\mu}{3}$, ce qui rend ces deux échelles identiques.

La formule (1) du n° 67 montre alors que l'échelle (I) divise l'intervalle de l'échelle (b) à l'échelle (h) dans le rapport de 3 à 1, et la formule (2) que le module de cette échelle (I) est égal à $\frac{\mu}{4}$.

Si donc on veut que l'échelle (I) donne le même degré de précision que l'échelle logarithmique usuelle (n° 5, 2°), il faudra prendre

$$\frac{\mu}{4} = 125^{\mathrm{mm}},$$

d'où

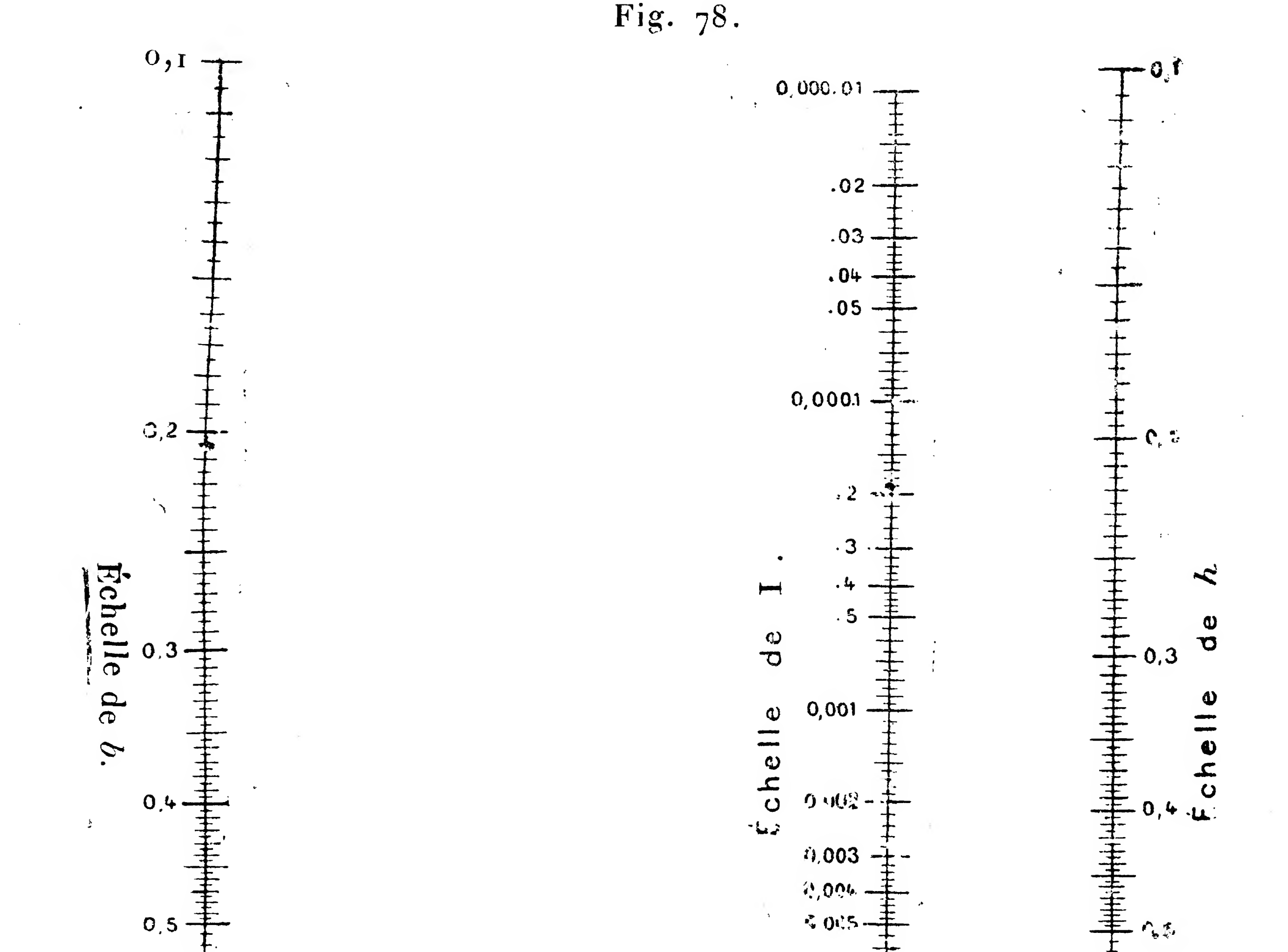
$$\mu = 500^{\mathrm{mm}}.$$

(1) On remarquera sur ce nomogramme que le sens positif des axes Au et Bv a été pris de haut en bas, contrairement à la convention habituelle. Cette disposition a été adoptée par le dessinateur, M. Prévot, qui l'a systématiquement appliquée pour tous les exemples analogues, afin de rapprocher ces tables graphiques des tables numériques, sur lesquelles le sens croissant va toujours de haut en bas.

Et si l'on fait varier b et h de 0,1 à 1, la longueur L des échelles sera égale à 500^{mm} [1].

Sur la figure 78, ce nomogramme a été réduit environ au $\frac{1}{5}$.

Fig. 78.



3° *Marche d'une troupe en colonne.* — Soient V la vitesse en mètres par minute d'une troupe en marche, T le temps de la marche en minutes, E l'espace parcouru en hectomètres. On a

$$E = \frac{VT}{100}. \tag{1}$$

Soient maintenant T' le temps de la marche en heures, E' l'espace parcouru

---

(1) Il serait bon, avec ce choix de module, de fractionner les échelles en deux parties à peu près égales, comme on vient de le faire pour le nomogramme de la multiplication, afin que le tableau fût plus maniable.

en kilomètres. On a

$$(2)\qquad E' = \frac{60\,VT'}{1000} = \frac{6\,VT'}{100}.$$

Les formules (1) et (2) sont utiles aux officiers d'État-Major. M. le capitaine Goedsels, professeur à l'École de Guerre de Bruxelles (aujourd'hui administrateur de l'Observatoire Royal de Belgique), les a traduites en nomogramme [1] de la manière suivante :

Écrivons-les

$$(1')\qquad \log V + \log T - 2 = \log E,$$

$$(2')\qquad \log V + \log 6\,T' - 2 = \log E'.$$

Occupons-nous d'abord de (1'). Pour les besoins de la pratique, il suffit d'y faire varier V de 72 à 100, T de 6 à 66. Fractionnant cette seconde échelle au point 24, on aura un premier nomogramme fragmentaire avec V variant de 72 à 100, T de 6 à 24, un second avec V de 72 à 100, T de 24 à 66.

Or, on a

$$\log 100 - \log 72 = 0,143,$$
$$\log 24 - \log 6 = 0,602,$$
$$\log 66 - \log 24 = 0,439.$$

Si donc μ_1 est le module de l'échelle (V), μ_{21} et μ_{22} ceux des deux fragments de l'échelle (T), on devrait avoir, pour que les trois échelles fussent de même longueur,

$$0,143\,\mu_1 = 0,602\,\mu_{21} = 0,439\,\mu_{22},$$

d'où

$$\mu_{21} = \frac{\mu_1}{4,2}, \qquad \mu_{22} = \frac{\mu_1}{3,06}.$$

On prendra évidemment ici

$$\mu_{21} = \frac{\mu_1}{4}, \qquad \mu_{22} = \frac{\mu_1}{3}.$$

Les modules correspondants des fragments de l'échelle (E) seront donc donnés, d'après la formule (2) du n° 67, par

$$\mu_{31} = \frac{\mu_1}{5}, \qquad \mu_{32} = \frac{\mu_1}{4},$$

et ces deux fragments de l'échelle (E) diviseront les intervalles compris entre l'échelle (V) et les deux fragments de l'échelle (T) respectivement dans les rapports de 4 ou 3 à 1.

Pour l'équation (2'), on voit qu'il suffit de reprendre les mêmes échelles

---

(1) *Revue de l'armée belge*, t. V (mars-avril 1898).

(V) et (E) et de modifier simplement l'échelle (T) en divisant ses cotes par 6 puisque, pour le même point, on aura

$$T = 6T'.$$

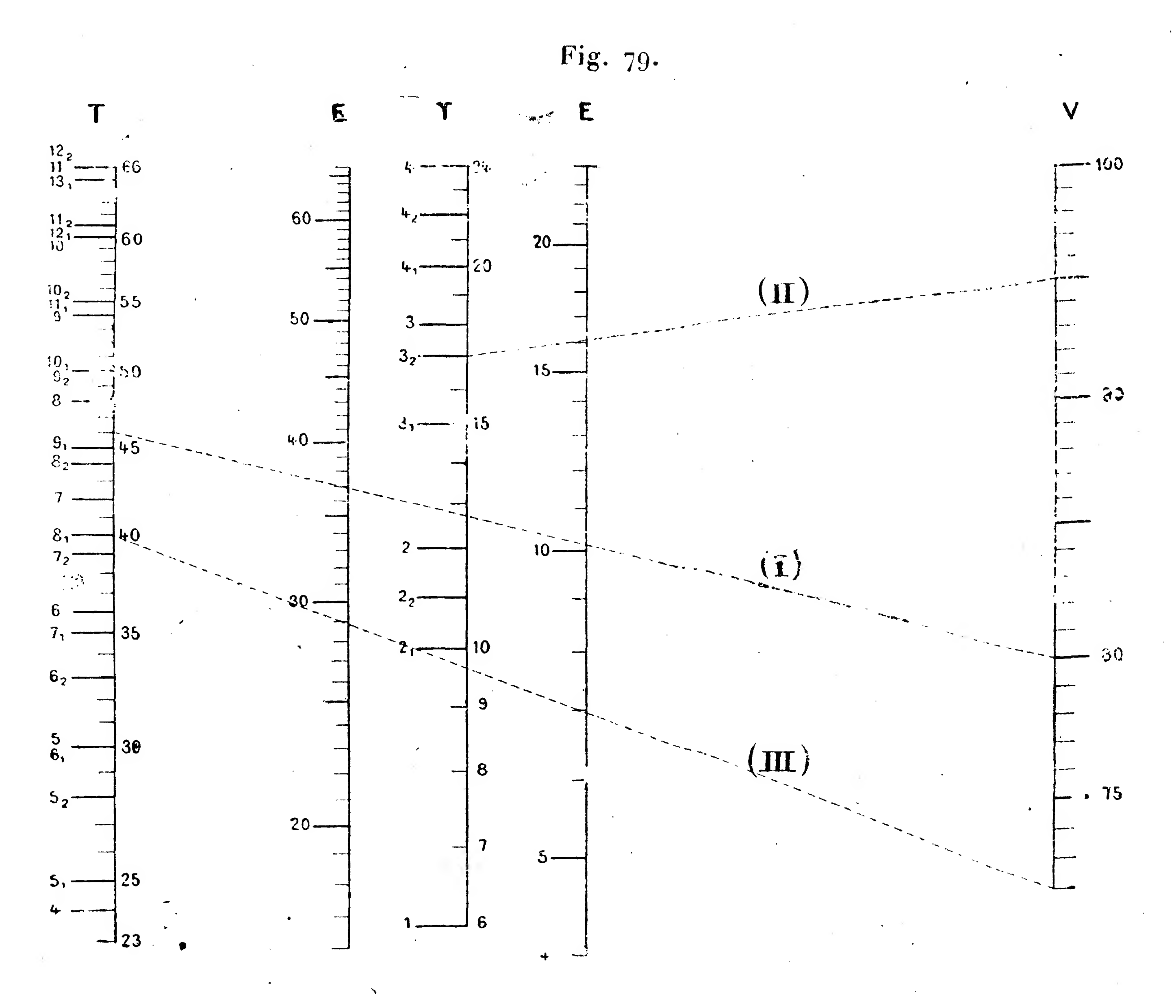
Il suffira d'inscrire la graduation (T) sur un côté du support, le côté droit par exemple, et la graduation (T') sur l'autre, c'est-à-dire le gauche.

C'est ainsi qu'a été obtenu le nomogramme du capitaine Goedseels, représenté par la figure 79 qui est la réduction à la moitié environ de l'original. Sur cet original, l'auteur avait pris $\mu_1 = 1^m$, ce qui donnait pour l'intervalle des points 100 et 75

$$1^m(\log 100 - \log 75) = 0^m,125.$$

Il est facile, s'il s'agit de longs parcours, de tenir compte des haltes. Supposons, par exemple, que la marche s'effectue avec *une halte de dix minutes par heure*. Il faudra alors, sur l'échelle (T') (celle de gauche), avancer de dix minutes l'origine de chaque heure, ce qui donne la chiffraison affectée de

Fig. 79.



l'*indice* 1. Avec *une halte de dix minutes par deux heures*, on obtient de même la chiffraison affectée de l'*indice* 2.

Exemples numériques :

1° Temps mis par une troupe marchant à la vitesse de 80^{m}, pour parcourir 37^{km}. La position (I) de l'index, marquée en pointillé sur la figure, donne (chiffraison de gauche)

$$T = 7^{h}41^{m} \text{ (sans haltes)},$$
$$T = 9^{h}11^{m} \text{ (avec une halte par heure)},$$
$$T = 8^{h}21^{m} \text{ (avec une halte par deux heures)}.$$

2° Profondeur d'une colonne qui s'écoule en 17 minutes à la vitesse de 95^{m}. La position (II) de l'index, avec la chiffraison de droite pour T, donne $16^{Dm},1$ ou 1610^{m}.

3° Profondeur d'une colonne qui défile en 4 minutes à la vitesse de 72^{m}. On applique ici le principe des multiplicateurs correspondants (n° 20) en multipliant V par 10, ce qui exige que la lecture E soit divisée par 10, ou, ce qui revient au même, faite en décamètres. La position (III) de l'index, avec la chiffraison de droite pour (T), donne $28^{Dm},8$ ou 288^{m}.

Nous avons insisté sur les détails de construction des nomogrammes de ce genre parce qu'ils sont d'un usage courant dans la pratique. Ce qui vient d'être dit suffira, espérons-nous, à éviter tout tâtonnement dans les applications de la méthode. On en trouvera d'ailleurs par la suite d'autres exemples (n° 112).

B. — Nomogrammes a trois échelles rectilignes dont deux parallèles (1).

71. *Type des équations correspondantes.* — Le choix des origines sur les axes Au et Bv, pris pour supports des deux échelles parallèles, étant quelconque, on peut placer ces origines aux points où ces axes sont rencontrés par le troisième support. Les points (z_1) et (z_2) ayant alors respectivement des équations de la forme

$$(z_1) \qquad u = \mu_1 f_1,$$
$$(z_2) \qquad v = \mu_2 f_2,$$

celle des points (z_3) peut s'écrire

$$\frac{u}{\mu_1} f_3 + \frac{v}{\mu_2} = 0.$$

(1) Une transformation homographique permet de ramener à ce type tout nomogramme à points alignés comportant trois échelles rectilignes quelconques, en rejetant à l'infini l'un des sommets du triangle formé par les trois supports.

μ_1 et μ_2 étant des modules quelconques, ce qui donne, pour l'équation représentée,

$$(E) \qquad f_1 f_3 + f_2 = 0.$$

Prenant toujours la droite AB comme axe des x en plaçant l'origine O au milieu de AB *et adoptant le sens* OB *comme sens positif*, on voit que le point (z_3) est défini par

$$(z_3) \qquad x = \delta \frac{\mu_1 - \mu_2 f_3}{\mu_1 + \mu_2 f_3},$$

si l'on pose $OB = \delta$.

En résumé, pour représenter par un nomogramme à points alignés l'équation (E) ci-dessus, *il suffit, ayant pris sur* Ox *les points* A *et* B *symétriques par rapport à* O (*le point* B *étant sur la partie positive de* Ox), *et mené par ces points deux axes parallèles* Au *et* Bv, *de porter sur les axes* Au, Bv *et* Ox, *à partir de leurs origines* A, B *et* O, *respectivement les échelles définies par les formules* (z_1), (z_2) *et* (z_3).

Remarque. — Pour que les échelles des variables (z_1) et (z_2), prises comme indépendantes, comprennent l'échelle (z_3), il faut que la fonction f_3 soit constamment positive entre les limites considérées. Si elle devenait négative à partir d'une certaine valeur, on aurait recours à un fractionnement (n° 64) en posant, pour la seconde partie du monogramme,

$$v = -\mu_2 f_2.$$

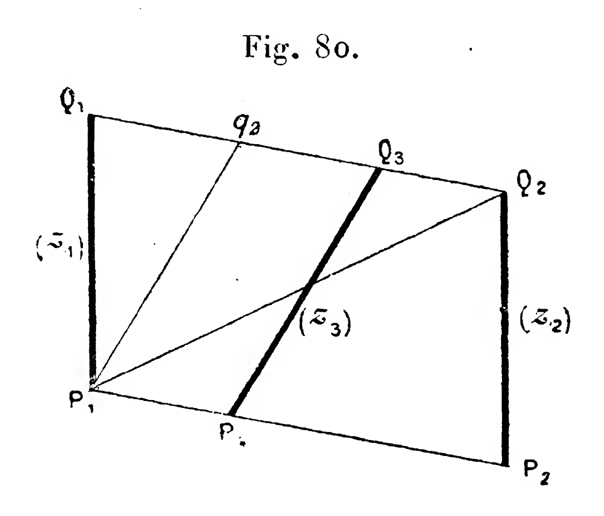
72. *Disposition des échelles* [1]. — Faisant en sorte, en vertu de la remarque précédente, que les points (z_3) soient situés entre les axes Au et Bv, on pourra toujours, comme on l'a vu au n° 68, disposer de μ_1 et μ_2 de façon à donner aux échelles (z_1) et (z_2), entre les limites adoptées, la même longueur, les droites P_1P_2 et Q_1Q_2 qui joignent leurs extrémités ayant d'ailleurs une inclinaison quelconque par rapport à la direction des axes Au

[1] La discussion mathématique de la meilleure disposition à donner à un tel nomogramme, développée dans ce numéro, n'est évidemment pas indispensable à l'application de la méthode; elle est intéressante toutefois en ce sens qu'elle fait connaître une disposition limite permettant de tirer de la méthode les plus grands avantages. En pratique, on se tirera d'affaire par un rapide tâtonnement; mais nous avons tenu, dans les applications subséquentes, à procéder rigoureusement de façon à fournir de véritables modèles théoriques.

et Bv, telle cependant, quant à présent, que l'angle $P_1Q_2P_2$ soit inférieur à l'angle $P_1P_2Q_2$ (*fig.* 80).

Nous sommes libres également de disposer de l'écartement des axes parallèles.

Fig. 80.



Pourrons-nous encore ici le fixer de manière que l'angle sous lequel l'index rencontrera le support P_3Q_3 de l'échelle (z_3) ne tombe pas au-dessous d'une certaine limite ?

Si, par le point P_1, nous menons des parallèles, d'une part P_1q_2 au support P_3Q_3, de l'autre aux diverses positions de l'index, nous voyons que le minimum de l'angle en question est $Q_2P_1q_2$, inférieur au minimum $Q_2P_1Q_1$ de l'angle que l'index fait avec les supports parallèles. Ce dernier angle varie, en effet, de $Q_2P_1Q_1$ ou $P_1Q_2P_2$ à $P_1P_2Q_2$ en passant par 90°, et nous venons de supposer par hypothèse $P_1Q_2P_2 < P_1P_2Q_2$. Toute la question revient donc à fixer la position *relative* des échelles, de façon à *rendre l'angle* $Q_2P_1q_2$ *le plus grand possible.*

Si d'abord, en conservant l'inclinaison de la droite Q_1Q_2, nous changeons l'écartement des axes, toutes les largeurs devront être modifiées proportionnellement. Le problème peut donc s'énoncer ainsi : *Parmi tous les couples de points* Q_2 *et* q_2 *pris sur la droite* Q_1Q_2 *et tels que le rapport* $\frac{Q_1q_2}{Q_1Q_2}$ *soit constant, quel est celui qui est vu du point* P_1 *sous le plus grand angle ?*

Soit (*fig.* 81) q'_2, Q'_2 l'un quelconque de ces couples de points. Pour en obtenir un autre quelconque q''_2, Q''_2, nous n'avons, après avoir joint les points q'_2 et Q'_2 à un point quelconque S'' de Q_1P_1, qu'à mener par P_1 des parallèles $P_1q''_2$, $P_1Q''_2$ aux droites $S''q'_2$, $S''Q'_2$. Il suit de là que l'angle sous lequel le segment $q''_2Q''_2$ est vu du point P_1 est égal à l'angle $q'_2S''Q'_2$. C'est donc ce dernier qu'il s'agit de rendre maximum. Il le sera lorsque le cercle circonscrit au triangle $q'_2S''Q'_2$, cercle qui passe par les points fixes q'_2 et Q'_2, sera de rayon minimum, et cette circonstance se produira lorsque ce cercle sera tangent à la droite P_1Q_1. Soit alors S son point de contact. L'angle maximum est donc égal à $q'_2SQ'_2$ et les points q_2, Q_2 correspondants s'obtiennent en menant par le point P_1 les parallèles P_1q_2 et P_1Q_2 à Sq'_2 et à SQ'_2. Le problème est ainsi résolu. On peut en mettre le résultat sous forme analytique.

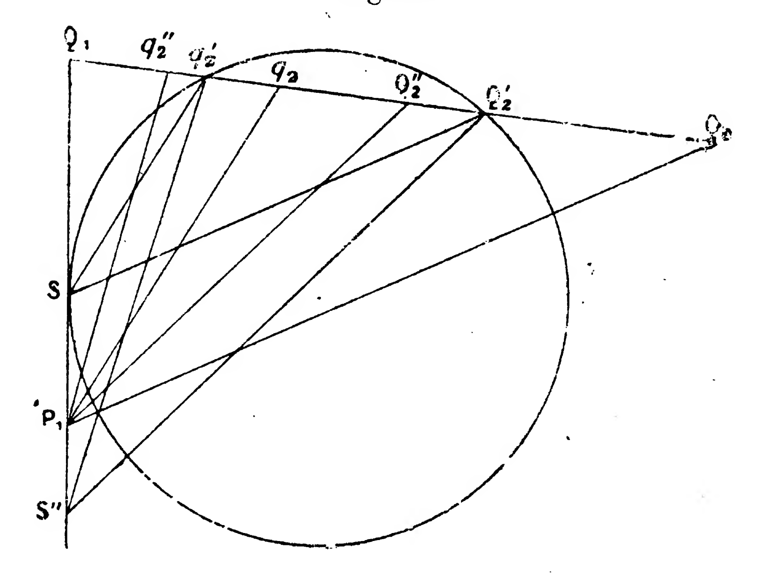
En effet, de ce que

$$\overline{Q_1 S}^2 = Q_1 q'_2 \times Q_1 Q'_2,$$

il résulte, par proportionnalité, que

$$\overline{Q_1 P_1}^2 = Q_1 q_2 \times Q_1 Q_2;$$

Fig. 81.



ou, si l'on représente par k le rapport constant $\frac{Q_1 Q_2}{Q_1 q_2}$, que

$$k \overline{Q_1 P_1}^2 = \overline{Q_1 Q_2}^2,$$

ou encore, si l'on appelle L la longueur $P_1 Q_1$ des échelles parallèles, D la distance $Q_1 Q_2$,

(1) $$D = L\sqrt{k}.$$

Alors

$$Q_1 q_2 = \frac{D}{k} = \frac{L}{\sqrt{k}}.$$

Appelons a_3 et b_3 les valeurs de la variable z_3 correspondant aux points P_3 et Q_3 (*fig.* 80). Nous avons, en vertu de la formule (3) du n° 58,

$$\frac{P_1 P_3}{P_3 P_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2 f_3(a_3)}, \qquad \frac{Q_1 Q_3}{Q_3 Q_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2 f_3(b_3)},$$

d'où

$$\frac{P_1 P_3}{P_1 P_2} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 f_3(a_3)}, \qquad \frac{Q_1 Q_3}{Q_1 Q_2} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 f_3(b_3)},$$

et, par soustraction,

$$\frac{1}{k} = \frac{Q_1 q_2}{Q_1 Q_2} = \frac{\mu_1 \mu_2 [f_3(a_3) - f_3(b_3)]}{[\mu_1 + \mu_2 f_3(a_3)][\mu_1 + \mu_2 f_3(b_3)]}$$

ou

$$(2) \qquad k = \frac{[\mu_1 + \mu_2 f_3(a_3)][\mu_1 + \mu_2 f_3(b_3)]}{\mu_1 \mu_2 [f_3(a_3) - f_3(b_3)]}.$$

Si la valeur de la fonction f_3 est infinie pour l'une des limites, a_3 par exemple, on a

$$(2') \qquad k = \frac{\mu_1 + \mu_2 f_3(b_3)}{\mu_1}.$$

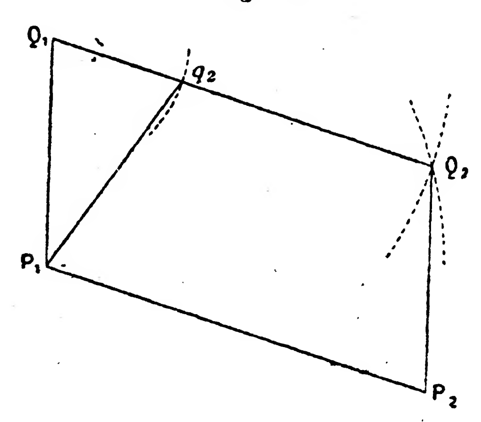
Il n'y a plus qu'à porter cette valeur de k dans la formule (1).

L'écartement qui vient d'être déterminé, en vue de rendre maximum l'angle $q_2 P_1 Q_2$, est indépendant de l'angle que $Q_1 Q_2$ fait avec $Q_1 P_1$. Si l'on fait varier cet angle, les points q_2 et Q_2 parcourent les cercles décrits de Q_1 comme centre avec les rayons

$$Q_1 q_2 = \frac{L}{\sqrt{k}}, \qquad Q_1 Q_2 = L\sqrt{k},$$

et, puisque le point P_1 se trouve entre ces deux cercles, l'angle $q_2 P_1 Q_2$ augmente au fur et à mesure que $Q_1 Q_2$ se rapproche de $Q_1 P_1$ (*fig.* 82).

Fig. 82.



Mais on ne saurait faire croître cet angle indéfiniment, parce que l'angle $P_1 P_2 Q_2$ devenant, contrairement à l'hypothèse faite jusqu'ici, plus petit que $P_1 Q_2 P_2$, décroîtrait indéfiniment.

Arrêtons-nous dans la position pour laquelle les angles $P_1 Q_2 P_2$ et $P_1 P_2 Q_2$ sont égaux. Le triangle $P_1 Q_1 q_2$ est alors isoscèle, et le point Q_2 se trouve sur le cercle décrit de P_1 comme centre avec l'écartement D, calculé par la formule (1), pour rayon.

D'autre part, les triangles $P_1 Q_1 q_2$ et $P_1 Q_1 Q_2$ ayant un angle commun Q_1 compris entre côtés proportionnels, car

$$\frac{Q_1 Q_2}{Q_1 P_1} = \frac{Q_1 P_1}{Q_1 q_2} = k$$

sont semblables, et le triangle $Q_1 P_1 q_2$ est lui-même isoscèle.

En résumé, *ayant fait choix des modules* μ_1 *et* μ_2, *de façon que les deux échelles* (z_1) *et* (z_2) *aient une même longueur* L, *et ayant calculé* k *par la formule* (2), *on prend pour point* Q_2 *l'un des points de rencontre des cercles décrits de* P_1 *et* Q_1 *comme centres avec le rayon* $L\sqrt{k}$. *Le support de l'échelle* (z_3) *est alors une droite antiparallèle de* P_1Q_1 *et* P_2Q_2 *par rapport à* P_1P_2 *et* Q_1Q_2.

Il va sans dire, encore une fois, que la disposition des échelles qui vient d'être étudiée, théoriquement la meilleure, ne s'impose pas dans la pratique, et qu'il suffira, pour les applications, de choisir une disposition qui n'en soit pas trop éloignée.

On pourra notamment substituer aux valeurs de μ_1, de μ_2 et de k rigoureusement calculées des valeurs arrondies qui n'en diffèrent pas beaucoup.

Remarque. — Si les points P_3 et Q_3 coïncident respectivement avec les points P_1 et Q_2, on a $k = 1$, et les triangles $P_1Q_1Q_2$, $P_1Q_2P_2$ sont équilatéraux. Mais le minimum de l'angle de l'index et du support P_3Q_3 descend ici nécessairement à zéro.

73. *Exemples : 1° Septième type de nomogramme pour la multiplication* (¹). — Écrivons l'équation de la multiplication

$$z_1 z_2 = z_3$$

sous la forme

$$\frac{z_3}{z_1} - z_2 = 0.$$

Elle sera dès lors représentable (n° 71) par les systèmes de points cotés

(z_1) $$u = \frac{\mu_1}{z_1},$$

(z_2) $$v = -\mu_2 z_2,$$

(z_3) $$x = \delta \frac{\mu_1 - \mu_2 z_3}{\mu_1 + \mu_2 z_3}.$$

Convenons de faire varier z_1 et z_2 de 1 à 10. Puisque les segments portés sur Au et Bv sont de sens contraires, et que u décroît lorsque z_1 augmente, le sens de la graduation sera le même sur les axes parallèles.

Prenons dès lors

$$a_1 = 10, \qquad b_1 = 1,$$

ce qui nous donne

$$a_2 = 10, \qquad b_2 = 1,$$

et, en outre,

$$a_3 = 100, \qquad b_3 = 1,$$

$$f_1(b_1) - f_1(a_1) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10},$$
$$f_2(b_2) - f_2(a_2) = -1 + 10 = 9.$$

(¹) Corrélatif du troisième type (n° 25, 1°).

L'échelle (z_2) étant métrique, prenons pour cette échelle la graduation du décimètre, c'est-à-dire

$$\mu_2 = 1^{\text{cm}},$$

d'où

$$L = 9^{\text{cm}}.$$

Pour que l'échelle (z_1) ait même longueur, il faut donc que

$$\frac{9}{10}\mu_1 = 9^{\text{cm}},$$

d'où

$$\mu_1 = 10^{\text{cm}}.$$

La formule (2) du n° 72 donne alors

$$k = \frac{(10+100)(10+1)}{10(100-1)} = \frac{11}{9} = 1,222\ldots$$

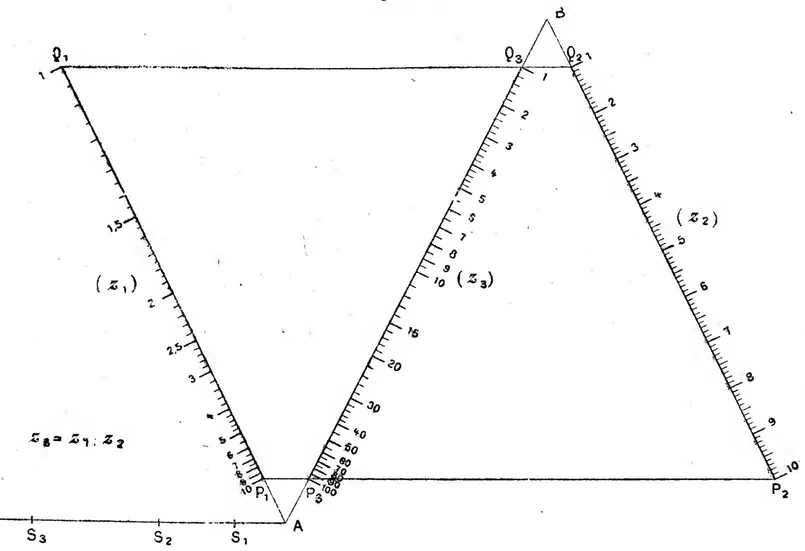
et

$$\sqrt{k} = 1,1.$$

La formule (1) du même numéro donne donc à son tour

$$D = 1,1 \times 9^{\text{cm}} = 9^{\text{cm}},9.$$

Fig. 83.



Nous prendrons

$$D = 10^{\text{cm}}.$$

Il est dès lors facile de construire le parallélogramme $P_1Q_1Q_2P_2$ (*fig.* 83) (1),

(1) La figure 83 est une réduction du nomogramme tel qu'il a été construit et qu'il se trouve décrit dans le texte.

dont les côtés P_1P_2 et Q_1Q_2 sont égaux à 10^{cm}, les côtés P_1Q_1 et P_2Q_2 à 9^{cm}.

Pour construire le support P_3Q_3 de l'échelle (z_3), il suffit de se rappeler que ce support se confond avec l'axe AB des origines.

Or, le point P_1 coté 10 a pour coordonnée u,

$$u = \frac{\mu_1}{10} = \frac{10^{cm}}{10} = 1^{cm},$$

et le point Q_2 coté 1 a pour coordonnée v,

$$v = \mu_2 = 1^{cm}.$$

Il suffit donc de prolonger P_1Q_1 de 1^{cm} du côté de P_1, et P_2Q_2 de 1^{cm} du côté de Q_2 pour avoir les points A et B, et, par suite, la droite AB ou P_3Q_3.

La graduation (z_2) est immédiatement obtenue, puisque c'est celle même d'un décimètre.

Pour obtenir l'échelle (z_1), remarquons : 1° qu'elle est homographique; 2° que nous en connaissons trois points, $Q_1(1)$, $P_1(10)$ et $A(\infty)$. Donc, suivant ce qui a été vu au n° 7, si nous portons sur Q_1Q_2 une échelle métrique auxiliaire (β) ayant son point 1 au point Q_1, et si la droite, joignant le point 10 de (β) au point P_1, coupe en S la parallèle à Q_1Q_2, menée par A, les droites, joignant ce point S aux divers points de (β), donnent sur P_1Q_1 les points de même cote de (z_1).

En prenant pour (β) une graduation de décimètre ayant son point 1 en Q_1, on obtient ainsi le centre de rayonnement S_1, qui a servi à obtenir les points de (z_1) cotés de 10 à 5.

Prenant maintenant pour (β) une échelle métrique pour laquelle le module est égal à $2^{cm},5$, on voit que le point 5 de cette échelle tombe au point Q_2. Il suffit donc de joindre le point Q_2 au point 5 de (z_1), déjà obtenu, pour avoir le centre de rayonnement S_2 correspondant. Ce centre a donné les points de (z_1) cotés de 5 à 3.

Si, enfin, on prend pour l'échelle (β) le module égal à 5^{cm}, son point 3 tombe au point Q_2. Donc la droite qui joint ce point Q_2 au point 3 de (z_1), déjà obtenu, donne le centre de rayonnement S_3. Celui-ci a servi à déterminer les points de (z_1) cotés de 3 à 1.

Il faut remarquer d'ailleurs que les trois échelles (β) dont il vient d'être question se superposent, à la graduation près, et sont données toutes trois par simple application d'un décimètre le long de Q_1Q_2.

Quant à l'échelle (z_3), elle s'obtiendra, par application de la remarque qui termine le n° 61, de la manière suivante :

Les droites joignant le point 1 de (z_1), c'est-à-dire le point Q_1, aux divers points de (z_2), passent par les points de (z_3), de même cote que ces derniers. Ainsi ont été obtenus les points de (z_3) cotés de 1 à 10.

Les droites joignant le point 2 de (z_1) aux divers points de (z_2) passent par les points de (z_3) de cote double. Ainsi ont été obtenus les points de (z_3) cotés de 10 à 20.

Les droites joignant le point 10 de (z_2), c'est-à-dire le point P_2, aux divers

points de (z_1), passent par les points de (z_3) de cote décuple. Ainsi ont été obtenus les points de (z_3) cotés de 20 à 100.

2° *Huitième type de nomogramme pour la multiplication* (¹). — Ce nouveau type s'obtient si l'on prend dans l'équation

$$z_1 z_2 = z_3,$$

pour l'application du procédé indiqué au n° **71**, z_1 et z_3 comme variables indépendantes, au lieu de z_1 et z_2; mais, afin de n'avoir pas à changer les indices dans les formules données à cet endroit, nous écrirons l'équation de la multiplication sous la forme

$$z_1 z_3 = z_2$$

ou

$$z_1 - \frac{z_2}{z_3} = 0.$$

Les formules de la représentation seront donc ici

(z_1) $$u = \mu_1 z_1,$$

(z_2) $$v = -\mu_2 z_2,$$

(z_3) $$x = \delta \frac{\mu_1 + \mu_2 z_3}{\mu_1 + \mu_2 z_3}.$$

Faisons varier z_1 de 1 à 10, z_2 de 1 à 100. Ici, les graduations (z_1) et (z_2) étant de sens contraires, on prendra

$$a_1 = 1, \qquad b_1 = 10,$$

$$a_2 = 100, \qquad b_2 = 1,$$

ce qui donne

$$a_3 = 100, \qquad b_3 = 0,1$$

et, en outre,

$$f_1(b_1) - f_1(a_1) = 10 - 1 = 9,$$

$$f_2(b_2) - f_2(a_2) = -1 + 100 = 99.$$

Donc, pour que les deux échelles aient la même longueur L, il faut que

$$L = 9\mu_1 = 99\mu_2.$$

Prenons

$$\mu_1 = 1^{cm},1.$$

Alors

$$\mu_2 = 0^{cm},1$$

et

$$L = 9^{cm},9.$$

La formule (2) du n° **72** donne maintenant

$$k = \frac{(0,011 + 0,1)(11 + 0,1)}{0,11(10 - 0,01)} = \frac{111}{99} = 1,12$$

(¹) Corrélatif du second type (n° 22, 1°).

et

$$\sqrt{k} = 1,06.$$

Par suite, la formule (1) du même numéro donne

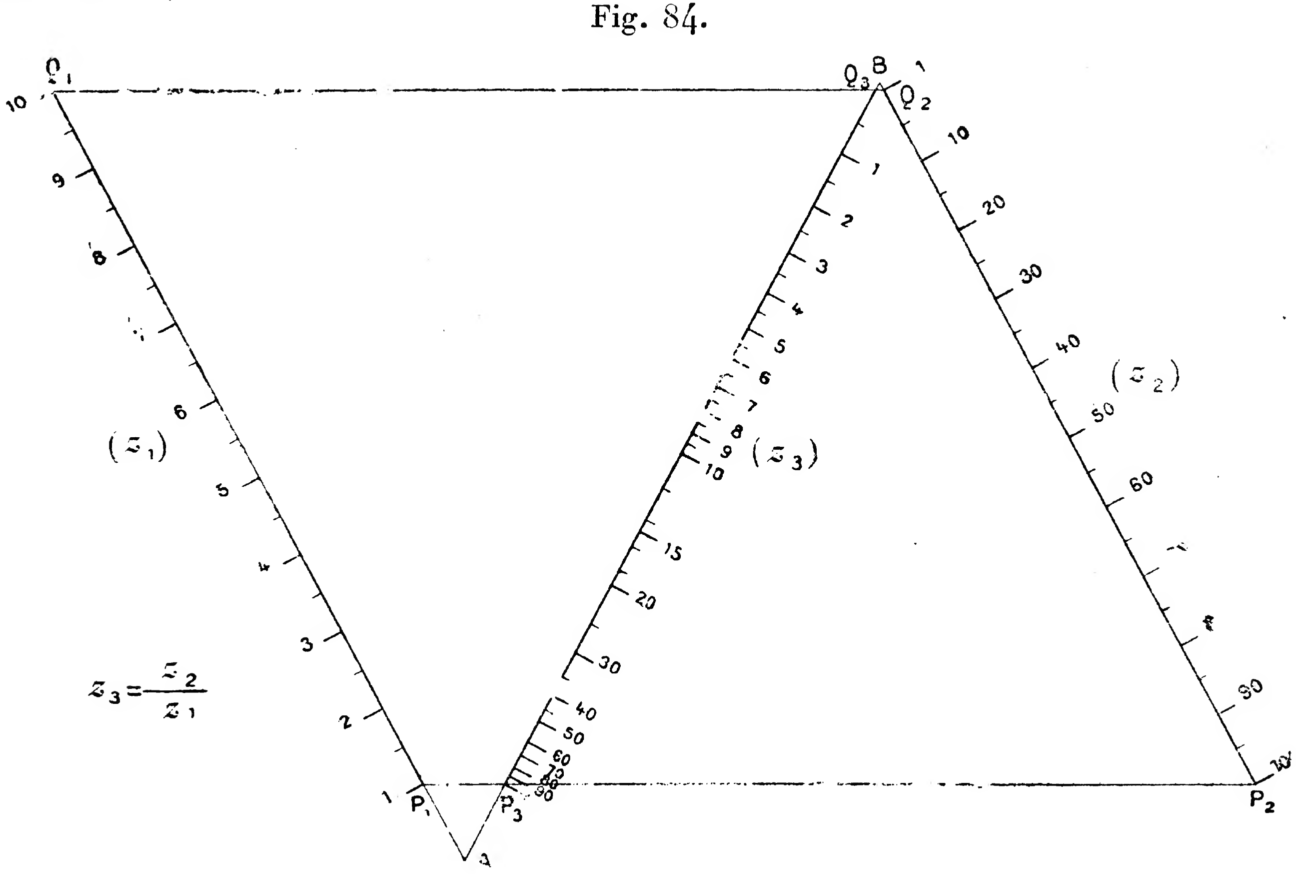
$$D = 1,06 \times 9^{cm},9 = 10^{cm},494.$$

Nous prendrons

$$D = 10^{cm},5.$$

Il est dès lors facile de construire le parallélogramme $P_1Q_1P_2Q_2$ dont les côtés P_1P_2 et Q_1Q_2 sont égaux à $10^{cm},5$, les côtés P_1Q_1 et P_2Q_2 à $9^{cm},9$ (*fig.* 84) (¹).

Fig. 84.



Le point P_1, coté 1, a pour coordonnée u,

$$u = \mu_1 = 1^{cm},1,$$

et le point Q_2, coté 1, a pour coordonnée v,

$$v = \mu_2 = 0^{cm},1.$$

Cela permet de marquer les origines A et B sur les axes et, par suite, de tracer la droite AB ou P_3Q_3.

Les graduations (z_1) et (z_2) s'obtiennent immédiatement, puisque ce sont des échelles métriques de modules 11^{mm} et 1^{mm}.

Une fois les échelles (z_1) et (z_2) construites, l'échelle (z_3) s'en déduit immédiatement par application de la remarque qui termine le n° 61.

(¹) Réduction du nomogramme décrit dans le texte.

Les points (z_3) de 0,1 à 10 s'obtiennent sur P_3Q_3 au moyen des droites qui joignent les points (z_2), de cote décuple, au point (z_1) coté 10, c'est-à-dire au point Q_1, les points (z_3) de 10 à 50 au moyen des droites qui joignent les points (z_2) de cote double au point (z_1) coté 2, les points (z_3) de 50 à 100 au moyen des droites qui joignent les points (z_2) de même cote au point (z_1) coté 1, c'est-à-dire au point P_1.

3° *Correction barométrique.* — La correction ε, exprimée en millimètres, qu'il faut retrancher d'une hauteur barométrique p, lue en millimètres de mercure, pour la ramener à zéro, la température étant de t° C., est donnée par la formule

$$\varepsilon = 0,000\,16\,pt,$$

que nous écrirons

$$0,000\,16\,p - \frac{\varepsilon}{t} = 0,$$

pour que le dernier type de nomogramme qui vient d'être examiné lui soit immédiatement applicable.

Posons donc

$$u = \mu_1 \times 0,000\,16\,p,$$
$$v = -\mu_2 \varepsilon$$

et admettons comme limites (1) :

$$\text{pour } p, \quad a_1 = 500, \quad b_1 = 800,$$
$$\text{pour } \varepsilon, \quad a_2 = 5, \quad b_2 = 0,$$

ce qui donne pour t

$$a_3 = 62,5, \quad b_3 = 0$$

et, en outre,

$$f_1(b_1) - f_1(a_1) = 0,000\,16 \times 300 = 0,048,$$
$$f_2(b_2) - f_2(a_2) = 5.$$

Si donc L est la longueur commune des échelles, nous devrons avoir

$$0,048\,\mu_1 = 5\,\mu_2 = \mathrm{L}.$$

Prenons

$$\mu_2 = 1^{\mathrm{cm}}.$$

Alors

$$\mu_1 = \frac{5^{\mathrm{cm}}}{0,048} = 104^{\mathrm{cm}}$$

et

$$\mathrm{L} = 5^{\mathrm{cm}}.$$

Comme ici la fonction f_3 est $\frac{1}{t}$ qui, pour la limite $b_3 = 0$, devient infinie, il

(1) *Annuaire du Bureau des Longitudes pour* 1899, p. 211.

faut, pour avoir k, appliquer la formule (2′) du n° 72. D'ailleurs, puisque

$$\frac{1}{t} = \frac{0,00016p}{\varepsilon},$$

on a, pour les valeurs limites $\varepsilon = 5$, $p = 500$,

$$f_3(a_3) = \frac{1}{t} = \frac{0,00016 \times 500}{5} = 0,016.$$

Par suite, la formule (2′) en question donne

$$k = \frac{5 \times 0,016}{0,048} + 1 = \frac{8}{3} = 2,6666,$$

d'où

$$\sqrt{k} = 1,63$$

et

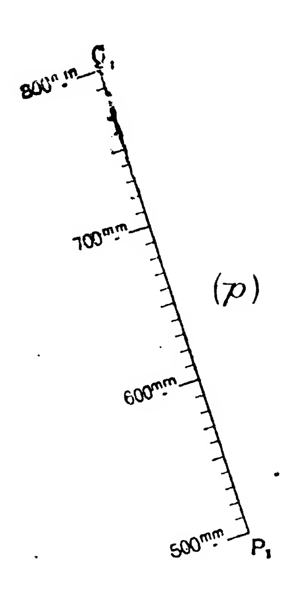
$$D = 5^{cm} \times 1,63 = 8^{cm},15.$$

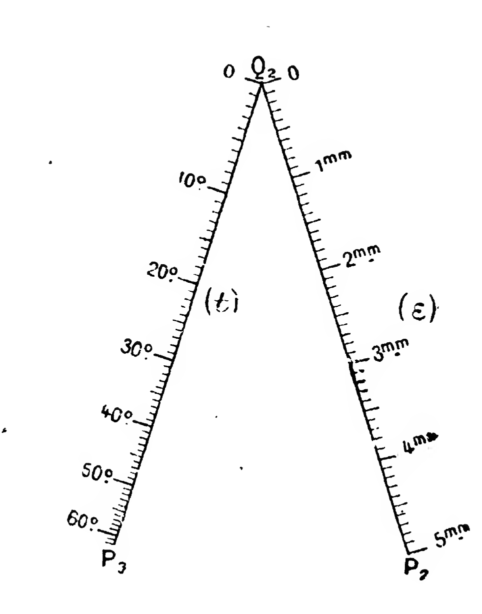
Nous prendrons

$$D = 8^{cm}.$$

Construisons donc le parallélogramme $P_1Q_1Q_2P_2$ (*fig.* 85) (¹) ayant pour côtés 5 et 8^{cm}.

Fig. 85.





L'échelle (ε) est immédiatement construite puisque, vu le choix de μ_2, égal à 1^{cm}, elle se confond avec une échelle de décimètre.

L'échelle (p) est une échelle métrique dans laquelle les points P_1 et Q_1 sont cotés respectivement 500 et 800; elle est donc aisée à construire, et l'on peut aussi facilement marquer son origine A, point coté 0, qui, jointe à l'origine Q_2 de l'échelle (ε), donne le support P_3Q_2 de la troisième échelle (t). Si l'on ne veut pas avoir recours à cette origine A assez éloignée de la partie utile de la figure, on peut remarquer que le point $t = 50$ se trouve à la fois

(¹) Réduction du nomogramme décrit dans le texte.

sur les deux alignements déterminés respectivement par $p = 500$, $\varepsilon = 4$, et par $p = 800$, $\varepsilon = 6,4$.

Le point coté o de cette échelle (t) se confond avec le point Q_2, puisque $t = 0$ doit donner $\varepsilon = 0$ quelle que soit la pression p, et son point coté ∞ se trouverait en A, puisque de même $t = \infty$ donne $\varepsilon = \infty$, pour toute valeur de p.

L'échelle (t) est homographique, on en connaît trois points $(t = 0)$, $(t = \infty)$ et $(t = 50)$; il est donc facile de la construire, ainsi qu'il a été vu au n° 7, en se servant de l'échelle (ε) dont les cotes seraient décuplées. Tirant dès lors la droite qui joint le point coté 5 de cette échelle (ε), c'est-à-dire le point P_2 au point (t) coté 50, qui vient d'être obtenu, on a, sur P_1Q_1, le centre de rayonnement. Projetant à partir de ce centre les points (ε) sur P_3Q_2, en décuplant leurs cotes, on obtient les points (t) [1]. Cette construction peut aussi se déduire de la remarque bien simple qu'à des valeurs de ε et de t ayant un rapport constant correspond, en vertu même de l'équation représentée une valeur fixe de p. Si ce rapport est égal à $\frac{1}{10}$, on a la construction ci-dessus indiquée.

C. — Nomogrammes a trois échelles rectilignes quelconques.

74. *Type des équations correspondantes. Valeurs critiques.* — Pour que l'équation en z_1, z_2, z_3, mise sous forme de déterminant (n° 61), admette des droites comme supports de ses trois échelles, il faut et il suffit que, dans chacune des équations

$$uf_i + vg_i + h_i = 0,$$

les trois fonctions f_i, g_i, h_i s'expriment linéairement au moyen d'une seule d'entre elles, f_i, par exemple. Dans ces conditions, on voit que le déterminant sera de la forme

$$(1) \qquad A f_1 f_2 f_3 + \Sigma B_i f_j f_k + \Sigma C_i f_i + D = 0,$$

où les A, B, C, D sont des constantes et où i, j, k représentent les diverses permutations circulaires de 1, 2, 3.

Si, avec M. Soreau [2], on appelle *ordre nomographique par*

---

[1] On trouvera plus loin d'autres exemples de nomogrammes de ce type (n°s 120 et 121).

[2] Dans son Mémoire : *Nouveaux types d'abaques*, publié dans les *Mémoires et Comptes rendus de la Société des Ingénieurs civils*, 1906, p. 821. Il convient de remarquer que cette notion de l'ordre nomographique ne se rapporte qu'à un caractère purement formel et non pas essentiel (comme l'ordre algébrique, par exemple)

rapport à z_1 d'une équation mise sous la forme

$$\Sigma f_1 F_{23\ldots n} = 0,$$

où les f_1 sont linéairement indépendantes, le nombre p_1 lorsque cette équation a $p_1 + 1$ termes, et $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$, l'*ordre nomographique total* de l'équation, on voit que *l'équation* (1) *est celle d'ordre nomographique* 3 *la plus générale*.

D'autre part, une transformation homographique quelconque, appliquée aux équations à 3 ou à 2 échelles parallèles (n[os] 67 et 71), permet de reconnaître que les équations représentables par trois échelles rectilignes concourantes ou non concourantes peuvent respectivement se ramener au type canonique

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0 \tag{2}$$

ou

$$f_1 f_2 f_3 = 1, \tag{3}$$

elles-mêmes réductibles l'une à l'autre par anamorphose logarithmique lorsqu'on met la seconde sous la forme

$$\log f_1 + \log f_2 + \log f_3 = 0.$$

On représentera donc une équation du type (1) par un nomogramme à échelles concourantes ou non, suivant qu'on la ramènera par une transformation projective à l'un des types (2) ou (3) ci-dessus.

De ce problème, traité à un point de vue purement algébrique, nous avons donné une solution complète ([1]), d'où il résulte que, pour que cette représentation soit réelle, *il faut que le discrimi-*

---

des équations envisagées. Telle d'entre elles, par exemple

$$f_1 f_2 + \sqrt{1+f_1^2}\,\sqrt{1+f_2^2} = f_3,$$

d'ordre nomographique 5, d'après la définition ci-dessus, devient d'ordre nomographique 3, lorsqu'on la transforme en

$$\log(f_1 + \sqrt{1+f_1^2}) + \log(f_2 + \sqrt{1+f_2^2}) = \log(f_3 + \sqrt{f_3^2 - 1}).$$

([1]) Dans le Mémoire **O.22** qui a été reproduit dans la première édition du présent Ouvrage (p. 436 à 459).

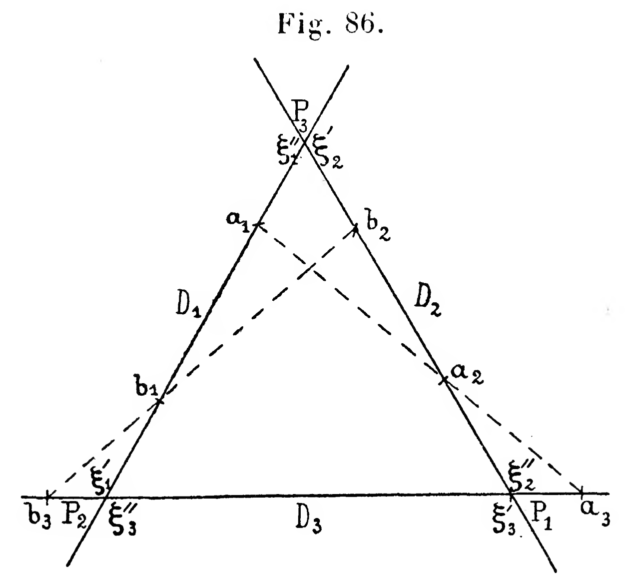
nant Δ *du premier membre de* (1) *rendu homogène ne soit pas négatif* (¹).

D'ailleurs, *les trois échelles sont ou non concourantes, selon que* $\Delta = 0$ *ou* $\Delta > 0$.

Nous allons ici retrouver ce résultat par une voie plus strictement géométrique, en cherchant une construction directe du nomogramme de (1), qui ne suppose pas la réduction algébrique préalable de cette équation soit à la forme canonique (2), soit à la forme canonique (3).

Nous pouvons tout d'abord supposer les droites $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{D}_3$, qui servent de support aux échelles (z_1), (z_2), (z_3), non concourantes (*fig.* 86), le cas où elles le sont apparaissant comme limite de celui-ci.

Fig. 86.



Nous savons, en vertu de ce qui a été vu au n° 61, que nous pouvons disposer de quatre points du nomogramme, soit, par exemple, des points (z_1) cotés a_1 et b_1 et des points (z_2) cotés a_2 et b_2; ce qui, en même temps, revient à se donner les droites $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$. La construction exige alors que l'on connaisse :

1° Un troisième point de chacune des échelles (z_1) et (z_2) (puisque

(¹) Il est entendu que cet énoncé suppose que l'on se place au seul point de vue projectif, si important pour la construction effective. Si l'on veut admettre une anamorphose transcendante, M. Fontené a fait voir (*Nouv. Ann. de Math.*, 3ᵉ série, t. XIX, p. 494) que, dans le cas où $\Delta < 0$, l'équation peut être réduite à la forme canonique (2) ci-dessus, si l'on pose $\varphi_i = \text{arc tang}\, f'_i$, f'_i étant projective de f_i. On verra, en outre, plus loin (n° 83) que, si l'on admet des supports non rectilignes, on peut, dans tous les cas, représenter une équation (1) par un nomogramme à points alignés construit projectivement en partant des échelles des fonctions f_i. Ajoutons que, dans les applications pratiques, le cas $\Delta < 0$ est très rare.

ces échelles, projectives de celles de f_1 et f_2, sont entièrement déterminées par trois points);

2° Le troisième support $\mathbf{D}_3$;

3° Trois points (z_3) marqués sur ce support, par lesquels l'échelle (z_3) sera déterminée tout entière.

Or tous ces éléments seront connus lorsqu'on aura déterminé les valeurs que doivent prendre les variables z_1, z_2, z_3 aux sommets du triangle $P_1P_2P_3$ formé par les trois supports (P_i représentant le sommet opposé à la droite $\mathbf{D}_i$), et qui seront dites les *valeurs critiques* de ces variables [1]. En effet :

1° La valeur critique de z_1 en P_3, jointe à a_1 et b_1, détermine entièrement l'échelle (z_1); de même pour (z_2);

2° Ces échelles étant déterminées, on peut marquer respectivement sur $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$ les points P_2 et P_1 où z_1 et z_2 prennent des valeurs critiques connues [2];

3° Les points P_1 et P_2 pourvus des valeurs critiques correspondantes de z_3 fournissent déjà deux points de l'échelle (z_3) portée sur la droite $\mathbf{D}_3$ qui unit ces deux points; pour en avoir un troisième, il suffit de prendre le point de rencontre de cette droite $\mathbf{D}_3$ avec l'un des alignements unissant deux des points (z_1) et (z_2) déjà marqués,

---

(1) C'est dans notre Mémoire **O.50** que nous avons introduit dans la théorie des nomogrammes à alignement cette notion de valeur critique. Depuis lors, dans une série d'intéressants Mémoires dont on trouvera un résumé aux Annexes (Note III), M. Farid Boulad a donné une nouvelle extension à l'idée d'où est sortie cette notion. Afin de ne pas laisser subsister une équivoque qui, à notre connaissance, a déjà eu tendance à se produire, nous tenons à faire observer que si les quantités u_0, v_0 qui se rencontrent dans un court passage du Mémoire de Massau (Liv. III, n° 195, p. 135) peuvent *a posteriori* être reconnues pour ce qu'on appelle ici des valeurs critiques, ce passage ne contient en réalité aucun linéament de la théorie des valeurs critiques, et des formes invariantes qui s'y rattachent, non plus qu'aucune indication de l'usage qui peut en être fait pour la construction, sans disjonction préalable, des nomogrammes de genre zéro ou des nomogrammes coniques applicables à des équations d'ordre nomographique 3 ou 4 (n°s 83 et 85), etc., toutes questions traitées à fond dans le Mémoire **O.50**.

(2) Si, par hasard, l'une de ces valeurs critiques était imaginaire, alors que la valeur correspondante de la fonction fût réelle (cas de z pour $\sin z > 1$ en valeur absolue), on prendrait comme paramètre, pour la construction, f_i au lieu de z_i, parce qu'alors l'échelle considérée serait projective d'une échelle métrique; puis, une fois la construction achevée, on coterait les points obtenus au moyen des valeurs correspondantes de z_i au lieu de f_i.

la valeur correspondante de z_3 étant donnée par (3) où z_1 et z_2 ont été remplacés par leurs valeurs (choisies, cela va sans dire, de façon que le calcul de z_3 soit aussi simple que possible).

Si les trois échelles sont concourantes (auquel cas P_1, P_2, P_3 se confondent en un seul P), il faut, pour déterminer $\mathbf{D}_3$, en dehors de P, un autre point que l'on obtient par la rencontre de deux alignements définis par des couples de valeurs de z_1 et z_2 correspondant à une même valeur de z_3, en vertu de (3); $\mathbf{D}_3$ étant ainsi obtenue, un seul alignement supplémentaire donne un troisième point de l'échelle (z_3) et celle-ci est, dès lors, entièrement déterminée.

On voit donc que, lorsqu'on s'est donné arbitrairement a_1, b_1, a_2, b_2, la connaissance des valeurs critiques de z_1, z_2, z_3 permet, dans tous les cas, d'achever la construction du nomogramme. Il nous reste à faire voir comment on obtient ces valeurs critiques.

Remarque. — Il est bien évident que, dans le cas général, on peut prendre deux de ces valeurs critiques pour b_1 et b_2, par exemple, ce qui revient à dire que l'on peut se donner arbitrairement les trois supports $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{D}_3$ et, de plus, un point coté quelconque respectivement sur deux d'entre eux, soit a_1 sur $\mathbf{D}_1$ et a_2 sur $\mathbf{D}_2$, qui, par alignement, donnent a_3 sur $\mathbf{D}_3$. Les valeurs critiques étant convenablement réparties entre les trois sommets P_1, P_2, P_3, on se trouve avoir ainsi trois points de chacune des trois échelles qui se trouvent ainsi entièrement définies.

Autrement dit, la considération des valeurs critiques montre que l'on peut se donner les trois supports $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{D}_3$ et l'alignement correspondant à un système quelconque de valeurs de z_1, z_2, z_3 satisfaisant à l'équation donnée; tout le reste s'en déduit projectivement.

75. *Détermination des valeurs critiques.* — Cette détermination repose sur la simple remarque que voici : si ζ_1 et ζ_2 constituent un couple de valeurs critiques de z_1 et z_2, soit réunies au point P_3, soit affectées l'une au point P_2, l'autre au point P_1, *la valeur correspondante de z_3 est indéterminée*. En effet, dans le premier cas, au couple ζ_1, ζ_2 correspondent toutes les droites passant par P_3 qui donnent, par suite, sur $\mathbf{D}_3$ une valeur quelconque pour z_3; dans le second, l'alignement $\zeta_1\zeta_2$ se confond avec le support $\mathbf{D}_3$ de (z_3), ce qui laisse encore indéterminé le point correspondant de cette échelle.

Or l'équation (1) du numéro précédent peut s'écrire

$$(1\ bis)\quad f_3(Af_1f_2+B_1f_2+B_2f_1+C_3)+B_3f_1f_2+C_1f_1+C_2f_2+D=0,$$

et la valeur de f_3 (par suite, celle de z_3) deviendra indéterminée lorsque les deux coefficients de cette équation (où f_3 est prise pour inconnue) seront nuls.

Autrement dit, les valeurs φ_1 et φ_2 que prendront f_1 et f_2 pour les valeurs ζ_1 et ζ_2 cherchées seront telles que

$$(4)\quad \begin{cases} A\ \varphi_1\varphi_2+B_2\varphi_1+B_1\varphi_2+C_3=0, \\ B_3\varphi_1\varphi_2+C_1\varphi_1+C_2\varphi_2+D\ =0. \end{cases}$$

Afin de simplifier l'écriture ultérieure, nous conviendrons de poser (comme dans le Mémoire **O.22** et en représentant toujours par i, j, k une permutation circulaire de 1, 2, 3)

$$F_0=\Sigma B_iC_i-AD,$$
$$E_i=AC_i-B_jB_k,\qquad F_i=F_0-2B_iC_i,\qquad G_i=B_iD-C_jC_k,$$

ce qui donne, quel que soit i,

$$F_i^2-4E_iG_i=\Delta,$$

Δ étant le discriminant du premier membre de (1) rendu homogène. Remarquons aussi que l'on a

$$F_i+F_j=2(B_kC_k-AD).$$

Ceci posé, on trouve aisément que l'élimination du terme en $\varphi_1\varphi_2$ entre les équations (4) donne

$$(5)\quad 2E_1\varphi_1-F_1+2E_2\varphi_2-F_2=0,$$

et l'élimination de φ_2 entre (5) et l'une ou l'autre des équations (4)

$$E_1\varphi_1^2-F_1\varphi_1+G_1=0.$$

Comme d'ailleurs tout est symétrique par rapport aux indices 1, 2, 3, on voit que, d'une manière générale, les valeurs critiques de la fonction f_i sont données par [1]

$$(6_i)\quad E_i\varphi_i^2-F_i\varphi_i+G_i=0$$

[1] On remarquera, en se reportant à notre solution algébrique citée ci-dessus, que les quantités φ_i sont les mêmes que les quantités ρ_i de cette solution *changées de signe*.

et, par suite, pour que ces valeurs soient réelles, il faut que $F_i^2 - 4E_iG_i$, ou Δ d'après la formule ci-dessus, ne soit pas négatif.

Supposons d'abord $\Delta > 0$. Chacune des équations (6_i) a alors deux racines réelles et distinctes φ'_i et φ''_i. Mais ces valeurs de φ_i ne sauraient être accouplées au hasard. En effet, si nous les répartissons en deux groupes (φ') et (φ'') suivant que

$$\varphi'_i = \frac{F_i + \sqrt{\Delta}}{2E_i}, \qquad \text{ou} \qquad \varphi''_i = \frac{F - \sqrt{\Delta}}{2E_i},$$

c'est-à-dire

$$(7) \qquad 2E_i\varphi'_i - F_i = +\sqrt{\Delta}, \qquad \text{ou} \qquad 2E_i\varphi''_i - F_i = -\sqrt{\Delta},$$

nous voyons, d'après (5), que les valeurs de φ_i et φ_j, accouplées pour correspondre à une valeur indéterminée de f_k, doivent être de groupes (φ') et (φ'') différents. Cela nous montre qu'à chaque sommet P_i nous devons associer des couples (d'indices différents de i, bien entendu) pris dans l'un et l'autre groupe (φ') et (φ''), c'est-à-dire soit (φ'_j, φ''_k), soit (φ''_j, φ'_k). Si donc, comme précédemment, nous appelons ζ_i la valeur de la variable z_i correspondant à la valeur φ_i de la fonction f_i, nous pourrons répartir les cotes ζ entre les sommets P (que nous appellerons les *points critiques*), suivant l'une ou l'autre des deux dispositions

$$(\text{I}) \qquad P_1(\zeta'_2\,\zeta''_3), \qquad P_2(\zeta'_3\,\zeta''_1), \qquad P_3(\zeta'_1\,\zeta''_2)$$

ou

$$(\text{II}) \qquad P_1(\zeta'_3\,\zeta''_2), \qquad P_2(\zeta'_1\,\zeta''_3), \qquad P_3(\zeta'_2\,\zeta''_1).$$

De là, pour l'équation (1), lorsque $\Delta > 0$, deux types de nomogrammes *homographiquement irréductibles entre eux*.

Si $\Delta = 0$, les deux valeurs critiques ζ'_i, ζ''_i de chaque variable z_i se réduisent à une seule ζ_i [correspondant à la racine φ_i, alors unique, de l'équation (6_i)], ce qui exige que les trois points P_1, P_2, P_3 se confondent en un seul P; les trois échelles sont donc concourantes.

Si $\Delta < 0$, les φ_i deviennent imaginaires, et comme les points de l'échelle (z_i) dépendent des valeurs de la fonction f_i de façon univoque (¹), les points P_i sont eux-mêmes imaginaires. Par suite, à

(¹) *Voir* le deuxième renvoi de la page 204.

moins d'une anamorphose non projective ([1]), la représentation cesse d'être réelle.

Remarque. — Si une quantité E_i est nulle, l'une des racines φ_i de (6_i) doit être considérée comme infinie. Pour déterminer à quel groupe (φ') ou (φ'') appartient cette racine infinie, il suffit de déterminer celui auquel appartient la racine finie; or, pour celle-ci, la quantité $2E_i\varphi_i - F_i$ (dont le signe définit le groupe correspondant), se réduisant à $-F_i$, est connue sans ambiguïté.

76. *Emploi effectif des échelles des fonctions composantes.* — Nous venons de voir que les trois échelles rectilignes au moyen desquelles est constitué le nomogramme d'une équation d'ordre nomographique 3 [type (1) du n° 74] sont respectivement projectives de celles des fonctions composantes f_1, f_2, f_3. On sait donc les construire, ainsi qu'il a été vu au n° 7; il pourra être toutefois avantageux d'utiliser les échelles des fonctions f_i elles-mêmes, si, par exemple, on a sous la main les étalons de graduation (n° 6) correspondants.

Appelons I_1, I_2, I_3 les points des échelles (z_1), (z_2), (z_3) pour lesquels les fonctions f_1, f_2, f_3 deviennent respectivement infinies. Pour que l'échelle (z_i) soit celle de la fonction f_i même, il faut que, sur le support $\mathbf{D}_i$, le point I_i soit rejeté à l'infini.

Il suffit donc, par transformation homographique, de rejeter à l'infini la droite **J** unissant deux quelconques des trois points I_i, les points I_1 et I_2, par exemple (ou une droite **J** quelconque passant par ces points s'ils sont confondus en un seul), pour que les échelles (z_1) et (z_2) du nomogramme soient précisément celles des fonctions f_1 et f_2 ([2]). Si, en outre, le point I_3 se trouve sur la droite **J**, l'échelle (z_3) se réduit en même temps à celle de la fonction f_3. Mais cette transformation ne pourra être effectuée qu'autant que la droite **J** ne coïncidera pas avec l'un des supports $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ ou $\mathbf{D}_3$, puisqu'alors l'échelle correspondante serait tout entière rejetée à l'infini.

Il y a donc lieu, pour la discussion, d'examiner ce qui se passe lorsque des coïncidences ont lieu entre les points I et les points cri-

---

([1]) *Voir* le renvoi de la page 203.

([2]) Cela n'exige, il faut bien le remarquer, aucun calcul. Il suffit de prendre I_1 et I_2 pour deux des points (a_1 et a_2, par exemple) qui peuvent être choisis arbitrairement, ainsi qu'on l'a vu au n° 74.

tiques P. Pour qu'un point I_i, caractérisé par $f_i = \infty$, vienne en un de ces points P, il faut, en vertu du numéro précédent, que l'équation (6_i) correspondante ait une racine φ_i infinie et, par suite, que $E_i = 0$.

D'autre part, pour que les trois points I soient alignés, il faut que l'équation (1) (n° **74**) soit satisfaite par le système $f_1 = f_2 = f_3 = \infty$, ce qui exige, comme on le voit en divisant par $f_1 f_2 f_3$, que $A = 0$.

De là la discussion :

Suivant que, parmi les E_i, il y en aura 0, 1, 2 ou 3 nuls, c'est-à-dire 0, 1, 2 ou 3 points I en coïncidence avec des points critiques P, nous aurons les cas (**I**), (**II**), (**III**), (**IV**), que nous distinguerons par un accent lorsque les supports seront concourants et par un indice *a* lorsque les points I correspondants seront alignés.

Remarquons tout de suite que, lorsqu'*un seul* des points I_i coïncide avec l'un des points P, il est impossible que les trois points I_i soient alignés. Autrement dit, lorsqu'une seule des quantités E_i est nulle, le coefficient A est nécessairement différent de zéro; les cas ($\mathbf{II}_a$) et ($\mathbf{II}'_a$) n'existent pas.

Par contre, si, les trois supports étant concourants ($\Delta = 0$), deux au moins des points I_i coïncident avec le point unique P, il y a nécessairement alignement des trois points I_i. Autrement dit, lorsque, Δ étant nul, deux au moins des E_i sont nuls, le coefficient A est nécessairement nul; les cas (**III'**) et (**IV'**) n'existent pas non plus.

La discussion des douze cas possibles est résumée schématiquement sous la forme du tableau ci-joint (*fig.* 87) qui s'explique de lui-même quand on se rappelle que I_1, I_2, I_3 sont les points où les fonctions f_1, f_2, f_3 deviennent infinies, **J** la droite que l'on rejette par homographie à l'infini [1].

---

(1) Pour vérifier que les résultats ici mis en évidence par voie géométrique sont bien identiques à ceux auxquels nous avait précédemment conduit notre solution algébrique, il suffit d'observer que la correspondance entre les désignations des divers cas, d'un endroit à l'autre, s'établit d'après le tableau que voici :

(I)........	(αa_1)	(III_a).....	(αa_4)	(I'_a).......	(αb_1)
(I_a).......	(αa_1)	(IV).......	(αa_5)	(II').......	(αb_2)
(II).......	(αa_2)	(IV_a)......	(αa_5)	(III'_a).....	(αb_3)
(III)......	(αa_3)	(I').......	(αa_1)	(IV'_a)......	(αb_4)

Nous profitons de l'occasion pour signaler une faute d'impression dans le tableau résumant la discussion donnée dans notre Mémoire **O.22** : avant-dernière ligne, colonne A, le zéro ne doit pas être barré.

Voici des exemples de ces douze cas pour chacun desquels nous donnons le tableau des valeurs critiques des f_i dans l'ordre

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 \\ \varphi''_1 & \varphi''_2 & \varphi''_3 \end{pmatrix}:$$

$$(\mathrm{I}) \qquad f_1 f_2 f_3 + f_2 f_3 - f_3 f_1 + f_1 f_2 + f_1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{I}_a) \qquad f_2 f_3 - f_3 f_1 + f_1 f_2 + f_1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{II}) \qquad f_1 f_2 f_3 + f_3 f_1 - f_1 + f_2 = 0 \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & \infty \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{III}) \qquad f_1 f_2 f_3 + f_2 f_3 - f_1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & \infty \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{III}_a) \qquad f_3 f_1 - f_1 f_2 - f_2 = 0 \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & \infty \\ 0 & \infty & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{IV}) \qquad f_1 f_2 f_3 - 1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{IV}_a) \qquad f_2 f_3 - f_1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 0 & \infty & \infty \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{I}') \qquad f_1 f_2 f_3 + f_2 f_3 - f_3 f_1 + f_1 f_2 + 4 = 0 \qquad (-2 \quad 2 \quad -2),$$

$$(\mathrm{I}'_a) \qquad f_2 f_3 + f_3 f_1 - f_1 f_2 = 0 \qquad (\ 0 \quad 0 \quad 0),$$

$$(\mathrm{II}') \qquad f_1 f_2 f_3 - f_1 - f_2 = 0 \qquad (\ 0 \quad 0 \quad \infty),$$

$$(\mathrm{III}'_a) \qquad f_2 f_3 - 2 f_3 f_1 + 1 = 0 \qquad (\ \infty \quad \infty \quad 0),$$

$$(\mathrm{IV}'_a) \qquad f_1 + f_2 + f_3 = 0 \qquad (\ \infty \quad \infty \quad \infty).$$

Il suffit de jeter les yeux sur la figure 87 pour reconnaître que les trois points I_i ne peuvent être rejetés simultanément à l'infini et, par suite, les trois échelles de f_1, f_2, f_3 intervenir effectivement sur le nomogramme que dans les cas suivants :

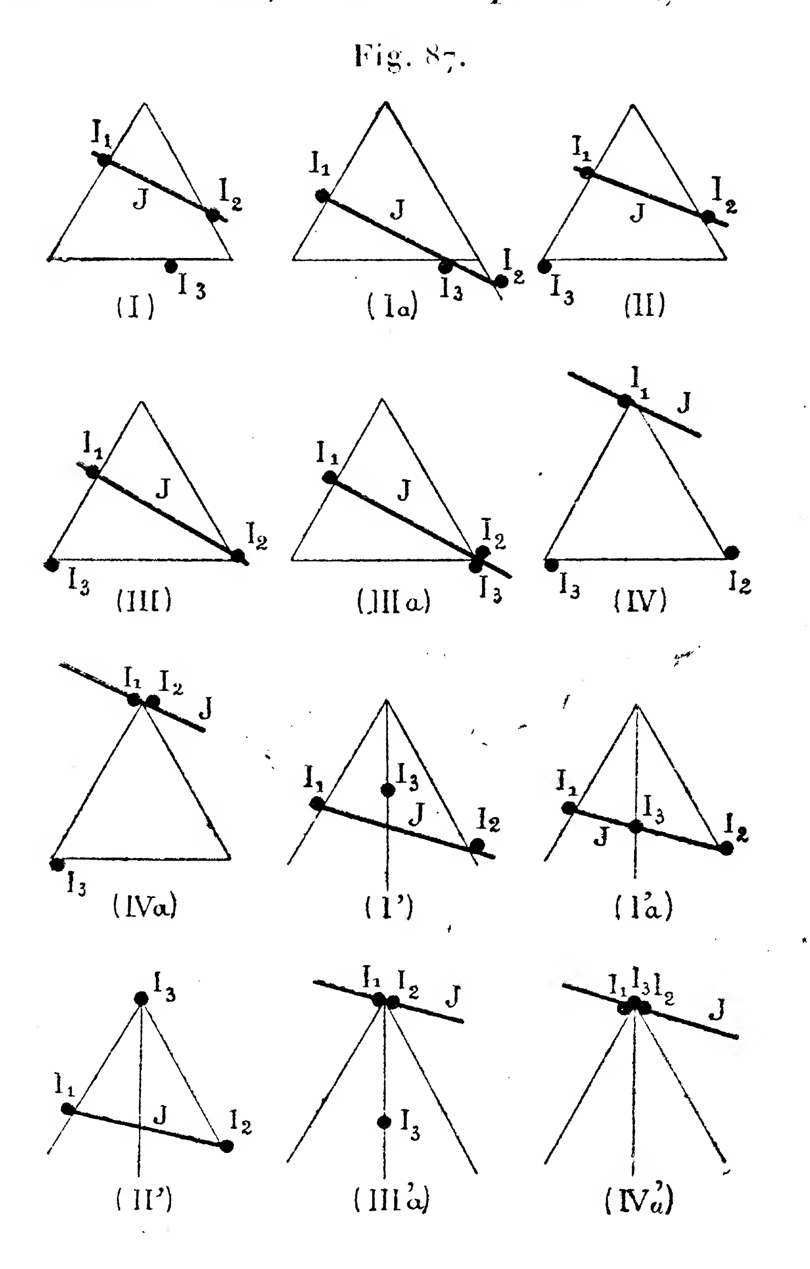
(I_a)	caractérisé par	$\Delta > 0$,	$A = 0$,	E_1, E_2, E_3 non nuls;
(III_a)	» »	$\Delta > 0$,	$A = 0$,	deux des E_i nuls;
(I'_a)	» »	$\Delta = 0$,	$A = 0$,	E_1, E_2, E_3 non nuls:
(IV'_a)	» »	$\Delta = 0$,	A non nul,	$E_1 = E_2 = E_3 = 0$.

Dans le cas (IV), pour lequel, Δ et A n'étant pas nuls, les E_i le sont, deux des points I_i ne sauraient, à la fois, être rejetés à l'infini, et, par

suite, on ne peut faire intervenir effectivement que l'échelle d'une seule des fonctions f_i.

Dans tous les autres cas, deux des points I_i, et deux seulement,

Fig. 87.



peuvent être rejetés à l'infini; donc deux seulement des échelles des fonctions f_i peuvent être effectivement utilisées.

77. *Exemples : 1° Miroirs et lentilles sphériques.* — Cette formule ([1]), qui s'écrit ordinairement

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3},$$

est identique à celle prise ci-dessus comme exemple du type (I'_a) lorsqu'on y suppose $f_i \equiv z_i$. Elle est donc représentable par trois échelles concourantes,

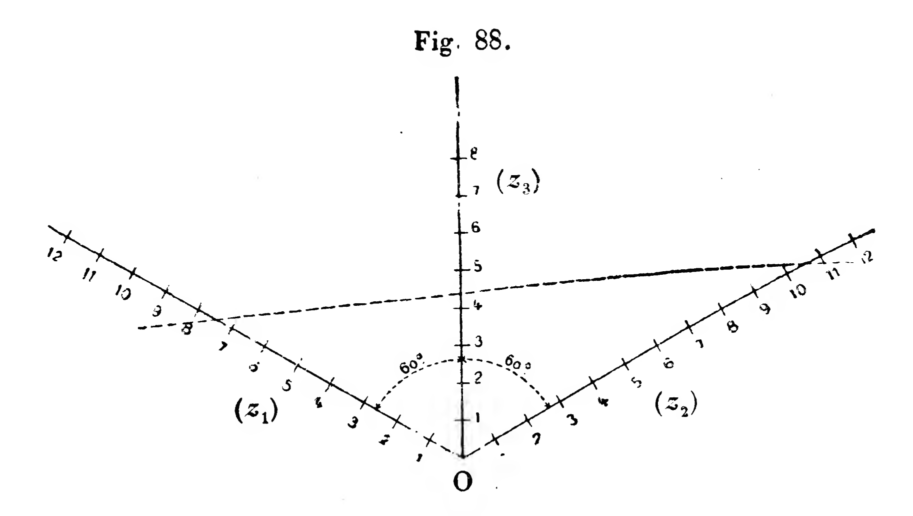
---

([1]) C'est aussi celle qui lie les modules dans le cas de trois échelles parallèles (n° 67).

les valeurs critiques, toutes trois égales à o, étant réunies au point de concours des supports de ces échelles. De plus, ainsi qu'on vient de le voir, on pourra ici faire correspondre à chaque variable z_i une échelle métrique, en rejetant la droite J, qui unit les trois points I_i à l'infini.

Portons dès lors des échelles métriques de même module sur les deux axes que nous faisons correspondre à z_1 et z_2 (*fig.* 88).

Fig. 88.



Pour avoir un point du support de (z_3), prenons deux couples quelconques de valeurs de z_1 et z_2, permutés l'un de l'autre (ce que permet la symétrie de l'équation représentée). Nous voyons ainsi que le troisième support bissecte l'angle des deux autres. La troisième échelle, ayant son o également confondu avec le point de concours des supports, et étant métrique, sera entièrement déterminée par son point 1 situé sur l'alignement des points 2 des échelles (z_1) et (z_2). Il en résulte que si ω est l'angle du support de (z_3) avec chacun des deux autres, le module de (z_3) est égal à $2\mu\cos\omega$, μ étant le module commun des deux autres; par suite, si l'on fait $\omega = 60°$, il est égal à μ. C'est ainsi qu'a été construite la figure 88.

2° *Sinus produit de sinus.* — L'équation

$$\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 = \sin\alpha_3,$$

qui se rencontre dans la théorie de la polarisation elliptique, étant écrite

$$\log\sin\alpha_1 + \log\sin\alpha_2 = \log\sin\alpha_3$$

rentre dans le type (IV'_a) ci-dessus. Les valeurs critiques φ_i, toutes trois infinies, et qui s'appliquent au point de concours des supports, correspondant aux valeurs nulles des α_i, qui ne sauraient être rejetées à l'infini, force est ici de recourir à trois supports concourant à distance finie et non d'appliquer le procédé des échelles parallèles (n° 67) bien que l'équation donnée rentre dans le type canonique voulu.

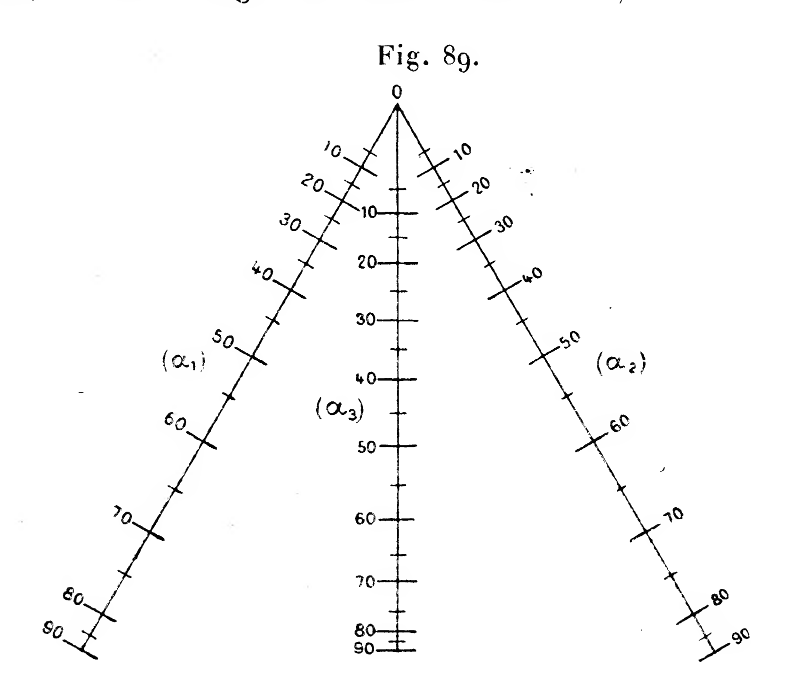
Nous porterons donc, sur les supports rectilignes pris pour (α_1) et (α_2), des

échelles identiques, projectives de celle de $\log \sin \alpha$, avec point $\alpha = 0$ au point de rencontre des supports. Pour construire chacune de ces échelles on peut s'en donner soit deux autres points cotés, par exemple $\alpha = 50^\circ$ et $\alpha = 90^\circ$, soit, sous forme homographique, l'expression de la distance x du point coté α à l'origine o, avec deux paramètres arbitraires, par exemple,

$$x = \frac{\mu}{1 - k \log \sin \alpha}.$$

Les échelles de la figure 89 ont été ainsi construites avec $\mu = 6^{cm}$, $k = 10$ [1].
La symétrie en α_1 et α_2 montre, comme dans l'exemple précédent, que le support de (α_3) bissecte l'angle des deux autres.

Fig. 89.



Quant à l'échelle (α_3), il suffit, pour la marquer sur ce support, de remarquer que, pour $\alpha_1 = 90^\circ$, on a $\alpha_2 = \alpha_3$, et, par suite, que cette échelle (α_3) est projective de l'échelle (α_2) à partir du point $\alpha_1 = 90^\circ$.

3° *Sinus produit de tangentes.* — Cette équation, qui intéresse également la théorie de la polarisation elliptique, s'écrit

$$\operatorname{tang} \alpha_1 \operatorname{tang} \alpha_2 = \sin \alpha_3.$$

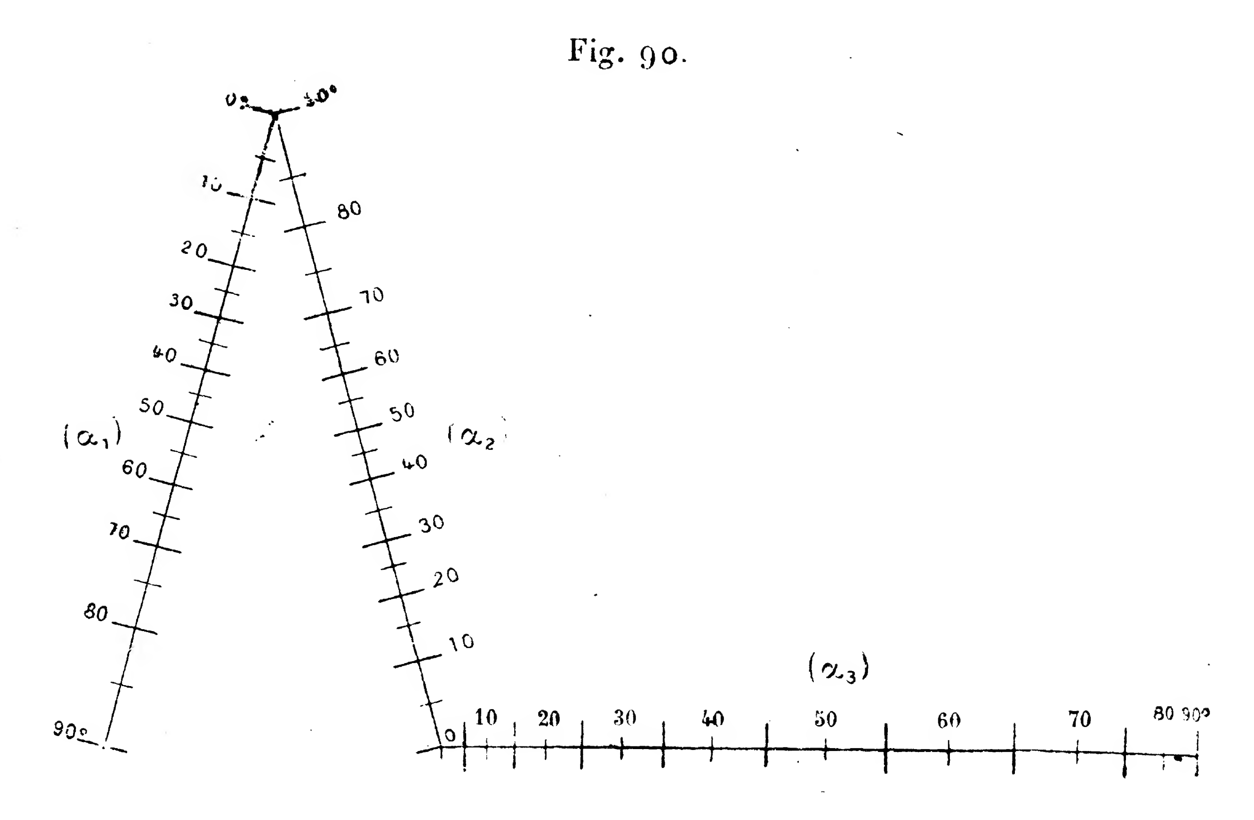
Elle rentre dans le type (IV_a) (à une permutation près entre les indices 1 et 3). Si l'on fait la répartition des valeurs critiques suivant le type (I) du

---

(1) Ce nomogramme et le suivant ont été construits par le colonel Lafay, en vue de ses recherches sur la polarisation elliptique (*Journal de Physique*, 1895, p. 178). Il les a obtenus par un procédé élémentaire direct. Il nous a paru intéressant de faire voir comment ils se déduisaient très simplement de la théorie générale.

n° 75, on obtient la disposition de la figure 90, pour laquelle on peut se donner, par exemple, les graduations (α_1) et (α_3) respectivement projectives des

Fig. 90.



échelles $\tang \alpha_1$ et $\sin \alpha_3$. Pour avoir ensuite la graduation (α_2), il suffit de remarquer que, pour $\alpha_3 = 90°$, l'équation représentée donne $\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$. Autrement dit, deux points α_1 et α_2 quelconques, *de cotes complémentaires*, sont alignés sur le point $\alpha_3 = 90°$, ce qui permet d'obtenir immédiatement l'échelle (α_2) par projection de l'échelle (α_1) à partir du point $\alpha_3 = 90°$.

III. — Nomogrammes de genre non nul.

A. — Nomogrammes de genre un.

78. *Type des équations correspondantes.* — D'après la définition donnée du genre (n° 57), un nomogramme de genre 1 comportant deux échelles rectilignes, on peut toujours, grâce à une transformation homographique, rendre les supports de ces échelles parallèles et les prendre pour axes des u et des v. Dans ces conditions, on voit que les équations correspondantes seront de la forme [1]

$$(E) \qquad f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0,$$

où f_3, g_3 et h_3 sont linéairement indépendantes, sans quoi l'on serait ramené au cas précédent.

---

[1] *Voir* le premier renvoi du n° 57 (p. 156).

Il suffit, pour les représenter, de poser

$$(z_1) \qquad u = \mu_1 f_1,$$

$$(z_2) \qquad v = \mu_2 f_2,$$

ce qui donne, pour le système (z_3).

$$(z_3) \qquad \frac{u}{\mu_1} g_3 + \frac{v}{\mu_2} h_3 + f_3 = 0.$$

Les points définis par cette équation sont distribués sur une certaine courbe dont l'équation en u et v s'obtiendrait par élimination de z_3 entre l'équation et sa dérivée prise par rapport à z_3; mais il est tout aussi facile de former l'équation cartésienne de ce support. En effet, en appelant toujours δ la demi-distance des origines A et B, on a

$$(z_3\ bis) \qquad x = \delta \frac{\mu_1 h_3 - \mu_2 g_3}{\mu_1 h_3 + \mu_2 g_3}, \qquad y = \frac{-\mu_1 \mu_2 f_3}{\mu_1 h_3 + \mu_2 g_3},$$

et l'équation cartésienne du support de (z_3) s'obtient par l'élimination de z_3 entre ces deux dernières équations.

On n'aura d'ailleurs généralement pas besoin de connaître la nature géométrique de ce support curviligne, chaque point (z_3) étant construit individuellement suivant l'un des modes indiqués au n° **61**, et notamment celui que signale la remarque finale dans le cas où les échelles (z_1) et (z_2) ont été préalablement construites.

Si la variable z_3 est prise comme inconnue, il sera bon de faire en sorte que les points (z_3) se trouvent entre les axes parallèles, ce qui exige que, dans l'équation (z_3), les coefficients de u et v soient de même signe.

Si cette circonstance ne subsistait pas dans tout l'intervalle considéré, on aurait recours à un fractionnement avec changement de signe sur l'un des axes. On en trouvera plus loin un exemple (n° **81**).

L'étude de la variation de l'angle sous lequel l'index rencontre l'échelle (z_3) ne saurait se faire avec la même simplicité que dans le cas où le support de cette échelle était rectiligne (n° **72**).

Mais il arrive souvent dans les applications que l'arc de courbe sur lequel est distribuée l'échelle (z_3) diffère peu de sa corde. On peut alors appliquer la règle donnée à l'endroit cité comme si le support curviligne se confondait avec cette corde.

79. *Premier exemple : Résolution de l'équation du second degré* (1). — Le présent type est de ceux qui se rencontrent le plus fréquemment dans la pratique. Nous croyons donc utile de nous étendre avec quelque détail sur plusieurs exemples s'y rapportant.

Soit, en premier lieu, l'équation du second degré

$$(E) \qquad z^2 + pz + q = 0.$$

Pour obtenir son nomogramme, posons

$$(p) \qquad u = \mu_1 p,$$
$$(q) \qquad v = \mu_2 q,$$

ce qui donne pour (z)

$$(z) \qquad \mu_1 \mu_2 z^2 + \mu_2 z u + \mu_1 v = 0$$

ou, en appelant toujours 2δ la distance AB des origines,

$$(2\ bis) \qquad x = \delta \frac{\mu_1 - \mu_2 z}{\mu_1 + \mu_2 z}, \qquad y = \frac{-\mu_1 \mu_2 z^2}{\mu_1 + \mu_2 z}.$$

Les échelles (p) et (q) étant métriques, il n'y a pas lieu de s'y arrêter. Pour l'échelle (z), remarquons d'abord que, d'après l'expression de x, cette échelle projetée sur AB parallèlement aux axes Au et Bv, donne une échelle homographique ayant son point coté o en B et son point coté ∞ en A. Il est très facile de construire cette échelle comme transformée d'une échelle métrique (n° 7).

Pour achever de déterminer les points (z), il suffit de remarquer que, pour $v = 0$, l'équation (z) donne

$$u = -\mu_1 z,$$

ce qui montre que *la droite joignant le point* B *au point* (z) *coupe l'axe* Au *au point de l'échelle* (p) *dont la cote est égale à* $-z$.

Donc, en coupant le faisceau des droites qui unissent le point B aux points (p) de cotes négatives par les parallèles aux axes menées par les points de l'échelle homographique construite sur AB, on obtient l'échelle curviligne (z) (2), dont le support est une hyperbole facile à déterminer.

Transportons, en effet, l'origine des axes cartésiens du milieu O de AB au

(1) C'est précisément à l'occasion de cette application et de la suivante (équation trinome du troisième degré) que nous avons, dans le Mémoire **O.1**, fait connaître, pour la première fois, le principe de la méthode des points alignés.

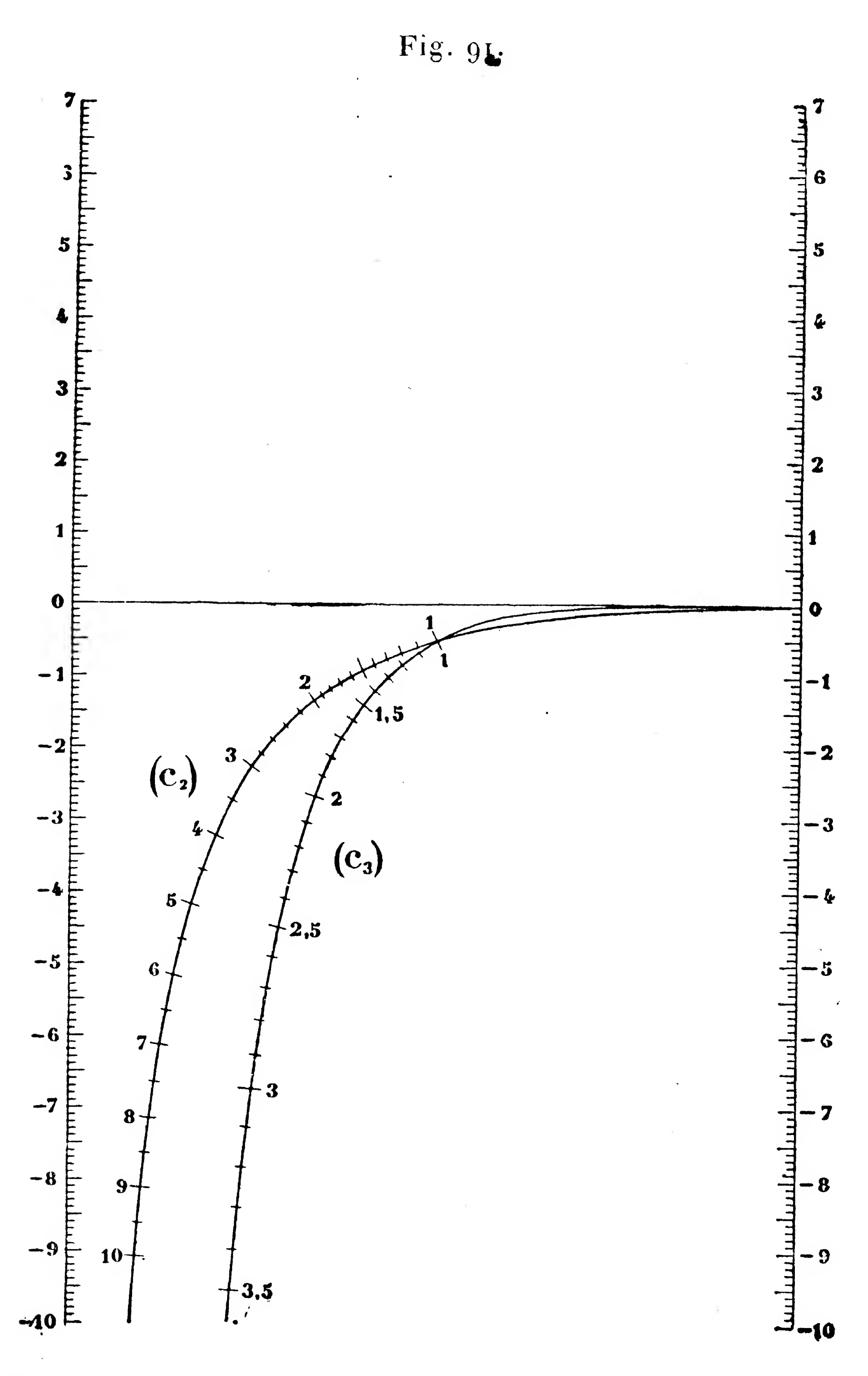
(2) On a déjà indiqué, au n° 66, une construction de cette échelle (*fig.* 73), dans le cas où $\mu_1 = \mu_2$.

point B. Les coordonnées du point (z) deviennent

$$x = \frac{-2\mu_2 \delta z}{\mu_1 + \mu_2 z}, \qquad y = \frac{-\mu_1 \mu_2 z^2}{\mu_1 + \mu_2 z}.$$

Elles montrent immédiatement : 1° qu'à l'origine B la tangente est l'axe des x, c'est-à-dire AB; 2° que l'axe $Au(x = -\delta)$ est asymptote, pour $z = \infty$.

Fig. 91.



Il suffit d'ailleurs de construire la portion de l'hyperbole correspondant aux valeurs positives de z, et qui est tout entière comprise entre les axes Au et Bv. Cela revient à ne construire le nomogramme que pour les racines positives de l'équation (E). En pratique, en effet, lorsqu'on rencontre de telles équations, elles n'admettent, en général, qu'une seule racine positive qui est celle qu'il s'agit d'obtenir. Si, par exception, on veut calculer les racines

négatives, on les obtient, en valeur absolue, comme racines positives de la transformée en $-z$ qui se déduit de la précédente par le simple changement de p en $-p$.

En prenant $\mu_1 = \mu_2 = 6^{mm},5$, on obtient ainsi la courbe C_2 de la figure 91 [1].

Cas particuliers : 1° *Épaisseur des lentilles plan-convexes.* — Soit, par exemple, l'équation

$$\frac{d^2}{4} = e(2R - e)$$

ou

$$e^2 - 2Re + \frac{d^2}{d} = 0,$$

qui lie l'épaisseur e, le rayon de courbure R et le diamètre d d'une lentille plan-convexe.

Le nomogramme correspondant, pour d, variant ne 20^{mm} à 100^{mm}, et R de 100^{mm} à 500^{mm}, a été construit au noyen des formules

$$u = \mu_1 \frac{d^2}{4}, \qquad v = -2R\mu_2,$$

avec $\mu_1 = 0^{mm},1$, $\mu_2 = 0^{mm},5$.

La figure 92 donne une réduction de ce nomogramme. On voit qu'ici la portion utile de l'hyperbole se confond très sensiblement avec sa corde et, par suite, qu'en se servant de celle-ci au lieu de la courbe entre les droites joignant les points limites des échelles parallèles, on pourrait, en vue de la meilleure disposition du nomogramme, appliquer ce qui a été dit dans le cas de trois échelles rectilignes dont deux parallèles (n° 72).

2° *Volume du ballast.* — Le demi-profil du ballast d'une voie de chemin de fer est un trapèze-rectangle ayant un côté incliné à $\frac{2}{3}$. Si donc b est la largeur en plate-forme de ce demi-profil, h la hauteur du ballast, le volume par mètre courant, abstraction faite des traverses, est donné par

$$V = bh + 0,75h^2.$$

Ici, l'inconnue étant toujours V, on fait en sorte que l'échelle correspondante soit située entre les deux autres. Il suffit, pour cela, de poser

$$u = \mu_1 b, \qquad v = \mu_2 V.$$

---

(1) Les relations fondamentales entre les racines z_1 et z_2 de l'équation et ses coefficients p et q, savoir

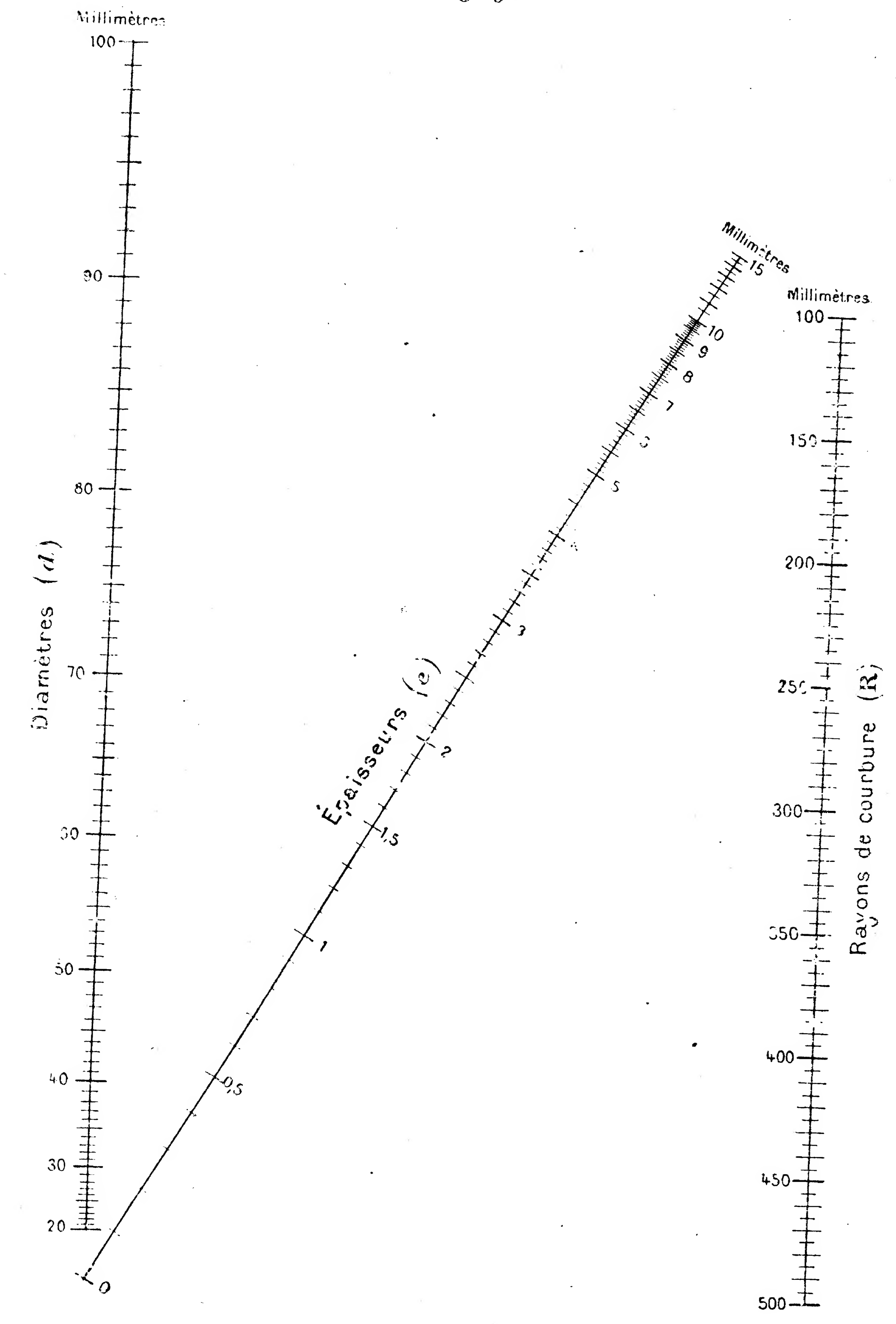
$$z_1 + z_2 = -p, \qquad z_1 z_2 = q,$$

montrent que le nomogramme ainsi construit peut servir pour l'addition et la multiplication, la droite joignant les points cotés z_1 et z_2 de la courbe C_2 coupant l'axe Au au point dont la cote, abstraction faite du signe, est égale à $z_1 + z_2$, et l'axe Bv au point dont la cote est égale à $z_1 z_2$. De même, la droite, joignant le point (z) coté z_1 au point (p) coté $-2z_1$, passe par le point (q) coté z_1^2, ce qui montre que le nomogramme peut également servir de table de carrés.

La figure 93 donne une réduction du nomogramme qui a été ainsi établi pour le service de la construction de la Compagnie des Chemins de fer de l'Ouest avec

$$\mu_1 = 25^{cm}, \qquad \mu_2 = 16^{cm}.$$

Fig. 92.

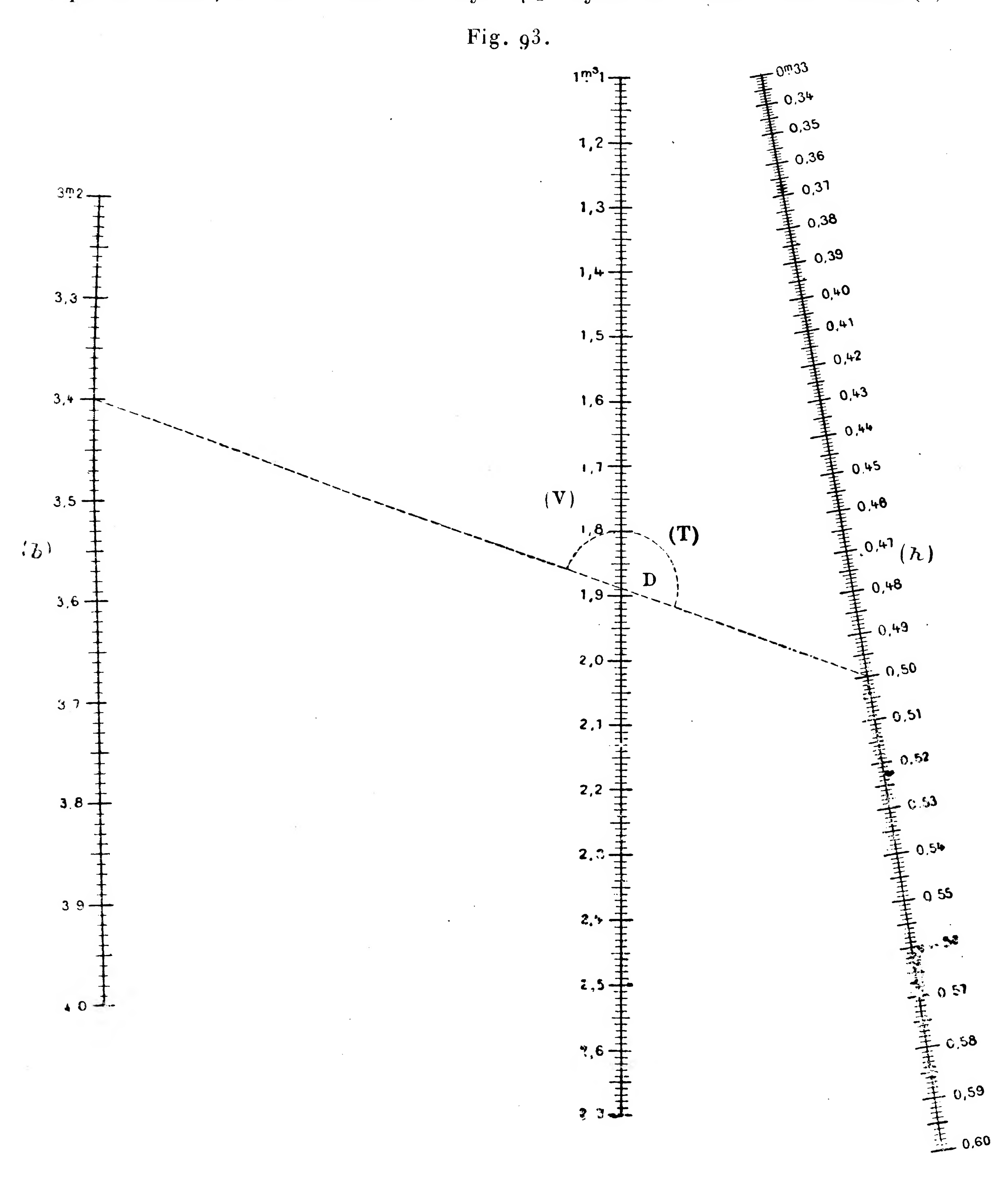


On voit qu'ici encore la portion utile de l'hyperbole portant la graduation (h) se confond très sensiblement avec sa corde.

Pour tenir compte des traverses, il suffit de retrancher de la lecture V une

constante T représentant le volume occupé par les traverses sur un mètre courant. On peut éviter cette soustraction en dessinant, sur le transparent qui porte l'index, un demi-cercle de rayon $\mu_2 T$ ayant son centre O sur l'index ([1]).

Fig. 93.



Appliquant alors le transparent sur le nomogramme, de façon que le point O

([1]) Un tel artifice avait été déjà employé par M. Lallemand pour un autre nomogramme (n° 136).

se trouve sur l'axe des v et la demi-circonférence (T) du côté des V décroissants par rapport à O, on voit que le volume V demandé sera donné par la cote du point de l'échelle (V) qui se trouvera sous le cercle (T).

On peut même tracer ainsi plusieurs cercles (T) correspondant aux divers types de traverses employés.

Sur la figure 93, la position de l'index marquée en pointillé montre que, pour $b = 3^m,4$, $h = 0^m,50$, on a $V = 1^{m^3},8$.

80. *Second exemple : Résolution de l'équation trinome du troisième degré* (1). — Reprenons maintenant l'équation trinome du troisième degré déjà envisagée au n° 22 (2°), soit

$$(E) \qquad z^3 + pz + q = 0.$$

Posons

$$(p) \qquad u = \mu_1 p,$$
$$(q) \qquad v = \mu_2 p.$$

Il vient alors, pour (z),

$$(z) \qquad \mu_1 \mu_2 z^3 + \mu_2 z u + \mu_1 v = 0$$

ou, en appelant toujours 2δ la distance AB des origines,

$$(z\ bis) \qquad x = \delta \frac{\mu_1 - \mu_2 z}{\mu_1 + \mu_2 z}, \qquad y = \frac{-\mu_1 \mu_2 z^3}{\mu_1 + \mu_2 z}.$$

Les échelles (p) et (q) ci-dessus sont les mêmes que celles du nomogramme de l'équation du second degré (n° 79). Pour la troisième, l'expression de x est aussi la même que dans le cas du second degré. Autrement dit, la projection de l'échelle (z) faite sur l'axe AB parallèlement à Au et Bv est la même.

Nous avons vu au numéro précédent comment on pouvait construire cette échelle projetée.

Nous allons maintenant faire voir comment, pour une valeur quelconque de z, on peut passer du point M obtenu dans le cas du second degré au point M' concernant le cas du troisième degré.

Remarquons pour cela que ces points ayant respectivement pour équations

$$(M) \qquad \mu_1 \mu_2 z^2 + \mu_2 z u + \mu_1 v = 0,$$
$$(M') \qquad \mu_1 \mu_2 z^3 + \mu_2 z u + \mu_1 v = 0,$$

leurs projections respectivement sur Bv à partir de A et sur Au à partir de B sont données par

$$v = -\mu_2 z^2 \qquad \text{et} \qquad u = -\mu_1 z^2.$$

(1) *Voir* le premier renvoi de la page 216.

Le point d'intersection des deux projetantes a donc pour équation

$$\frac{u}{\mu_1 z^2} + \frac{v}{\mu_2 z^2} + 1 = 0$$

$$\mu_2 u + \mu_1 v + \mu_1 \mu_2 z^2 = 0.$$

Les coefficients de u et v étant constants, le lieu de ce point est une parallèle aux axes Au et Bv. Or, pour $z = 1$, les points M et M' coïncident. Si donc, par le point $z = 1$ de l'échelle du second degré construite au n° 79, on mène la parallèle Δ aux axes, on peut dire que *les droites* AM *et* BM' *se coupent sur* Δ.

Cela permet de déduire bien aisément point par point l'échelle (z) du troisième degré [support (c_3) de la figure 91] de l'échelle (z) du deuxième [support (c_2)]. C'est là un cas d'application de la remarque III du n° 65.

Comme dans le cas du deuxième degré, le nomogramme n'a été construit que pour des valeurs positives de z, les valeurs absolues des racines négatives étant obtenues, si l'on veut les calculer, comme racines positives de la transformée en $-z$ (résultant du changement de q en $-q$).

D'ailleurs les équations trinomes cubiques rencontrées dans les applications n'ont qu'une racine positive, et c'est la seule dont on ait besoin [1].

Rappelons aussi que le principe des multiplicateurs correspondants (n° 20, 2°) est ici applicable, ces multiplicateurs pour z, p et q étant λ, λ^2 et λ^3.

Remarques géométriques. — La construction ci-dessus indiquée est celle qui résulte de l'application normale des procédés ordinaires de la nomographie. Mais il est possible ici, en utilisant certaines remarques géométriques, d'obtenir une construction peut-être un peu plus directe.

L'équation (z) ci-dessus montre que le support C_3 est de la troisième classe et les formules (z *bis*) qu'il est du troisième ordre; c'est donc une *cubique cuspidale*. Aux abords du point B ($z = 0$), la seconde formule (z *bis*) montre que y est un infiniment petit du troisième ordre; AB est donc tangente stationnaire de C_3 et, par suite, B son point d'inflexion. La même formule montre aussi qu'aux abords de A ($z = \infty$), y est négatif de part et d'autre de Au; le point R_∞, à l'infini sur Au est donc le point de rebroussement de C_3 (*fig.* 94).

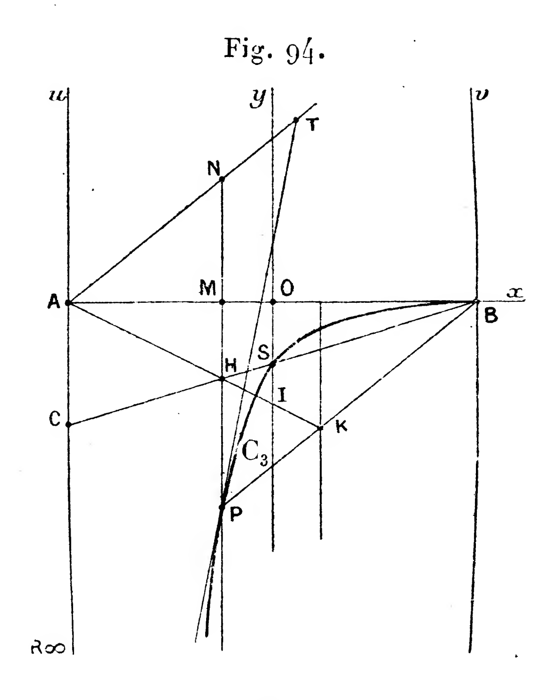
---

(1) On rencontre de telles équations notamment dans l'étude de la répartition des tôles de semelle dans les grandes poutres de pont, de même que dans la détermination de la hauteur des poutres dans les travées associées. L'appropriation, moyennant des fractionnements convenables (n° 64), du type ci-dessus de nomogramme à ces deux genres d'application, se trouve réalisée respectivement dans le *Traité de la stabilité des constructions* de J. Pillet (p. 194) et dans un Mémoire de D. Gorrieri intitulé *Calcolo delle sezioni resistenti per le travi assoggettate...* paru en 1896 dans le *Bulletino del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Bologna*.

Les points d'inflexion B et de rebroussement R_∞ de la cubique cuspidale C_3 étant ainsi connus, l'application de théorèmes que nous avons démontrés naguère ([1]) conduit aux résultats suivants :

Pour obtenir le point P de C_3 situé sur la parallèle aux axes Au et Bv, menée par le point M de AB, il suffit, ayant tiré une fois pour toutes la droite qui joint le point B au point S de la courbe C_3 situé sur Oy $\left(\text{correspondant à la valeur } z = \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)$ et pris son point de rencontre H avec la parallèle aux axes menée par M, *de prendre le symétrique* K *de* H *par rapport au point* I *où* AH *rencontre* Oy *et de tirer* BK *qui coupe* MH *au point* P *demandé.*

Fig. 94.



Si, d'autre part, la parallèle à BK *menée par* A *coupe* MP *en* N *et si l'on prolonge* AN *de la moitié* NT *de sa longueur,* PT *est la tangente en* P *à la cubique* C_3.

81. *Troisième exemple : Équation de Képler* ([2]). — L'équation de Képler qui lie à l'anomalie moyenne β l'anomalie excentrique α d'une planète circulant dans une orbite d'excentricité e est

$$\alpha - e \sin \alpha = \beta,$$

les anomalies α et β étant exprimées en parties du rayon. Ces variables prennent donc toutes les valeurs de 0 à $2\pi = 6,2832$. Quant à la variable e, elle reste comprise entre 0 et 0,4.

([1]) *N. A.*, 1892, p. 386, et 1893, p. 345. Dans la première de ces deux Notes, p. 388, deuxième ligne, *au lieu de* « par le point T », *il faut lire* « par le point I ».

([2]) **O.11**.

Remarquons en outre que les anomalies α et β sont ensemble inférieures ou supérieures à π.

Pour représenter l'équation, posons

$$(\beta) \qquad u = \mu_1 \beta,$$

$$(e) \qquad v = \mu_2 e.$$

Il vient dès lors pour (α)

$$(\alpha) \qquad \mu_2 u + \mu_1 \sin\alpha . v - \mu_1 \mu_2 \alpha = 0$$

ou

$$(\alpha\ bis) \qquad x = \delta \frac{\mu_1 \sin\alpha - \mu_2}{\mu_1 \sin\alpha + \mu_2}, \qquad y = \frac{\mu_1 \mu_2 \alpha}{\mu_1 \sin\alpha + \mu_2}.$$

Remarquons que tant que α est inférieur à π, x est, en valeur absolue, inférieur à δ, demi-distance des origines, c'est-à-dire que le point (α) correspondant est entre les axes Au et Bv.

Pour α supérieur à π, ce point serait en dehors des axes. Fractionnons donc le nomogramme à partir de cette valeur de α, ou, puisque nous venons de remarquer que α et β sont ensemble inférieurs ou supérieurs à π, à partir de $\beta = \pi$, pour changer le sens croissant des β sur Au. Cela revient, en désignant par α' et β' des valeurs de α et β supérieures à π, à prendre pour β'

$$(\beta)' \qquad u = \mu_1(2\pi - \beta'),$$

en conservant l'équation (e).

Il vient alors pour (α')

$$(\alpha') \qquad -\mu_2 u + \mu_1 \sin\alpha' . v + \mu_1 \mu_2 (2\pi - \alpha') = 0$$

ou

$$(\alpha'\ bis) \qquad x = \delta \frac{\mu_1 \sin\alpha' + \mu_2}{\mu_1 \sin\alpha' - \mu_2}, \qquad y = \frac{-\mu_1 \mu_2 (2\pi - \alpha')}{\mu_1 \sin\alpha' - \mu_2}.$$

On voit immédiatement que le point (α') coïncide avec le point (α), dont la cote est liée à la sienne par la relation

$$\alpha = 2\pi - \alpha'.$$

Il suffit donc de construire les points (α) pour $\alpha < \pi$ et d'inscrire à côté de chacun d'eux la cote $2\pi - \alpha$, en plus de la cote α, pour avoir du même coup les points (α'). On pourra d'ailleurs, pour plus de commodité, incrire ces cotes en degrés.

Sur le nomogramme de la figure 95, emprunté au Mémoire **O.11**, on a pris $\mu_2 = 10\mu_1$, ce qui donne les formules

$$(\beta) \qquad u = \mu_1 \beta,$$

$$(e) \qquad v = 10 \mu_1 e,$$

$$(\alpha) \qquad x = \delta \frac{\sin\alpha - 10}{\sin\alpha + 10}, \qquad y = \frac{10 \mu_1 \alpha}{\sin\alpha + 10}.$$

Pour obtenir le degré de précision requis par l'Astronomie moderne, il faudrait évidemment adopter une valeur de μ_1 qui rendrait l'emploi du nomogramme peu pratique.

Un nomogramme construit avec $\mu_1 = 50^{mm}$, ce qui lui donne une hauteur de 20^{cm}, fournit aisément l'approximation du demi-degré (1).

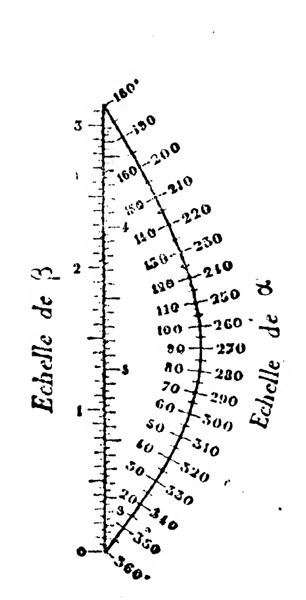
Sur celui de la figure 95, on a pris $\mu_1 = 10^{mm}$.

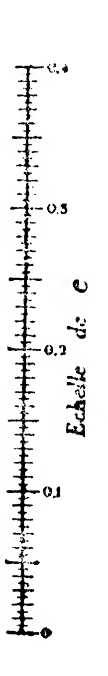
La construction du nomogramme est des plus simples. En effet, les échelles (β) et (e) sont métriques. Quant à l'échelle (α), remarquons que sa projection faite parallèlement à Au et Bv sur l'axe AB des origines, définie par la valeur ci-dessus de x, est projective d'une échelle sinusoïdale. D'autre part, le fait que, pour $e = 0$, l'équation donne $\alpha = \beta$ montre que la projection de l'échelle (α), faite à partir du point B sur Au, se confond avec l'échelle (β). De là, une très rapide construction de cette échelle (α).

D'ailleurs la construction de l'échelle portée sur Ox, projective de celle de $\sin\alpha$, exigeant la détermination directe de trois points, ceux que l'on choisira ici seront évidemment ceux qui correspondent à

$$\alpha = 0, \qquad \alpha = 30^\circ, \qquad \alpha = 90^\circ$$

Fig. 95.





pour lesquels on a respectivement

$$x = -\delta \text{ (point } \beta = 0), \qquad x = \delta\,\frac{\mu_1 - 2\mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2}, \qquad x = \delta\,\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Ce dernier point correspond à la tangente au support de l'échelle (α) parallèle à Au et Bv, puisque les points correspondant, sur cette échelle, à deux valeurs supplémentaires de α, sont sur une même parallèle aux axes.

(1) Un tel nomogramme peut encore rendre des services aux astronomes en leur fournissant pour l'application des méthodes d'approximation usitées pour la résolution de l'équation de Képler, telles que celle de Gauss (BAILLAUD, *Cours d'Astronomie*, t. II, p. 94), une valeur très sensiblement approchée qui dispense de tout tâtonnement.

Remarque complémentaire. — Cet exemple particulier va nous fournir l'occasion de faire voir comment on peut parfois, dans le cas d'une échelle curviligne, déterminer l'écartement des axes en vue de rendre aussi grand que possible le minimum de l'angle de l'index avec les échelles.

Il suffit de jeter les yeux sur la figure 95 pour voir que ce minimum est donné par l'angle de la droite qui joint le point (β) coté o au point (e) coté o,4, avec la tangente à la courbe qui porte l'échelle (α) au point coté o.

Pour calculer cet angle, remarquons d'abord le coefficient angulaire de la droite qui joint le point $u = 0$ au point $v = 0,4\,\mu_2$ est égal à $\frac{0,2\,\mu_2}{\delta}$.

D'autre part, la droite qui joint le point $u = 0$ au point α coupe l'axe Bv au point $v = \frac{\mu_2 \alpha}{\sin\alpha}$. Son coefficient angulaire est donc $\frac{\mu_2 \alpha}{2\,\delta \sin\alpha}$ dont la limite pour $\alpha = 0$ est $\frac{\mu_2}{2\,\delta}$.

Le coefficient angulaire de la tangente à l'origine au support de l'échelle (α) est donc égal à $0,5\,\frac{\mu_2}{\delta}$.

La tangente τ de l'angle que font ces deux droites est, par suite, donnée par

$$\tau = \frac{\frac{0,3\,\mu_2}{\delta}}{1 + \frac{0,1\,\mu_2^2}{\delta^2}} = \frac{0,3\,\mu_2\,\delta}{\delta^2 + 0,1\,\mu_2^2}.$$

Cherchons le maximum de τ.

L'équation ci-dessus peut s'écrire

$$\tau\,\delta^2 - 0,3\,\mu_2\,\delta + 0,1\,\mu_2^2\,\tau = 0.$$

Pour que ses racines δ soient réelles, il faut que

$$0,09\,\mu_2^2 - 0,4\,\mu_2^2\,\tau^2 \geqq 0$$

ou

$$\tau^2 \leqq \frac{9}{40}.$$

Le maximum de τ, indépendant de μ_1 et μ_2, ce qui est digne de remarque, est donc donné par

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{9}{40}} = 0,474,$$

valeur qui correspond à un angle de 25°22′30″. Pour cette valeur de τ, on a

$$\delta = \frac{0,3\,\mu_2}{2\,\tau_0} = 0,316\,\mu_2.$$

L'écartement $2\,\delta$ des axes devra donc, dans cette hypothèse, être pris égal à $0,632\,\mu_2$ [1].

---

[1] On trouvera un autre exemple au n° 123.

82. *Condition de représentabilité d'une équation d'ordre nomographique 4 par un nomogramme de genre 1.* — On peut se proposer de rechercher à quelle condition l'équation d'ordre 4 la plus générale, qui peut s'écrire

$$(1)\quad f_3(a_0f_1f_2+a_1f_1+a_2f_2+a_3)+g_3(b_0f_1f_2+b_1f_1+b_2f_2+b_3) \\ +h_3(c_0f_1f_2+c_1f_1+c_2f_2+c_3)=0,$$

est réductible au type canonique (E) du n° 78 auquel correspond un nomogramme de genre 1.

Pour trouver cette condition, nous remarquons que les valeurs ζ_1 et ζ_2 de z_1 et z_2 correspondant au point de rencontre des deux échelles rectilignes sont critiques; autrement dit, elles permettent de satisfaire à l'équation, quel que soit z_3, puisque l'alignement $\zeta_1\zeta_2$ est indéterminé (comme ayant deux points confondus). Il faut donc que les valeurs correspondantes φ_1 et φ_2 de f_1 et f_2 soient telles que l'on ait à la fois :

$$a_0\varphi_1\varphi_2+a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+a_3=0,$$
$$b_0\varphi_1\varphi_2+b_1\varphi_1+b_2\varphi_2+b_3=0,$$
$$c_0\varphi_1\varphi_2+c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+c_3=0.$$

La condition cherchée sera donc donnée par le résultat de l'élimination de φ_1 et φ_2 entre ces trois équations, élimination qui se fait très aisément suivant la même marche qu'au n° 46 (pour l'élimination de x et y entre les équations des trois cercles) et qui, si l'on représente par D le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

et par D_i ce qu'il devient quand on y remplace la colonne a_i, b_i, c_i par a_0, b_0, c_0, conduit au résultant

$$(2)\qquad DD_3+D_1D_2=0.$$

Telle est la relation que M. Clark a trouvée par une tout autre voie [1].

M. Soreau a remarqué que ce résultant n'est autre que le discriminant Δ du premier membre de (1) rendu homogène. On voit donc que ce discriminant Δ, dont on a vu le rôle essentiel dans la théorie de l'équation générale d'ordre 3 (n° 74), a une importance de même ordre pour celle d'ordre 4. Toutefois, alors que, pour la première, il y a trois cas à envisager selon que $\Delta>0$, $\Delta=0$, $\Delta<0$, il n'y en a que deux pour la seconde, selon que $\Delta=0$ ou non.

Nous avons, pour notre part, ajouté à ces résultats la remarque que voici : Lorsque cette condition est remplie, les valeurs critiques φ_1 et φ_2 de f_1 et f_2

---

(1) Dans le Mémoire visé plus loin (premier renvoi du n° 83, p. 229).

sont données par

$$\varphi_1 = \frac{D_1}{D_3}, \qquad \varphi_2 = \frac{D_2}{D_3};$$

d'où se déduisent les valeurs correspondantes ζ_1 et ζ_2 de z_1 et z_2. Si donc on se donne arbitrairement les points cotés a_1 et b_1 sur l'échelle (z_1), a_2 et b_2 sur l'échelle (z_2), comme on connaît un troisième point coté de chacune de ces échelles, savoir le point commun à leurs supports coté ζ_1 sur l'une, ζ_2 sur l'autre, ces deux échelles sont entièrement déterminées comme projectives respectivement de f_1 et de f_2.

Une fois ces échelles construites, il suffit, pour avoir un point quelconque de l'échelle (z_3), de tirer deux alignements $z_1 z_2$ correspondants. Si, par exemple, l'échelle (z_3) est conique, on en détermine ainsi quatre points, d'où l'on déduit ensuite tous les autres (n° 65).

B. — Nomogrammes de genre deux et trois.

83. *Nomogrammes coniques de genre 2 pour équations d'ordre nomographique* 3. — Il est bien remarquable que, lorsqu'on applique le procédé normal de disjonction des variables, d'un emploi courant dans la pratique, qui a été indiqué au n° 41, à l'équation d'ordre nomographique 3 la plus générale, pour laquelle, au n° 74, a été étudiée la représentation au moyen de trois échelles rectilignes, ce n'est pas sur ce mode de représentation que l'on tombe. Mettons, en effet, l'équation (1) du n° 74 sous la forme

$$(1) \qquad f_3(Af_1f_2 + B_2f_1 + B_1f_2 + C_3) + B_3f_1f_2 + C_1f_1 + C_2f_2 + D = 0,$$

et posons, conformément au procédé de disjonction indiqué au n° 41,

$$Af_1f_2 + B_2f_1 + B_1f_2 + C_3 = u,$$
$$B_3f_1f_2 + C_1f_1 + C_2f_2 + D \;= v.$$

Si nous reprenons les notations du n° 75, nous trouvons que le résultat de l'élimination de f_2 entre ces deux équations peut s'écrire

$$(z_1) \qquad E_1f_1^2 + (B_3u - Av - F_1)f_1 + C_2u - B_1v + G_1 = 0.$$

De même, l'élimination de f_1 entre ces deux équations donne

$$(z_2) \qquad E_2f_2^2 + (B_3u - Av - F_2)f_2 + C_1u - B_2v + G_2 = 0.$$

Quant au système (z_3), on a son équation en portant simplement

dans (1) les valeurs choisies pour u et v; il vient ainsi

$$(z_3) \qquad u f_3 + v = 0.$$

Les équations (z_1) et (z_2) définissent des échelles du second degré que l'on sait construire géométriquement, suivant ce qui a été vu au n° 65, et l'équation (z_3) une échelle rectiligne projective de celle de f_3; il est donc facile de construire entièrement, sans autre calcul, le nomogramme correspondant (¹). Il convient d'ailleurs de remarquer que les échelles (z_1) et (z_2) ont un même support conique, ce qui implique une sensible simplification de la construction.

Les équations de ces supports, obtenues directement (n° 65), s'écrivent, en effet, respectivement

$$(B_3 u - A v - F_1)^2 - 4E_1(C_2 u - B_1 v + G_1) = 0,$$

et

$$(B_3 u - A v - F_2)^2 - 4E_2(C_1 u - B_2 v + G_2) = 0,$$

et il est facile de vérifier que ces deux équations se réduisent à une seule, savoir

$$(2) \qquad (B_3 u - A v)^2 - 2H_3 u + 2K v + \Delta = 0,$$

lorsqu'on a posé

$$H_i = B_i(F_0 - 2B_j C_j - 2B_k C_k) + 2AC_j C_k,$$

i, j, k étant toujours une permutation circulaire de 1, 2, 3 et

$$K = AF_0 - 2B_1 B_2 B_3,$$

Δ désignant encore le discriminant du premier membre de (1) rendu homogène. On voit qu'ici, à l'inverse de ce qui a lieu dans le cas des

(¹) C'est en cherchant à traduire nomographiquement, pour l'usage de ses agents techniques, les formules d'un emploi courant dans son service que M. Wolff, ingénieur en chef du service des irrigations du Nil, appliquant purement et simplement le procédé de disjonction des variables indiqué dans la brochure **O.4** (p. 14), est tombé sur les premiers exemples de nomogrammes coniques.

L'étude systématique de ces nomogrammes a été depuis lors développée par M. J. Clark, professeur à l'École Polytechnique du Caire, dans sa remarquable *Théorie générale des abaques d'alignement de tout ordre* (*Revue de Mécanique*, 1907) pour laquelle nous avons nous-même écrit une préface que l'auteur avait bien voulu nous demander. La notion des valeurs critiques nous a permis, depuis lors, d'introduire dans cette théorie d'utiles simplifications, celles notamment qui se rencontrent dans l'exposé des nᵒˢ 82 et 83 ci-dessus.

échelles rectilignes (nº 75), la même solution reste valable quel que soit le signe de Δ.

La considération des valeurs critiques (nº 73) va d'ailleurs nous permettre d'amener la construction à sa forme la plus simple et, en même temps, de retrouver la forme canonique correspondante de l'équation (1), obtenue différemment par J. Clark [1].

Si l'on représente par **C** le support conique commun des échelles (z_1) et (z_2) et par **D** le support rectiligne de l'échelle (z_3), il est clair que les valeurs critiques définies au nº 73 correspondront aux points I et J de rencontre de la droite **D** et de la conique **C**, chaque valeur critique de z_3 étant associée aux deux valeurs critiques de z_1 et z_2 du groupe opposé au sien; autrement dit, ζ'_3 étant associée à ζ''_1 et ζ''_2 en I, ζ''_3 à ζ'_1 et ζ'_2 en J. Et, en effet, avec une telle disposition, on vérifie, ainsi que cela doit être, que deux valeurs critiques de groupes différents donnent bien toujours une valeur indéterminée : par exemple, ζ'_1 et ζ''_3 donnent pour alignement une droite quelconque passant par J (valeur indéterminée pour z_2); ζ'_1 et ζ'_2 donnent pour alignement la droite **D** elle-même (valeur indéterminée pour z_3), etc.

Tandis que si l'on associe, par exemple, ζ'_1 et ζ'_2, auquel cas l'alignement se confond avec la tangente en J à la conique **C**, la valeur ζ''_3 qui en résulte pour z_3 est parfaitement déterminée.

Ainsi, les deux valeurs critiques inscrites sur **C** en I et en J sont de même groupe; autrement dit, elles sont telles que les valeurs correspondantes φ_1 et φ_2 de f_1 et f_2 satisfont à une même équation (7) du nº 73, ce qui entraîne

$$(3) \qquad 2E_1\varphi_1 - F_1 = 2E_2\varphi_2 - F_2,$$

les E_i, F_i ayant la signification définie à cet endroit.

Substituons dès lors à f_1 et f_2 les fonctions g_1 et g_2 définies par

$$g_1 = 2E_1 f_1 - F_1, \qquad g_2 = 2E_2 f_2 - F_2.$$

Si l'on porte dans l'équation (1) ci-dessus les valeurs de f_1 et f_2 tirées de là, soit

$$f_1 = \frac{g_1 + F_1}{2E_1}, \qquad f_2 = \frac{g_2 + F_2}{2E_2},$$

et si l'on remarque, d'autre part, eu égard aux valeurs de H_i et K, ci-dessus écrites, que l'on a les relations [2]

$$F_j B_i + 2E_j C_k = F_k B_i + 2E_k C_j = H_i,$$
$$AF_i + 2E_i B_i = K,$$

---

[1] Cette manière de faire reposer, ici et dans la suite, la théorie des nomogrammes coniques sur la notion des valeurs critiques, est empruntée au Mémoire **O.50**.

[2] **O.50**, nº 6.

quel que soit i, on trouve que l'équation se transforme en

$$g_1 g_2 g_3 + (g_1 + g_2) h_3 + l_3 = 0, \tag{4}$$

équation où l'on a encore posé

$$L_3 = AF_1F_2 + 2B_1E_1F_2 + 2B_2E_2F_1 + 4C_3E_1E_2,$$
$$M_3 = BF_1F_2 + 2C_1E_2F_1 + 2C_2E_1F_2 + 4DE_1E_2,$$

et

$$Af_3 + B_3 = g_3. \qquad Kf_3 + H_3 = h_3, \qquad L_3f_3 + M_3 = l_3.$$

Cette forme d'équation (4) est bien la forme canonique trouvée par Clark.

Si l'on a effectué la réduction à cette forme, on voit que les équations (z_1), (z_2) et (z_3) correspondantes, obtenues au moyen de

$$u = g_1 g_2, \qquad v = g_1 + g_2,$$

s'écrivent

$$(z_1) \qquad u - v g_1 + g_1^2 = 0,$$
$$(z_2) \qquad u - v g_2 + g_2^2 = 0,$$
$$(z_3) \qquad u g_3 + v h_3 + l_3 = 0.$$

Le support commun des échelles (z_1) et (z_2) a alors pour équation

$$v^2 - 4u = 0,$$

et la correspondance entre les graduations portées sur ce support commun résulte de la relation

$$g_1 = g_2. \tag{5}$$

Quant à l'échelle (z_3), les fonctions g_3, h_3, l_3 s'exprimant linéairement en fonction de f_3, son support est rectiligne et elle apparaît, sur ce support, comme projective de celle de f_3.

Si l'on cherche à reformer l'équation représentée en éliminant u et v entre les trois dernières équations (z_1), (z_2) et (z_3), on trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & -g_1 & g_1^2 \\ 1 & -g_2 & g_2^2 \\ g_3 & h_3 & l_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

qui, lorsqu'on la développe, redonne bien le premier membre de (4), mais, multiplié par le facteur $g_1 - g_2$. Cela explique que les valeurs de z_1 et z_2 associées à chaque point de **C**, qui doivent satisfaire à l'équation avec une valeur quelconque pour z_3, annulent le facteur parasite $g_1 - g_2$.

Remarque. — La théorie précédente, pour laquelle, dans l'éqation (1), on

a accouplé les variables z_1 et z_2, pourrait tout aussi bien être développée si, au lieu de z_1 et z_2, on accouplait z_2 et z_3, ou encore z_3 et z_1. Seulement les facteurs parasites deviendraient alors

$$(2E_2f_2 - F_2) - (2E_3f_3 - F_3)$$

ou

$$(2E_3f_3 - F_3) - (2E_1f_1 - F_1).$$

Cela fait pressentir qu'il doit exister un mode de représentation nomographique de l'équation (1), rigoureusement symétrique par rapport aux trois variables.

M. Clark a, en effet, démontré (¹) que toute équation réductible à la forme (4) ci-dessus est susceptible d'être représentée au moyen de trois échelles portées sur une même cubique. On ramène d'abord, pour cela, cette équation à la forme canonique

$$g_1g_2g_3 + \beta\Sigma g_ig_j + \gamma\Sigma g_i + \delta = 0,$$

qui peut être écrite

$$\begin{vmatrix} g_1+\beta & g_1^2-\gamma & g_1^3+\delta \\ g_2+\beta & g_2^2-\gamma & g_2^3+\delta \\ g_3+\beta & g_3^2-\gamma & g_3^3+\delta \end{vmatrix} = 0$$

moyennant l'introduction des facteurs parasites

$$(g_1-g_2)(g_2-g_3)(g_3-g_1).$$

Ce résultat offre un intérêt d'ordre plutôt théorique; nous ne nous y arrêterons donc pas longuement.

Remarquons toutefois qu'en ce cas les valeurs critiques φ_i' et φ_i'' des fonctions f_i viennent se grouper au point double du support cubique unique, où celles d'un même groupe (φ') ou (φ'') doivent être affectées à une même branche; l'alignement tangentiel défini par deux d'entre elles coupant dès lors la seconde branche en un point de cote bien déterminée (appartenant au groupe opposé).

Il appert de là que, suivant que $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$, le support cubique a un point double à tangentes réelles (crunodal), confondues (cuspidal) ou imaginaires (acnodal).

(¹) *Loc. cit.*, Chap. V. Ce résultat a été établi différemment par M. Soreau (en même temps d'ailleurs que la plupart de ceux que M. Clark avait, en 1905, communiqués au Congrès de Cherbourg de l'A. F. A. S.) dans son Mémoire : *Nouveaux types*, p. 17.

84. *Construction des nomogrammes coniques de genre 2. Nomogrammes circulaires.* — Les échelles (z_1) et (z_2) étant construites sur la même conique **C** par le procédé indiqué au n° 65, deux couples d'alignements entre les échelles (z_1) et (z_2) donnent deux points de l'échelle (z_3), qu'il suffit de joindre pour avoir la droite **D**; l'intersection d'un troisième alignement et de cette droite fournit ensuite un troisième point de l'échelle (z_3) qui se trouve ainsi entièrement déterminée, puisqu'elle est projective d'une fonction connue f_3.

Étant donné que, si l'on cote les points de l'échelle (z_1) ou (z_2) au moyen des valeurs correspondantes de f_1 ou de f_2, le faisceau qui les unit à l'un quelconque d'entre eux est projectif d'une échelle métrique [1], on voit que les points de rencontre I et J de la droite **D** et de la conique **C** seront réels ou imaginaires, suivant que les valeurs φ_1' et φ_1'' de f_1 seront elles-mêmes réelles ou imaginaires, c'est-à-dire suivant que Δ sera positif ou négatif (n° 75).

Si donc $\Delta > 0$, on peut marquer sur **C** les points I et J qui donnent par leur jonction le support **D** de l'échelle (z_3). On connaît d'ailleurs les cotes ζ_3' et ζ_3'' de ces points sur cette échelle. Il suffit alors, par un seul alignement, d'obtenir un troisième point de cette échelle pour qu'elle soit entièrement déterminée.

Si $\Delta = 0$, les valeurs φ_1' et φ_1'' devenant égales, les points I et J se confondent et la droite **D** est tangente à la conique **C**.

Dans tous les cas, on pourra, suivant la remarque II du n° 65, ainsi que Clark l'a observé, faire en sorte que **C** soit un cercle, auquel cas le nomogramme sera dit *circulaire*.

M. Soreau [2] a mis sous une forme simple la détermination analytique de ces nomogrammes circulaires lorsque l'équation à représenter a été amenée à la forme (6) du n° 83. En effet, une propriété fondamentale des déterminants permet de changer cette forme en

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & g_1 & 1+g_1^2 \\ 1 & g_2 & 1+g_2^2 \\ g_3 & -h_3 & g_3+l_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Il suffit ensuite d'interpréter cette équation en coordonnées carté-

---

(1) *Voir* le cinquième renvoi du n° 74 (p. 204).

(2) *Nouveaux types, etc.*, p. 16.

siennes (n° 62) en prenant

$$(z_1) \qquad x = \frac{1}{1+g_1^2}, \qquad y = \frac{g_1}{1+g_1^2},$$

$$(z_2) \qquad x = \frac{1}{1+g_2^2}, \qquad y = \frac{g_2}{1+g_2^2},$$

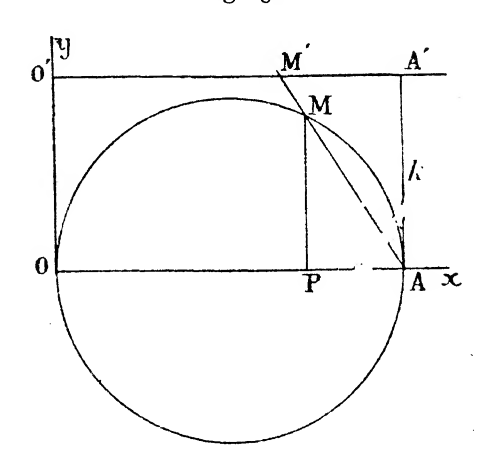
$$(z_3) \qquad x = \frac{f_3}{g_3+l_3}, \qquad y = \frac{-h_3}{g_3+l_3},$$

le module unique, suivant Ox et Oy, étant pris égal à 1.

On voit ainsi que le support commun des échelles (z_1) et (z_2) est le cercle $x^2+y^2-x=0$, décrit sur le module OA de Ox comme diamètre.

Nous avons, de notre côté [1], fait la remarque que *l'on obtient l'échelle* (z_i) *sur ce cercle en projetant à partir du point* A *l'échelle de la fonction* g_i *portée sur une parallèle* O'A' *à* Ox (*fig.* 96). Soit, en effet, k l'ordonnée de cette parallèle $\left(\text{c'est-à-dire}\right.$

Fig. 96.



le rapport $\left.\frac{AA'}{OA}\right)$. Si x' représente la longueur A'M', également évaluée avec le module OA, on a

$$x' = -k \operatorname{tang} AMP = -k\frac{1-x}{y} = -kg_i.$$

De là, une fois le cercle OA tracé, le moyen de marquer les échelles (z_1) et (z_2) par projection des échelles g_1 et g_2.

M. Soreau a encore indiqué un autre moyen de construire analytiquement les échelles circulaires [2].

---

(1) **O.51**, n° 77.

(2) *Nouveaux types, etc.*, p. 34.

Il consiste à transformer cette fois la forme (6) du n° 83 en

$$(2)\quad \begin{vmatrix} 1-(\lambda g_1+\mu)^2 & 2(\lambda g_1+\mu) & 1+(\lambda g_1+\mu)^2 \\ 1-(\lambda g_2+\mu)^2 & 2(\lambda g_2+\mu) & 1+(\lambda g_2+\mu)^2 \\ (1-\mu^2)g_3+2\lambda\mu h_3-\lambda^2 l_3 & 2(\mu g_3-\lambda h_3) & (1+\mu^2)g_3-2\lambda\mu h_3+\lambda^2 l_3 \end{vmatrix} = 0$$

et à prendre

$$(z_1)\quad x=\frac{1-(\lambda g_1+\mu)^2}{1+(\lambda g_1+\mu)^2},\qquad y=\frac{2(\lambda g_1+\mu)}{1+(\lambda g_1+\mu)^2},$$

$$(z_2)\quad x=\frac{1-(\lambda g_2+\mu)^2}{1+(\lambda g_2+\mu)^2},\qquad y=\frac{2(\lambda g_2+\mu)}{1+(\lambda g_2+\mu)^2},$$

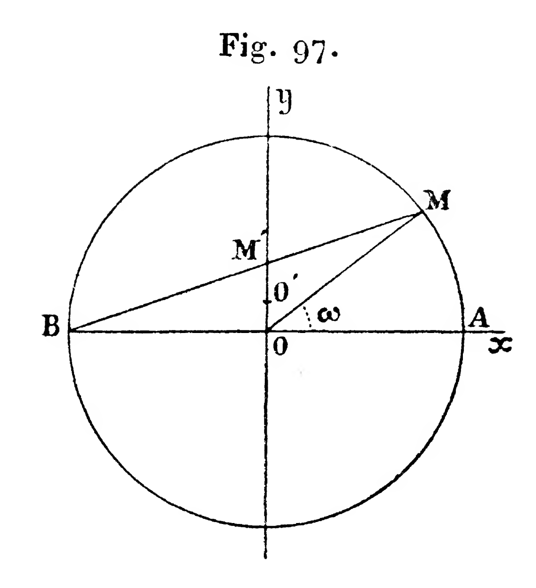
$$(z_3)\quad x=\frac{(1-\mu^2)g_3+2\lambda\mu h_3-\lambda^2 l_3}{(1+\mu^2)g_3-2\lambda\mu h_3+\lambda^2 l_3},\qquad y=\frac{2(\mu g_3-\lambda h_3)}{(1+\mu^2)g_3-2\lambda\mu h_3+\lambda^2 l_3},$$

parce qu'alors le support commun des échelles (z_1) et (z_2) est le cercle $x^2+y^2=1$.

Pour porter la graduation (z_i) sur ce cercle, M. Soreau a fait la remarque que l'on a, en appelant ω l'angle que le rayon OM fait avec Ox (*fig.* 97),

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}=\lambda g_i+\mu,$$

Fig. 97.



ce qui, si l'on a, une fois pour toutes, gradué un cercle suivant les valeurs de $\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}$, permet, par application d'un calque, d'obtenir rapidement l'échelle (z_i).

A notre tour ([1]), nous avons fait observer que si la droite BM coupe Oy en M′ et si l'on marque sur cet axe le point O′ tel que $OO'=\mu$ (mesuré avec le module OA), la formule précé-

([1]) O.51, n° 77.

dente montre que l'on a $O'M' = \lambda g_i$, c'est-à-dire que *l'on obtient l'échelle* (z_i) *en projetant sur le cercle, du point* B *où ce cercle coupe la partie négative de* Ox, *l'échelle de la fonction* g_i *portée à partir de* O' *sur* Oy *avec un module égal à* λOA.

Remarquons d'ailleurs, puisque, dans chacun des deux cas ci-dessus, le centre de projection appartient à l'échelle circulaire à construire, que ces deux constructions apparaissent comme des cas particuliers du théorème général énoncé au n° 65 au sujet des échelles coniques quelconques.

Voici un exemple d'un tel nomogramme emprunté à M. Soreau [1] :

Pour déterminer le rapport m entre l'épaisseur et le rayon intérieur d'un tuyau soumis à une forte pression intérieure p, lorsque R est le maximum de la tension de la matière de la paroi (p et R étant exprimés avec la même unité, généralement le kilogramme par millimètre carré), Lamé a donné la formule

$$m = \sqrt{\frac{R+p}{R-p}} - 1,$$

qui peut s'écrire

$$-\frac{p}{R} + \frac{(1+m)^2 - 1}{(1+m)^2 + 1} = 0,$$

laquelle rentre dans le type canonique (4) du n° 83 lorsqu'on prend

$$g_1 \equiv p, \qquad g_2 \equiv -\frac{1}{R}, \qquad g_3 \equiv 1, \qquad h_3 \equiv 0,$$

$$l_3 \equiv \frac{(1+m)^2 - 1}{(1+m)^2 + 1}.$$

Si on la met sous la forme (2) ci-dessus, elle se transforme en

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{p}{5} & \left(\frac{p}{5}\right)^2 \\ 1 & -\frac{10}{R} & \left(\frac{10}{R}\right)^2 \\ 1 & 0 & 2\,\frac{(1+m)^2 - 1}{(1+m)^2 + 1} \end{vmatrix} = 0,$$

qui se traduit par le nomogramme représenté par la figure 98.

Le fait, remarqué par M. Soreau, que, pour $m = \infty$, on a $p = R$, montre qu'il suffit, une fois obtenue l'échelle (p), de la projeter à partir du point $m = \infty$ pour avoir l'échelle (R) [2].

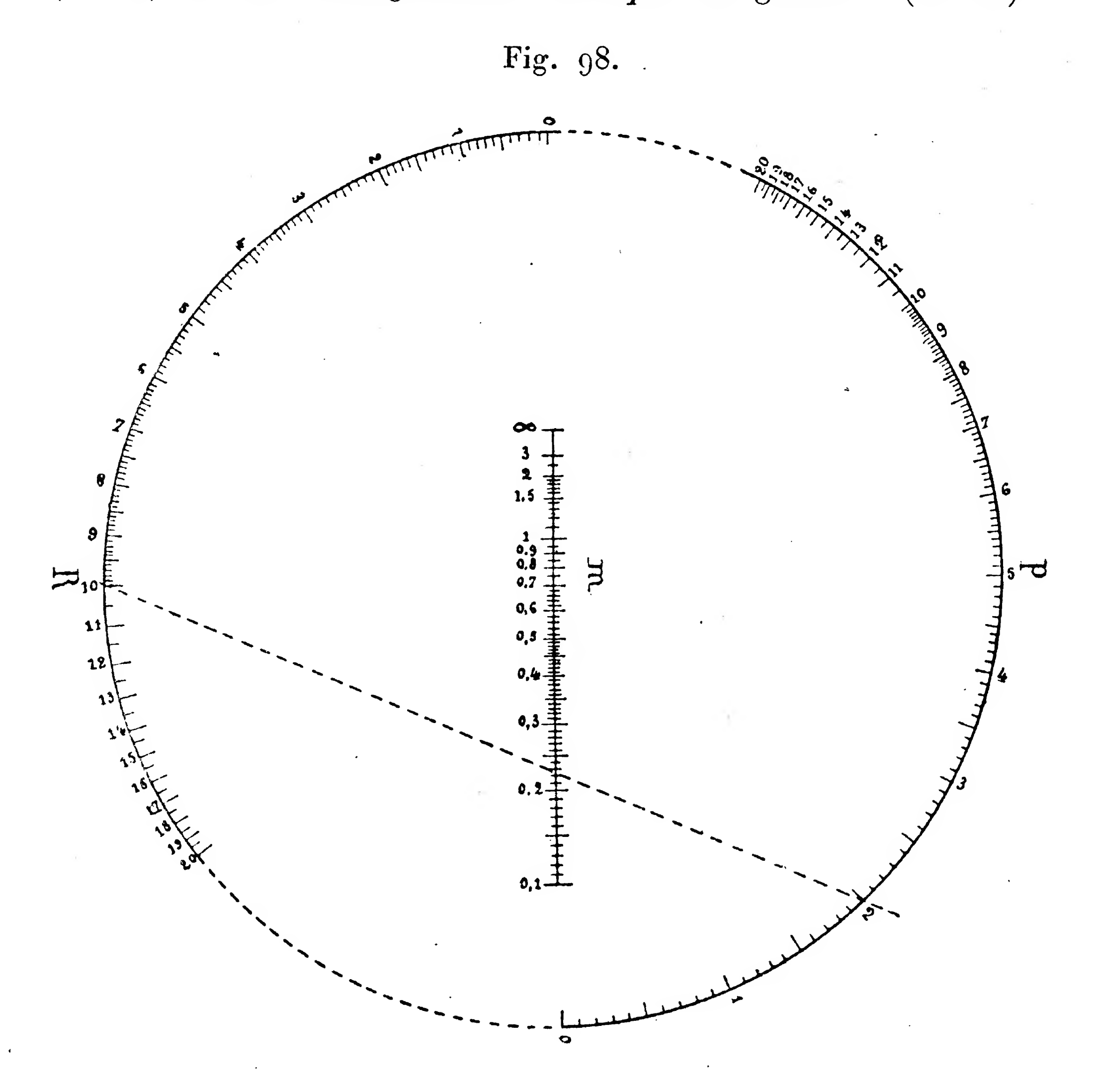
---

[1] *Contribution à la théorie et aux applications de la nomographie* dans le *Bull. de la Soc. des Ing. civils*, 1901, n° 69.

[2] On trouvera au n° 98 un exemple d'emploi de la forme (1) ci-dessus.

85. *Nomogrammes coniques de genre 3 pour équations d'ordre nomographique* 4. — Eu égard à la remarque de M. Fontené pour le cas où le discriminant Δ est négatif [1], on peut dire que *toute équation d'ordre nomographique* 3 *peut être*, ad libitum, *représentée par un nomogramme de genre* o (n° 74) *ou un nomogramme conique de genre* 1 (n° 83).

Fig. 98.



Si donc on se place au point de vue de la théorie générale, on constate qu'en ce qui concerne l'ordre 3, l'introduction des nomogrammes coniques n'a d'autre avantage que de permettre une représentation purement projective dans le cas où $\Delta < 0$ [2].

---

[1] Troisième renvoi du n° 74 (p. 203).

[2] Il convient de noter à cet égard que l'immense majorité des équations d'ordre 3 fournies par les applications pratiques, rentrent dans le type $\Delta \geqq 0$, et, par suite, sont projectivement représentables par un nomogramme de genre o. Pour avoir un exemple du type $\Delta < 0$, Clark a dû recourir à une équation choisie exprès et non, à proprement parler, puisée dans la pratique, savoir

$$\operatorname{tang} \varphi_3 = \frac{\operatorname{tang} \varphi_1 + \operatorname{tang} \varphi_2}{1 - \operatorname{tang} \varphi_1 \operatorname{tang} \varphi_2},$$

équivalente à $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3$, et qui, à cet égard, fournit l'exemple le plus simple de l'anamorphose indiquée par M. Fontené.

Mais, quand il s'agit des équations d'ordre nomographique 4, l'intérêt de cette introduction est tout autre. Nous avons vu, en effet, au n° 82, que, pour qu'une telle équation, écrite sous la forme

$$(1) \quad f_3(a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3) + g_3(b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3) \\ + h_3(c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3) = 0,$$

soit représentable par un nomogramme de genre 1, il faut que la relation (2) de ce n° 82 soit satisfaite, savoir celle qui, avec les notations définies à cet endroit, s'écrit

$$(2) \qquad DD_3 + D_1 D_2 = 0.$$

Or, *si cette expression est différente de zéro, l'équation* (1), ainsi que Clark en a le premier fait la remarque, *est représentable par un nomogramme de genre* 3, à supposer, bien entendu, que les fonctions f_3, g_3, h_3 soient linéairement indépendantes, sans quoi on retomberait sur le cas traité au n° 83.

Cet important résultat peut s'établir comme suit [1] :

Représentant par A_{12}, B_{12}, C_{12} les coefficients de f_3, g_3, h_3 dans (1), effectuons la disjonction des variables dans cette équation en posant

$$(3) \qquad C_{12} u - A_{12} = 0, \qquad C_{12} v - B_{12} = 0.$$

Pour que ces équations permettent de réaliser effectivement cette disjonction, il faut que les trois équations

$$(4) \qquad A_{12} = 0, \qquad B_{12} = 0, \qquad C_{12} = 0$$

ne soient pas compatibles. Si, en effet, elles l'étaient, on aurait

$$C_{12} = l A_{12} + m B_{12},$$

et, des équations (3), on déduirait

$$lu + mv = 1,$$

équation indépendante de z_1 et z_2, ce qui équivaudrait à une impossibilité. Or, si l'on se reporte au n° 82, on voit que la condition d'incompatibilité des équations (4) est que le premier membre de (2) soit différent de zéro.

Ainsi donc, lorsque cette condition est remplie, il suffit de porter les valeurs de u et v tirées de (3) dans (1) pour avoir l'échelle (z_3) qui, ici, est curviligne, puisque f_3, g_3, h_3 sont linéairement indépendantes.

Quant aux échelles (z_1) et (z_2) on les obtiendra en éliminant successivement f_2 et f_1 entre les équations (3). Si l'on pose

$$U_i = c_i u - a_i, \qquad V_i = c_i v - b_i.$$

---

[1] *Mémoire* **O.50**, n° 12.

on voit que les équations (3) peuvent s'écrire

$$f_2(U_0 f_1 + U_2) + U_1 f_1 + U_3 = 0,$$
$$f_2(V_0 f_1 + V_2) + V_1 f_1 + V_3 = 0,$$

d'où, si l'on pose encore

$$W_{ij} = U_i V_j - U_j V_i,$$

on tire, par élimination de f_2,

$$W_{01} f_1^2 + (W_{03} - W_{12}) f_1 + W_{23} = 0,$$

équation linéaire en u et v, attendu que l'on vérifie immédiatement que tous les W_{ij} sont linéaires en u et v. On a donc ainsi l'équation d'une échelle (z_1), et de même pour (z_2) par permutation des indices 1 et 2.

On peut d'ailleurs facilement vérifier que les deux échelles (z_1) et (z_2) ont même support conique, attendu que, pour (z_1) par exemple, on a pour l'équation du support

$$(W_{03} - W_{12})^2 - 4 W_{01} W_{23} = 0.$$

Or, de la relation qui définit les W_{ij}, on déduit que

$$W_{03} W_{12} = W_{02} W_{13} - W_{01} W_{23}.$$

Cela permet de transformer l'équation du support en

$$W_{03}^2 + W_{12}^2 - 2(W_{01} W_{23} + W_{02} W_{13}) = 0,$$

qui ne change pas quand on permute les indices 1 et 2, puisque

$$W_{21} = -W_{12}.$$

Si les fonctions f_3, g_3, h_3 s'expriment par des polynomes du deuxième degré portant sur une même fonction de z_3, l'échelle (z_3) est elle-même conique, et peut, comme (z_1) et (z_2), se construire suivant le mode indiqué au n° 65.

86. *Exemple : Fruit intérieur des murs de soutènement.* — Parmi les équations rentrant dans le type (1) du numéro précédent, on peut citer celles qui appartiennent au type (1) du n° 42. De telles équations sont donc représentables par nomogramme conique que l'on peut construire géométriquement comme on vient de l'indiquer. Nous pouvons, en particulier, reprendre à ce point de vue l'exemple traité en droites concourantes au n° 45; mais, afin de donner un exemple complet du traitement analytique d'une question de ce genre, nous développerons entièrement la solution dans ce cas.

Reprenons donc l'équation du n° 45 :

$$(1 + l) h^2 - l(1 + p) h - \frac{(1 - l)(1 + 2p)}{3} = 0,$$

relative au calcul du fruit intérieur des murs de soutènement.

Nous aurons sa représentation au moyen de points alignés en changeant simplement x et y en u et v dans les équations (l), (p), (h) du n° 45, ce qui donne

$$(l) \qquad 2(l^2-1)u+3l(l+1)v-l(l-1)=0,$$

$$(p) \qquad 2(2p+1)u+3(p+1)v-(p+1)(2p+1)=0,$$

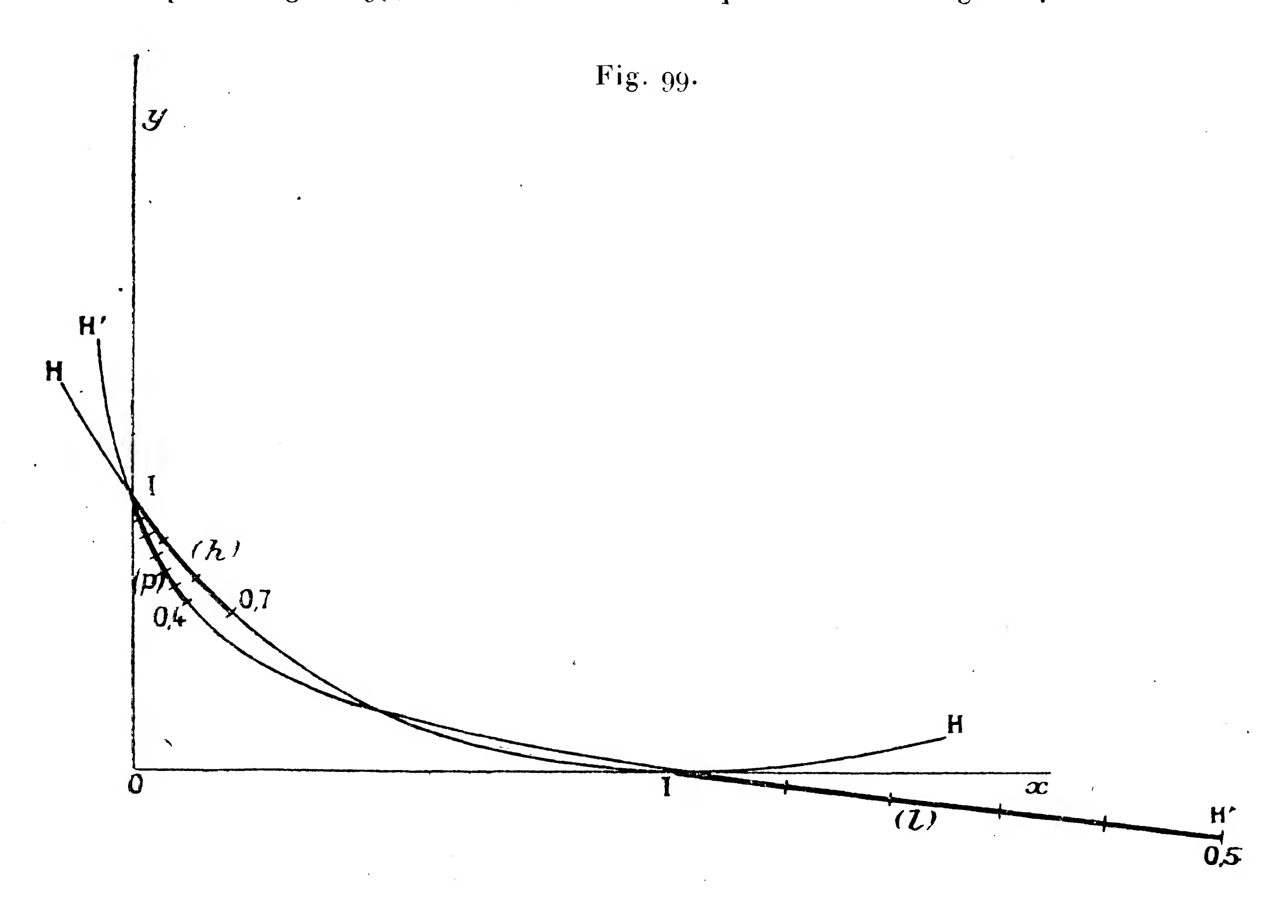
$$(h) \qquad hu+v-h^2=0.$$

Ce sont trois systèmes du second degré, et les deux premiers ont pour support une même conique, d'après ce qui vient d'être vu. Les cotes l et p d'un même point de cette conique, considéré successivement comme appartenant à l'un puis à l'autre, sont d'ailleurs liées par l'équation

$$p(l+1)+1=0.$$

Si l'on construit les trois systèmes ci-dessus, on obtient la disposition représentée par la figure 99, corrélative de celle que montre la figure 46.

Fig. 99.



Nous avons, à la fin du n° 45, fait ressortir les défauts de cette dernière. Ceux qu'offre la disposition de la figure 99 ne sont pas moins sensibles. On voit, en effet, que les droites joignant deux à deux les divers points des échelles (p) et (l), prises dans leurs parties utiles, coupent cette dernière sous un angle très petit. Pour remédier à ce défaut, nous allons appliquer ici la transformation homographique exposée au n° 61, qui renvoie pour les formules au n° 43.

Faisant varier l et p de $\frac{1}{2}$ à 1, proposons-nous de faire en sorte que le quadrangle limite formé par les points

$$l = 1, \qquad l = \frac{1}{2}, \qquad p = 1, \qquad p = \frac{1}{2}$$

soit le rectangle des points

$$u = 0, \qquad u = 1, \qquad v = 1, \qquad v = 0,$$

l'unité de longueur étant d'ailleurs prise égale au demi-écartement des axes.

Nous référant aux notations du n° **43**, posons

$$\begin{aligned} H(l) &= \lambda f_1 + \mu g_1 + \nu h_1, \\ G(p) &= \lambda f_2 + \mu g_2 + \nu h_2, \\ K(h) &= \lambda f_3 + \mu g_3 + \nu h_3, \end{aligned}$$

et de même avec les accents *prime* et *seconde*. Les fonctions f_i, g_i, h_i étant ici

$$\begin{aligned} f_1 &= 2l^2 - 2, & g_1 &= 3l^2 + 3l, & h_1 &= -l^2 + l, \\ f_2 &= 4p + 2, & g_2 &= 3p + 3, & h_2 &= -2p^2 - 3p - 1, \\ f_3 &= h, & g_3 &= 1, & h_3 &= -h^2, \end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned} H(l) &= (2\lambda + 3\mu - \nu)l^2 + (3\mu + \nu)l - 2\lambda, \\ G(p) &= -2\nu p^2 + (4\lambda + 3\mu - 3\nu)p + 2\lambda + 3\mu - \nu, \\ K(h) &= -\nu h^2 + \lambda h + \mu, \end{aligned}$$

et les équations des points (l), (p), (h) s'écrivent

$$\begin{aligned} &(l)_1 \qquad & H(l)u + H'(l)v + H''(l) &= 0, \\ &(p)_1 \qquad & G(p)u + G'(p)v + G''(p) &= 0, \\ &(h)_1 \qquad & K(h)u + K'(h)v + K''(h) &= 0. \end{aligned}$$

Les conditions imposées au quadrangle limite donnent donc les relations

$$\begin{aligned} &(1) \quad H'(1) = 0, & H''(1) &= 0, \quad (2) \\ &(3) \quad H'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, & H\left(\frac{1}{2}\right) + H''\left(\frac{1}{2}\right) &= 0, \quad (4) \\ &(5) \quad G(1) = 0, & G'(1) + G''(1) &= 0, \quad (6) \\ &(7) \quad G\left(\frac{1}{2}\right) = 0, & G''\left(\frac{1}{2}\right) &= 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Les équations (5) et (7) développées sont

$$\begin{aligned} \lambda + \mu - \nu &= 0, \\ 8\lambda + 9\mu - 6\nu &= 0, \end{aligned}$$

d'où

(9) $$\frac{\lambda}{3}=\frac{\mu}{-2}=\frac{\nu}{1}.$$

Les équations (1) et (3) sont

$$\mu'=0,$$
$$6\lambda'-9\mu'-\nu'=0,$$

d'où

(10) $$\frac{\lambda'}{1}=\frac{\mu'}{0}=\frac{\nu'}{6}.$$

Les équations (2) et (8) sont

$$\mu''=0,$$
$$8\lambda''+9\mu''-6\nu''=0,$$

d'où

(11) $$\frac{\lambda''}{3}=\frac{\mu''}{0}=\frac{\nu''}{4}.$$

Enfin les équations (4) et (6) sont

$$6\lambda-9\mu-\nu+6\lambda''-9\mu''-\nu''=0,$$
$$\lambda'+\mu'-\nu'+\lambda''+\mu''-\nu''=0$$

ou, en tirant les λ et les μ en fonction des ν des équations (9), (10) et (11)

$$10\nu+\nu''=0,$$
$$10\nu'+3\nu''=0,$$

d'où

$$\frac{\nu}{-1}=\frac{\nu'}{-3}=\frac{\nu''}{10}.$$

Prenons

$$\nu=-2,\qquad \nu'=-6,\qquad \nu''=20.$$

Les équations (9), (10), (11) nous donnent alors

$$\lambda=-6,\qquad \lambda'=-1,\qquad \lambda''=15,$$
$$\mu=4,\qquad \mu'=0,\qquad \mu''=0.$$

Portant ces valeurs dans les expressions des H, G et K écrites plus haut nous avons

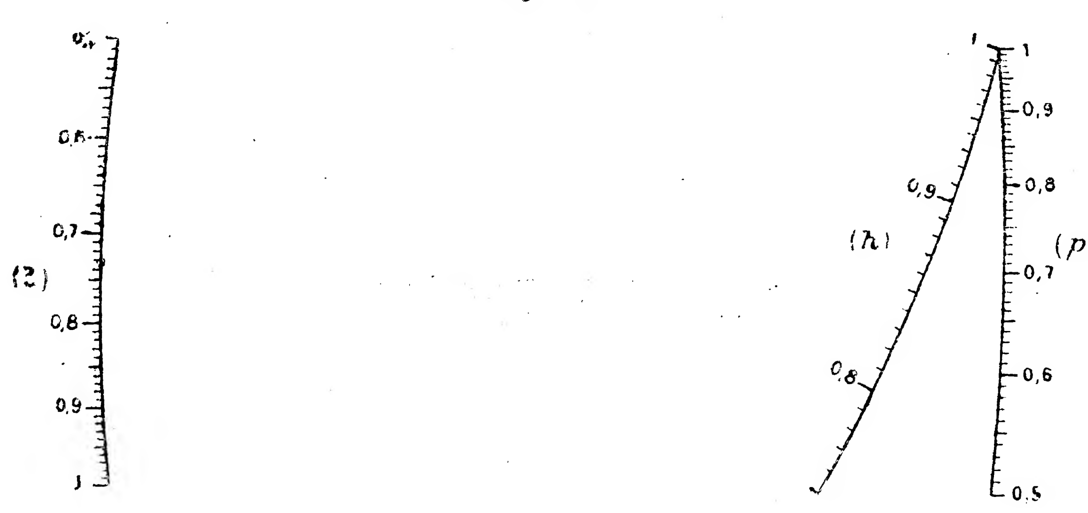
$$\begin{aligned}
H(l) &= 2(l+2)(l+3),\\
H'(l) &= 2(l-1)(2l-1),\\
H''(l) &= 10(l-1)(l+3),\\
G(p) &= 2(p-1)(2p-1),\\
G'(p) &= 2(2p+1)(3p+2),\\
G''(p) &= -10(2p-1)(2p+1),\\
K(h) &= 2(h-1)(h-2),\\
K'(h) &= h(6h-1),\\
K''(h) &= -5h(4h-3);
\end{aligned}$$

d'où enfin, pour les équations des systèmes (l), (p) et (h),

$$(l)_2 \qquad (l+2)(l+3)u+(l-1)(2l-1)v+5(l-1)(l+3)=0,$$
$$(p)_2 \qquad (p-1)(2p-1)u+(2p-1)(3p+2)v-5(2p-1)(2p+1)=0,$$
$$(h)_2 \qquad 2(h-1)(h-2)u+h(6h-1)v-5h(4h-3)=0.$$

Voyons comment on peut construire ces divers systèmes qui constituent des échelles curvilignes (*fig.* 100).

Fig. 100.



Échelle (l). — On a immédiatement les points cotés 1 et 0,5, qui sont, d'après la détermination même qui vient d'être faite :

(1)	$u=0$,	c'est-à-dire	$x=-1$,	$y=0$,
(0,5)	$u=1$,	»	$x=-1$,	$y=1$;

puis les points cotés -2 et -3 :

(-2)	$v=1$,	c'est-à-dire	$x=1$,	$y=1$,
(-3)	$v=0$,	»	$x=1$,	$y=0$;

enfin le point coté ∞ :

$$(\infty) \qquad u+2v+5=0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x=\frac{1}{3}, \qquad y=\frac{-5}{3}.$$

L'échelle curviligne (l), projetée successivement de chaque point (-2) et (-3) sur une parallèle à la droite joignant ce point au point (∞), donne une échelle métrique, et, comme on connait les points (1) et (0,5) de ces échelles métriques, la construction en est des plus aisées.

Échelle (p). — Les quatre points (l) cotés (1), (0,5), (-2) et (-3) sont les points (p) cotés $(-0,5)$, $\left(-\frac{2}{3}\right)$, (1) et (0,5), en vertu de la remarque faite au début de ce numéro, qui se vérifie d'ailleurs sur l'équation $(p)_2$.

Quant au point (∞), il est ici

$$u + 3v - 10 = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x = \frac{1}{2}, \qquad y = \frac{5}{2}.$$

La construction sera la même que pour l'échelle (l), les centres de projection étant ici

$$(-0,5)\ [\text{ou } (l = 1)] \qquad \text{et} \qquad \left(-\frac{2}{3}\right)[\text{ou } (l = 0,5)].$$

Échelle (h). — Pour l'échelle (h), on a tout de suite les points

(1)	$v = 1,$	c'est-à-dire	$x = 1,$	$y = 1,$
(2)	$11v = 25,$	»	$x = 1,$	$y = \frac{25}{11},$
(0)	$u = 0,$	»	$x = -1,$	$y = 0,$
$\left(\frac{3}{4}\right)$	$5u + 21v = 0,$	»	$x = \frac{8}{13},$	$y = 0,$
(∞)	$u + 3v - 10 = 0,$	»	$x = \frac{1}{2},$	$y = \frac{5}{2}.$

On voit que les points (h) cotés 0, 1 et ∞ coïncident respectivement avec les points (p) cotés $-\frac{1}{2}$, 1 et ∞.

D'ailleurs, l'équation donnée montre que, quel que soit h, pour $l = 1$, on a

$$p = 2h - 1.$$

Donc les droites joignant le point (l), coté 1 aux divers points (h), passent par les points (p) cotés $2h - 1$, ce qui simplifie grandement la construction de l'échelle (h), puisque, à une simple modification des cotes près, l'un des faisceaux qui ont servi à obtenir l'échelle (p) sert également pour l'échelle (h).

IV. — Application de la méthode des points alignés à la représentation des lois empiriques.

87. *Manière de traduire certaines lois empiriques en nomogrammes à points alignés.* — Lorsqu'une quantité dépend expérimentalement de deux autres, on peut toujours, moyennant des interpolations convenables, en représenter les valeurs par une table à double entrée, elle-même transformable en abaque cartésien (n° 16) moyennant l'inscription des valeurs relevées sur la table à double entrée aux divers points d'un quadrillage métrique et la jonction, par des lignes continues, des points ainsi pourvus des mêmes cotes.

Or ces lignes peuvent, de prime abord, apparaître comme des droites; ou bien elles s'écarteront assez peu de telles droites pour qu'on puisse les réduire à celles-ci; ou même il sera possible de les transformer en lignes droites moyennant une anamorphose graphique convenablement choisie (nº 28), voire déterminée par le procédé systématique du lieutenant-colonel Lafay (*Annexe II*). Peut-être aussi les lignes d'égal élément apparaîtront-elles comme des droites sur un quadrillage anamorphosé suivant une certaine loi mathématique, notamment sur un quadrillage logarithmique ([1]).

Si, par le moyen de l'un ou l'autre de ces essais, on a pu traduire la table empirique d'où l'on est parti en abaque à droites concourantes, on a déjà un premier renseignement intéressant : on sait que la relation qui lie la fonction z_3 aux variables indépendantes z_1 et z_2 est de la forme

$$f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0,$$

mais il reste encore à déterminer la nature des fonctions f_3, g_3, h_3. C'est ici que s'accuse un nouvel avantage de la méthode des points alignés sur celle des droites concourantes. En effet, cette détermination exige qu'on arrive à déterminer le mode de distribution des éléments du système (z_3), c'est-à-dire, dans le cas des droites concourantes, l'enveloppe des droites du système (z_3) et la répartition de leurs points de contact sur cette enveloppe. Or, une telle détermination, dans tous les cas assez délicate, est, en réalité, le plus souvent impossible. Il suffit, pour s'en rendre compte, de se reporter, par exemple, à la figure 69. On voit que l'enveloppe des droites (z_3) dont la partie utile figure sur l'abaque se trouve fort loin en dehors des limites de cet abaque, et même, tant sont petits les angles que font entre elles ces droites (z_3) (circonstance des plus courantes dans la pratique) que l'on pourrait, sans que l'œil pût avertir de l'erreur commise, substituer à cette enveloppe un point de convergence pr

([1]) Les exemples analogues sont tellement fréquents dans la pratique qu'on ne saurait d'une manière générale trop recommander ce mode de représentation aux physiciens. Il existe d'ailleurs maintenant, dans le commerce, du papier quadrillé logarithmiquement, ainsi que nous l'avons dit dens le renvoi du nº 26. Nous tenons, à ce propos, à rapporter que le professeur C.-V. Boys, dont, en mai 1896, nous visitions le laboratoire du Collège de Science à Londres, nous disait avoir systématiquement recours à ce mode de représentation qui, dans un grand nombre de cas, lui avait été du plus utile secours.

à l'intersection des deux droites extrêmes de la partie utile du système, celles qui, sur la figure 69, sont cotées 0,04 et 0,20. Or, en procédant ainsi, on errerait gravement.

Que si, au contraire, on passe de cet abaque à droites concourantes au nomogramme à points alignés correspondant suivant le mode indiqué au n° **60**, ce qui donne la figure 69 *bis*, le support des points (z_3) apparaît nettement incurvé faisant ressortir que, sur la figure 69, les droites (z_3) prolongées, non convergentes, seraient tangentes à une enveloppe corrélative de ce support, ici confondu (en tout cas, généralement assimilable) à un arc de conique.

Si, au lieu de conduire à un support incurvé, la transformation appliquée donnait un support rectiligne, l'analyse de la graduation pourrait se faire soit par essai de projection d'échelles usuelles (au sujet de la nature desquelles on peut, au reste, avoir déjà une intuition), soit par tracé de la ligne représentative de l'échelle (z_3) (n° 3), c'est-à-dire du lieu des extrémités d'ordonnées menées normalement au support rectiligne et dont les longueurs soient proportionnelles aux cotes des points de l'échelle (z_3) par où elles sont menées.

Si le support de (z_3) est curviligne, l'emploi de faisceaux projectifs ayant leur sommet en un point de cette échelle permettra généralement, par une marche inverse de celle indiquée pour la construction au n° **63**, de déterminer la nature analytique des fonctions intervenantes.

Le mieux pour éclaircir le mode d'emploi de cette méthode est d'en donner quelques exemples.

88. *Premier exemple : Vitesse d'un train remorqué par une locomotive de type connu.* — Dans ce premier exemple, l'empirisme de la loi représentée n'intervient que dans la détermination d'une fonction de l'une des variables, liée aux autres variables par une formule mathématiquement déterminée.

Il s'agit ici d'une formule, traduite en nomogramme à points alignés, par M. M. Beghin, ingénieur de la Compagnie des Chemins de fer départementaux ([1]).

Soient :

M et R_m le poids et la résistance par tonne de la machine;
T et R_t les mêmes quantités pour le train remorqué;
r la rampe de la voie en millimètres;
E l'effort de la machine.

([1]) *A. P. C.*, livraison d'octobre 1892, p. 548.

On a, entre ces quantités, la relation

$$E = M(R_m + r) + T(R_t + r).$$

Pour une machine donnée, M est une constante; quant à E, R_m et R_t, ce sont des fonctions *empiriques* de la vitesse V. L'équation ci-dessus lie donc en réalité les trois variables r, T et V.

Remarquons qu'elle peut s'écrire

$$E - M(R_m - R_t) = (T + M)(R_t + r).$$

Si l'on pose

$$E - M(R_m - R_t) = F(V),$$
$$R_t = \Phi(V),$$
$$T + M = P,$$

P étant le poids total du train, qui peut être pris comme variable indépendante au lieu de T, elle devient

$$F(V) = P[\Phi(V) + r]$$

ou

$$r - \frac{F(V)}{P} + \Phi(V) = 0.$$

Sous cette forme, et si l'on regarde les variables r, P et V comme z_1, z_2 et z_3, on voit immédiatement qu'elle rentre dans le type du n° 78. Il suffit donc, pour la représenter, de poser

(r) $$u = \mu_1 r,$$

(P) $$v = \frac{-\mu_2}{P},$$

ce qui donne

(V) $$\mu_2 u + \mu_1 F(V) v + \mu_1 \mu_2 \Phi(V) = 0.$$

Les échelles (r) et (P), respectivement portées par les axes Au et Bv sont faciles à construire. L'échelle curviligne (V) peut également être construite lorsqu'on connaît empiriquement F(V) et Φ(V), c'est-à-dire un tableau, sous forme numérique ou sous forme graphique (n°s 9 ou 12), des valeurs de ces fonctions correspondant à diverses valeurs de V. Au surplus, si les vitesses extrêmes entre lesquelles on applique la formule ne sont pas très éloignées, la fonction Φ(V) varie peu dans l'intervalle, et, en représentant par k sa valeur sensiblement constante, on voit que les points (V) sont distribués sur la droite, dont les coordonnées parallèles sont

$$u = -\mu_1 k, \qquad v = 0.$$

Mais M. Beghin a fait la remarque que, à défaut même de la détermination empirique des fonctions F et Φ, l'échelle (V) pouvait être construite lorsqu'on disposait d'un tableau d'essais. En effet, prenant des couples de valeurs de r et de P correspondant à *une même vitesse* V, on n'a qu'à unir par des droites les points cotés, au moyen de ces valeurs sur les échelles (r) et (P). Ces

droites devront passer par le point coté au moyen de la valeur de V considérée. Cette façon de procéder est conforme à la remarque faite à la fin du n° 61. Elle a, en outre, ici, l'avantage de permettre de rectifier des erreurs

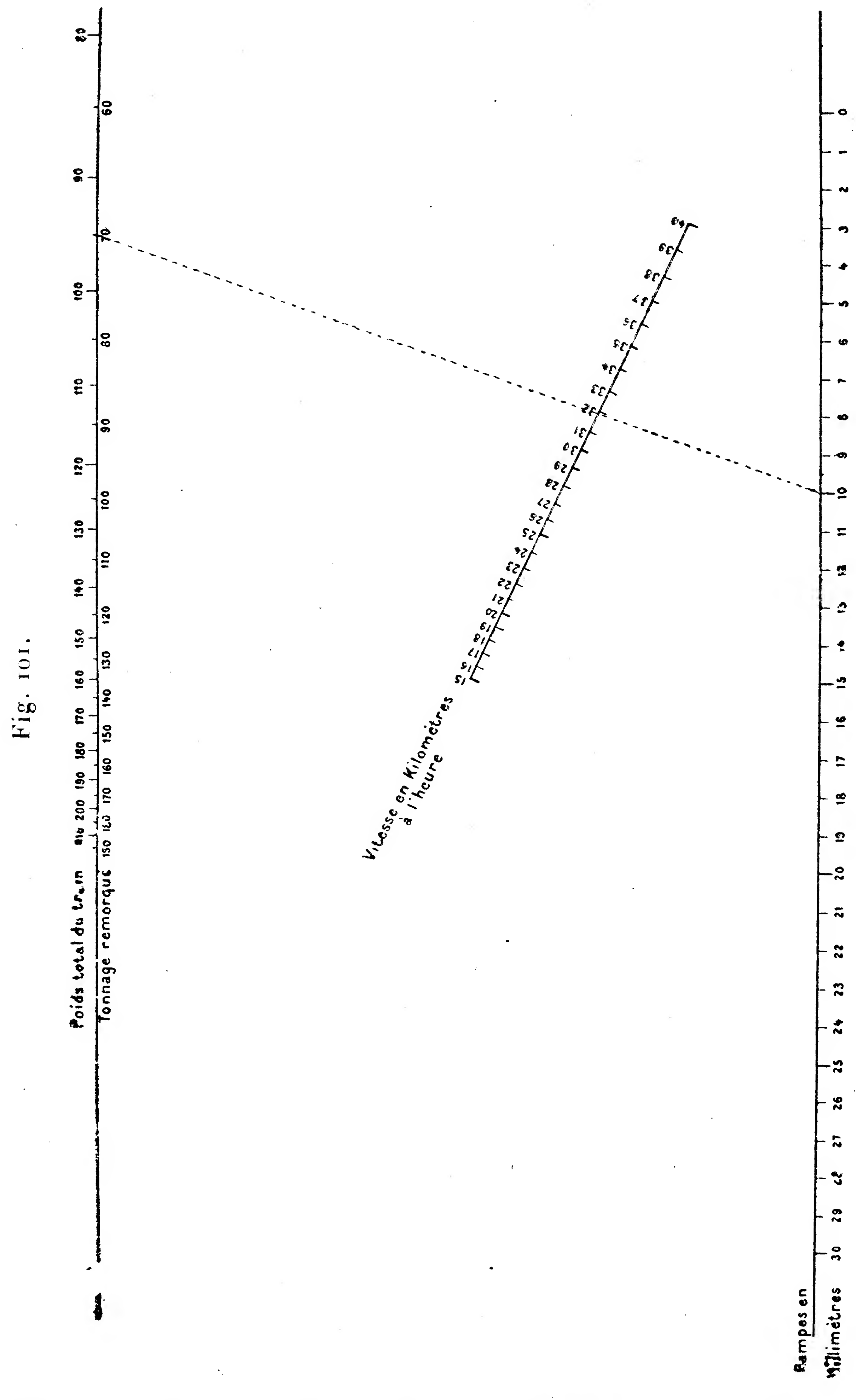


Fig. 101.

d'expérience, attendu que toutes les droites répondant au cas où V a la valeur donnée doivent passer par un même point.

La figure 101 reproduit le nomogramme de M. Beghin, construit avec les

modules $\mu_1 = 11^{m}$, $\mu_2 = 4^{mm}$, pour la machine de 25[t] des chemins de fer corses.

La position de l'index, tracée en pointillé, correspond à l'exemple numérique $r = 10^{mm}$, $T = 70^{T}$ ou $P = 95^{T}$, pour lequel on a $V = 32^{km}$.

89. *Deuxième exemple : Vitesse initiale d'un projectile.* — Cet exemple est emprunté à un intéressant travail du lieutenant d'artillerie Lafay (¹) (aujourd'hui lieutenant-colonel et professeur à l'École Polytechnique).

La charge C d'un canon dépend de la vitesse initiale V qu'on veut imprimer au projectile, et celle-ci est fonction de la portée P et de ce que les artilleurs appellent l'*angle tabulaire* Φ.

Il s'agit donc, pour déterminer la charge C ou, ce qui revient au même, la vitesse V, de construire un abaque donnant V lorsque P et Φ sont connus.

Ayant remarqué que, pour de petites valeurs de Φ, la relation qui unit ces quantités peut prendre la forme

$$\sin 2\Phi = f(V)F(P),$$

où f et F sont des fonctions connues empiriquement, on est conduit, pour chercher à étendre cette formule à de plus grandes valeurs de Φ, après avoir gradué les axes cartésiens Ox et Oy suivant les lois

$$x = \mu_1 F(P),$$
$$y = \mu_2 \sin 2\Phi,$$

à marquer sur le quadrillage ainsi obtenu les points correspondant à des couples de valeurs de P et de Φ donnant, d'après l'expérience, une même valeur de V et à unir, pour chaque valeur de V, ces divers points par une ligne (*fig.* 102).

Fig. 102.

Cette ligne passe par l'origine et reste d'abord presque confondue avec sa tangente en ce point, ce qui explique que, pour les petites valeurs de Φ, la

(¹) *Revue d'Artillerie*, octobre 1895.

Le colonel Langensheld, de l'artillerie russe, a étendu aux mortiers de côte le travail que le lieutenant Lafay avait réalisé pour notre canon de 155 long.

formule ci-dessus est sensiblement exacte. Mais elle ne tarde pas à s'en écarter. Pourtant, si l'on ne considère que sa portion MN correspondant aux valeurs pratiques de la portée ($2000 \leqq P \leqq 5000$ pour le mortier, par exemple), on reconnaît que l'arc ainsi limité diffère peu d'une droite qui, prolongée de part et d'autre, est dessinée en trait mixte sur la figure.

On peut, avec une approximation suffisante, substituer, entre les limites considérées, cette droite, à la courbe donnée par l'expérience, et cela pour toutes les valeurs pratiques de V. L'abaque ainsi défini en coordonnées cartésiennes peut, dès lors, être transformé en un nomogramme à points alignés ainsi qu'il a été expliqué au n° 87.

C'est de cette façon qu'a été obtenu le nomogramme dressé par M. Lafay, dont la figure 103 est une réduction.

A l'échelle de l'angle tabulaire a été accolée celle de la hausse correspondante, à l'échelle de la vitesse initiale celle de la charge pratique.

Nous nous sommes borné, pour les besoins de notre exposé, à extraire du travail très intéressant de M. Lafay l'exemple précédent, mais ce savant officier a traité de même les divers calculs que soulève le tir des pièces de siège et a réuni tous les nomogrammes correspondants sur une même planche de 34^{cm} sur 38^{cm}, des lettres de référence indiquant la façon dont les diverses échelles doivent être associées.

Cette possibilité de réunir les divers nomogrammes dans les limites d'un cadre étroit, par juxtaposition de leurs échelles respectives, est un avantage sérieux à l'actif de la méthode des points alignés.

90. *Troisième exemple : Consommations théoriques d'une machine à vapeur.* — Voici enfin un cas bien remarquable, traité par M. Rateau, ingénieur au Corps des Mines (¹), où, comme on va voir, l'emploi de la méthode des points alignés a permis, suivant ce qui a été indiqué au n° 87, de mettre en évidence une loi physique qui n'avait pas été trouvée jusque-là.

La consommation théorique K d'une machine à vapeur dépend des pressions P (amont) et p (aval) entre lesquelles elle fonctionne. K s'exprime d'ailleurs en kilogrammes par cheval-heure, P et p en kilogrammes par centimètre carré.

Guidé par l'intuition, M. Rateau a eu l'excellente idée de construire les lignes d'égale consommation (K) sur un quadrillage logarithmique défini par

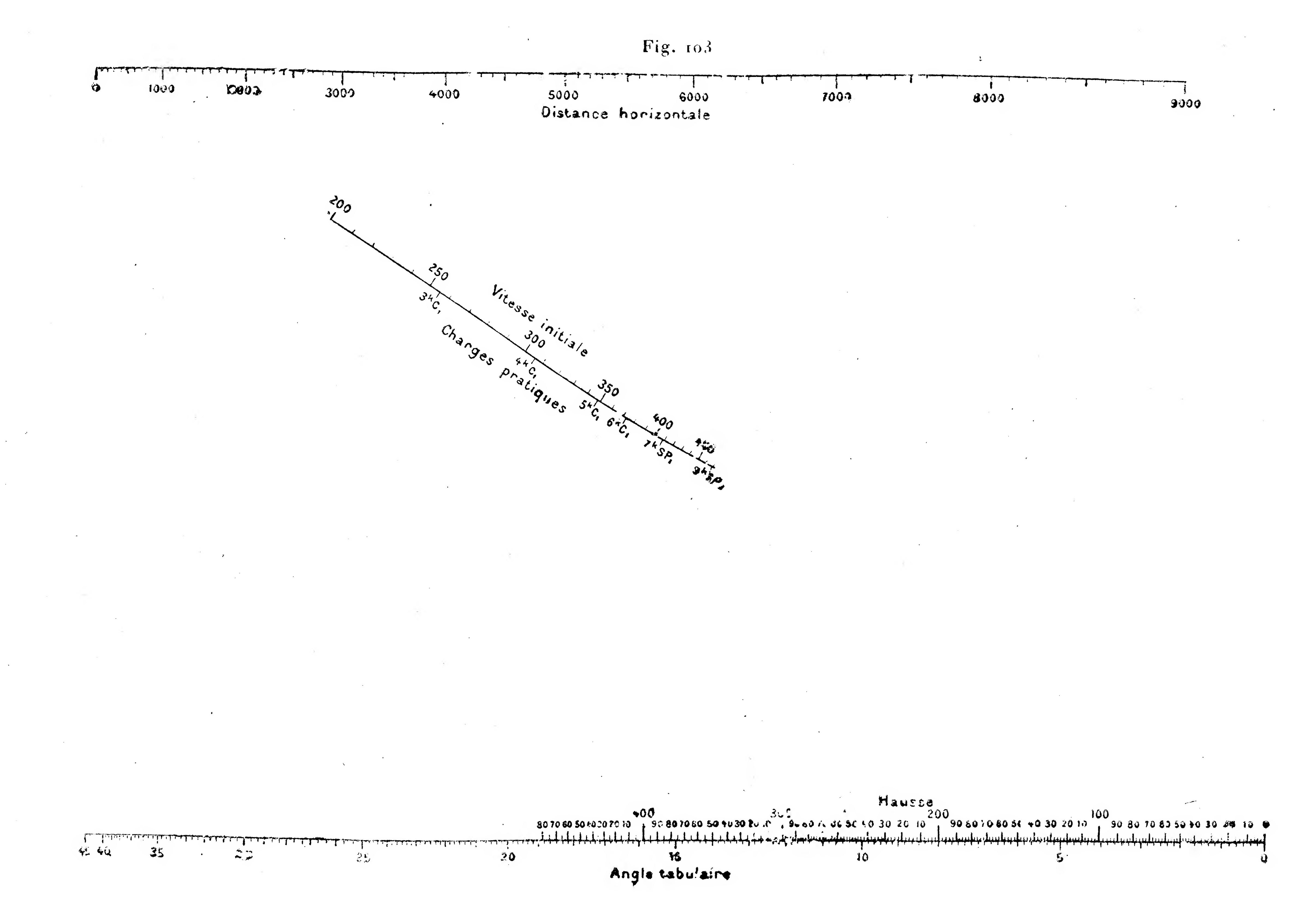
$$x = \mu \log p, \qquad y = \mu \log P,$$

et il a ainsi constaté, au degré d'approximation permis par l'expérience, que ces lignes (K) se confondaient avec des droites (*fig.* 104). C'était un premier point déjà intéressant; il en résultait que l'équation unissant les variables K, p et P est de la forme

$$f(K) \log p + \varphi(K) \log P + \psi(K) = 0.$$

(¹) *Annales des Mines*, février 1897.

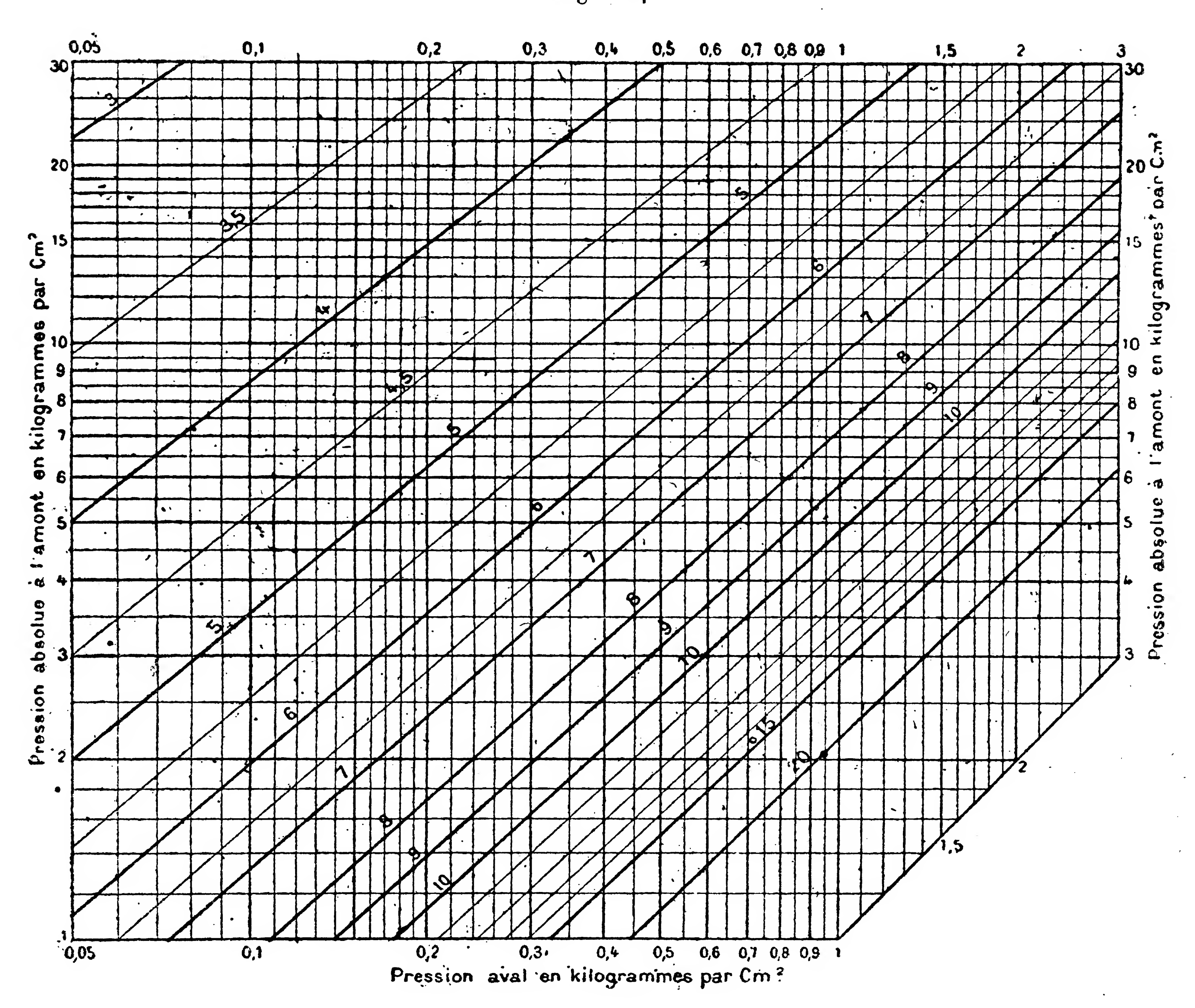
Fig. 103



Distance horizontale
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
Vitesse initiale
200
250
300
350
400
450
Charges pratiques
3k C,
4k C,
5k C,
6k C,
7k SP,
9k SP,
Hausse
100
200
300
400
Angle tabulaire
0
5
10
15
20
25
35
40

Mais lorsqu'on jette les yeux sur la figure 104, il ne paraît guère facile de reconnaître si les droites obtenues sont ou non concourantes, vu que leur

Fig. 104.



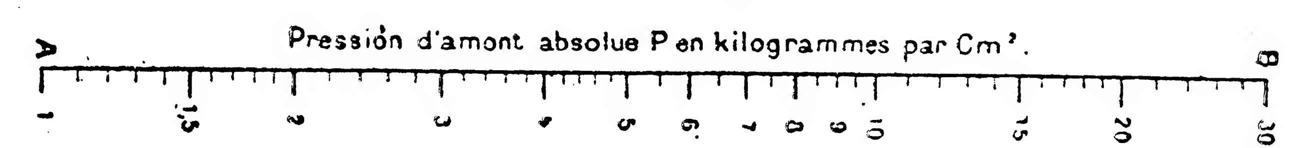
point de concours, s'il existe, se trouve fort éloigné des limites du dessin. Afin d'en décider, M. Rateau a eu recours à la transformation de cet abaque à droites concourantes en un nomogramme à points alignés, suivant le mode indiqué au n° 87 (¹), ce qui lui a donné la figure 105.

On voit ainsi que les points cotés (K) viennent, dans les limites au moins de l'expérience, se disposer en ligne droite, d'où l'on doit conclure que les fonctions f, φ et ψ, précédemment laissées arbitraires, sont linéaires par

(¹) Il faut observer qu'on est ici dans un cas où s'applique la remarque contenue dans le 1° du premier renvoi du n° 60. C'est pourquoi les sens croissants des échelles (P) et (p) sur la figure 105 se trouvent inverses l'un de l'autre.

rapport à une même fonction χ de K. On a donc

$$f = a + b\chi,$$
$$\varphi = a' + b'\chi,$$
$$\psi = a'' + b''\chi,$$





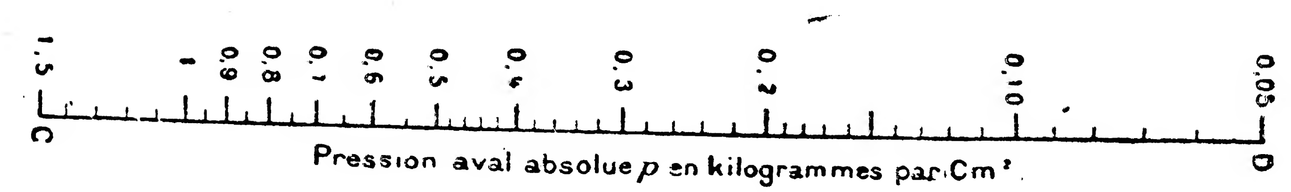


Fig. 105.

et l'équation encore inconnue que représente le nomogramme doit être de la

forme

$$(a + b\chi)\log p + (a' + b'\chi)\log P + a'' + b''\chi = 0.$$

Pour avoir la représentation de cette équation en points alignés, en plaçant les points (K) entre les axes parallèles Au et Bv, on pose

$$u = \mu \log p, \qquad v = -\mu \log P,$$

μ étant un module quelconque, ce qui donne

$$(a + b\chi)u - (a' + b'\chi)v + \mu(a'' + b''\chi) = 0.$$

L'ordonnée du point que définit cette équation est

$$y = \frac{-\mu(a'' + b''\chi)}{(a - a') + (b - b')\chi}$$

et, par suite, la formule qui définit l'échelle (K) sur son support,

$$w = \frac{-\mu'(a'' + b''\chi)}{(a - a') + (b - b')\chi},$$

μ' étant le module dont la projection sur la direction des axes Au et Bv est égale a μ.

Pour analyser cette graduation, remarquons que, dans le cas théorique où les pressions d'amont et d'aval seraient égales, la consommation K serait infinie, quelle que fût cette commune valeur P de la pression. Or, toutes les droites unissant deux à deux les points (p) et (P) de même cote passent, d'après les formules qui définissent ces mêmes échelles, par le point

$$u + v = 0,$$

c'est-à-dire par le milieu de la distance des origines non marquées A et B. Prenant donc le point de rencontre d'une quelconque de ces droites avec le support du système (K), on a le point E coté ∞.

Si maintenant en chaque point de l'échelle (K) on élève une perpendiculaire proportionnelle à sa cote, on obtient la courbe représentative de la fonction définie par cette échelle (n° 3). Or cette courbe, qui a nécessairement pour asymptote la perpendiculaire élevée en E au support EF de l'échelle, semble au premier coup d'œil se confondre avec une hyperbole équilatère. Admettant cette hypothèse, on peut, au moyen de théorèmes connus sur l'hyperbole équilatère, en faire la vérification graphique [1]; elle se trouve ainsi justifiée.

---

[1] Soient, par exemple, M et N deux points quelconques de l'hyperbole. Menons par chacun de ces points des parallèles aux directions asymptotiques: nous formons ainsi un rectangle dont la seconde diagonale coupe l'asymptote connue au centre O de la courbe. Cela posé, si une droite quelconque menée par O coupe en I et en J les parallèles aux asymptotes menées par l'un des points M ou N, le quatrième

Il en résulte que la formule définissant l'échelle (K) est de la forme

$$w = \frac{\alpha}{\beta + \gamma K},$$

ce qui aura lieu, en vertu de la formule écrite plus haut, si

$$b'' = 0$$

et

$$\gamma = K.$$

L'équation prend donc la forme

$$(a + bK)\log p + (a' + b'K)\log P + a'' = 0,$$

et comme, ainsi que nous venons de le voir, $p = P$ doit toujours donner $K = \infty$, il faut, en outre, que

$$b + b' = 0.$$

Comme d'ailleurs b et b' ne sauraient être nuls, car K disparaîtrait de l'équation, nous pourrons poser $b = 1$, et nous voyons finalement que l'équation cherchée est de la forme

$$(a + K)\log p + (a' - K)\log P + a'' = 0.$$

Portant dans cette équation des systèmes de valeurs de K, p et P donnés par le nomogramme, et traitant les équations linéaires en a, a', a'' ainsi obtenues par la méthode des moindres carrés, on trouve

$$a = -0,85, \qquad a' = -0,07, \qquad a'' = 6,95.$$

L'équation cherchée est donc, si l'on change tous les signes,

$$(0,85 - K)\log p + (K + 0,07)\log P - 6,95 = 0,$$

d'où

$$K = 0,85 + \frac{6,95 - 0,92\log P}{\log P - \log p}.$$

Telle est l'expression mathématique de la loi suivant laquelle K dépend de P et p.

Elle cadre remarquablement avec les données de l'expérience, comme M. Rateau le fait voir dans son Mémoire [1].

---

sommet du rectangle, dont les trois premiers sont M ou N, I et J, appartient à la courbe. On trouve ainsi que si, pour construire l'hyperbole, on a porté perpendiculairement à EF les ordonnées $y = \lambda K$, la seconde asymptote est définie par $y = 0,4\lambda$.

[1] On doit encore à M. Rateau l'idée d'un ingénieux dispositif qui permettrait de réaliser mécaniquement le nomogramme à points alignés ci-dessus (A. F. A. S.; Congrès de Pau; 1892). Supposons une masse gazeuse, de pression p, emprisonnée

Le point sur lequel nous insisterons ici, c'est l'importance qu'a présentée, pour la recherche qui vient d'être résumée, l'emploi de la méthode des points alignés. C'est elle, en effet, qui, permettant de reconnaître que les éléments cotés (K) formaient une série linéaire, et en ramenant l'analyse de la graduation correspondante à celle d'une simple échelle rectiligne, a rendu possible la détermination complète de l'équation qui traduit analytiquement la loi suivant laquelle K dépend de P et p.

---

sous une cloche flottante. Les variations de p entraîneront des variations de niveau de la cloche, et l'on conçoit que l'on pourra déterminer le profil de celle-ci de façon que ces variations de niveau soient proportionnelles à $\log p$. Les extrémités de deux tiges verticales fixées respectivement sur deux telles cloches donneront ainsi, par leurs déplacements, les variations de $\log p$ et de $\log P$, et pourront, par suite, servir à marquer, sur les échelles parallèles de la figure 105, les points cotés (p) et (P). Si donc un fil est constamment tendu (grâce, par exemple, à deux petites poulies et deux contrepoids égaux) entre les extrémités de ces tiges, il coïncidera à chaque instant avec la position de l'index qui, par sa rencontre avec l'échelle intermédiaire, fait connaître la valeur de K.

CHAPITRE V.

REPRÉSENTATION PAR POINTS ALIGNÉS DANS LE CAS DE PLUS DE TROIS VARIABLES.

I. — Alignements multiples et points condensés.

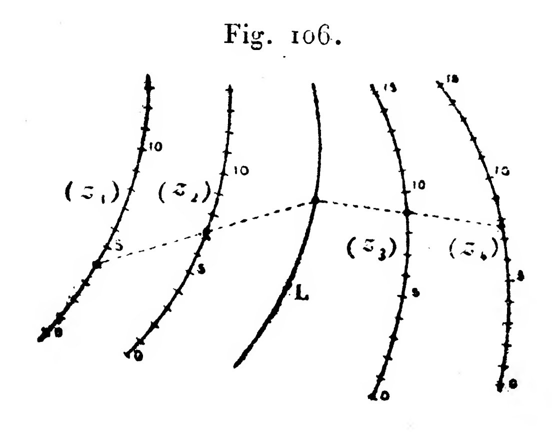
91. *Principe du double alignement.* — Supposons que l'équation $F_{1234} = 0$ soit dissociable (au sens défini au n° 49) en deux équations de la forme

$$\text{(E)} \qquad \begin{vmatrix} f & g & h \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{(E')} \qquad \begin{vmatrix} f & g & h \\ f_3 & g_3 & h_3 \\ f_4 & g_4 & h_4 \end{vmatrix} = 0,$$

où f, g, h sont des fonctions d'une variable auxiliaire ζ.

Fig. 106.



Chacune d'elles sera représentable par un nomogramme à points alignés, et l'on voit, puisque les fonctions f, g, h de ζ sont les mêmes dans les deux équations, que leur échelle curviligne (ζ) sera la même.

Par suite, les deux nomogrammes pourront être construits avec cette échelle en commun (*fig.* 106).

Si l'on se donne les valeurs de trois des variables z_1, z_2, z_3, z_4, les équations (E) et (E') permettent de calculer celle de la quatrième, en plus de celle de ζ.

Sur le nomogramme, la droite passant par les points cotés z_1 et z_2 et la droite passant par les points cotés z_3 et z_4 se coupent au point coté ζ.

Le nomogramme qui vient d'être construit fournira donc, dans ce cas, une représentation de l'équation à quatre variables considérée.

Son mode d'emploi, pour obtenir z_4, par exemple, connaissant z_1, z_2 et z_3, se réduira à ceci :

Faire passer l'index par les points cotés z_1 et z_2, puis le faire pivoter autour du point où il rencontre l'échelle (ζ) jusqu'à ce qu'il passe par le point coté z_3. Il coupe alors la dernière échelle au point coté z_4.

Comme, en général, on n'aura pas besoin de connaître la valeur correspondante de la variable auxiliaire ζ, on pourra se dispenser de marquer la graduation relative à cette variable; il suffira de tracer son support qui sera dit la *ligne des pivots* ou la *charnière*. Si pourtant on veut, dans chaque cas, repérer la position du pivot, on n'aura qu'à marquer sur cette ligne une graduation *absolument quelconque*.

Le nomogramme ainsi constitué par l'accolement de deux nomogrammes à points alignés ayant une échelle commune sera dit, pour rappeler son mode d'emploi, un *nomogramme à double alignement* ([1]).

Il est d'ailleurs bien clair que ce mode d'extension de la méthode de l'alignement est exactement corrélatif de celui qui a, au n° 49, été indiqué pour la méthode des lignes concourantes, sous la condition supplémentaire toutefois que chacune des équations de dissociation soit du type représentable en points alignés.

En pratique, on n'aura le plus souvent à appliquer la méthode que dans le cas où la charnière sera rectiligne, auquel cas, on pourra toujours faire en sorte que l'échelle auxiliaire (ζ) soit métrique, c'est-

---

([1]) Les nomogrammes ainsi obtenus sont désignés dans la Note **O.30** sous le nom d'*abaques à pivotement*.

à-dire que les équations (E) et (E′) s'écrivent

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\zeta \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\zeta \\ f_3 & g_3 & h_3 \\ f_4 & g_4 & h_4 \end{vmatrix} = 0.$$

L'élimination de ζ, immédiatement effectuée, donne alors

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_3 & h_3 \\ g_4 & h_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_3 & g_3 \\ f_4 & g_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_1 & h_1 \\ g_2 & h_2 \end{vmatrix}.$$

M. Soreau a mis cette équation sous une forme très élégante ([1]), grâce à la simple remarque que voici : la charnière rectiligne étant considérée comme la ligne de terre d'une épure de Géométrie descriptive, on peut regarder les échelles (z_1) et (z_2) commé tracées dans un des plans de projection, les échelles (z_3) et (z_4) dans l'autre. Les alignements (z_1, z_2) et (z_3, z_4) se coupant sur la ligne de terre, cela revient à dire que, *dans l'espace*, les quatre points (z_1), (z_2), (z_3), (z_4) sont dans un même plan ou *coplanaires* ([2]). Si nous rapportons les points de l'espace à trois axes parallèles Au, Bv, Cw dont le premier coïncide avec la ligne de terre, on voit que les équations des quatre points sont de la forme

$$\begin{aligned} uf_1 + vg_1 \qquad\quad & + h_1 = 0, \\ uf_2 + vg_2 \qquad\quad & + h_2 = 0, \\ uf_3 \qquad + wg_3 & + h_3 = 0, \\ uf_4 \qquad + wg_4 & + h_4 = 0, \end{aligned}$$

et, par suite, que leur coplanation s'exprime par l'équation

$$(1\ bis) \qquad \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 0 & h_1 \\ f_2 & g_2 & 0 & h_2 \\ f_3 & 0 & g_3 & h_3 \\ f_4 & 0 & g_4 & h_4 \end{vmatrix} = 0,$$

équivalente, par suite, à (1).

([1]) Dans son premier Mémoire du *Bull. de la Soc. des Ingénieurs civils*, 1902 p. 320.

([2]) On trouvera plus loin (n° 109), un exemple de réalisation effective de nomogramme à points coplanaires.

Le principal intérêt de cette transformation tient à ce qu'elle permet d'étendre à un tel nomogramme, comme M. Soreau en a fait lui-même la remarque, l'artifice au moyen duquel nous avons obtenu le transformé homographique le plus général d'un nomogramme à simple alignement (n° 43), en multipliant (1 *bis*) par un déterminant non plus à neuf, mais à seize éléments.

Nous allons maintenant examiner divers cas particuliers.

92. *Échelles rectilignes et parallèles.* — Dans ce cas, l'équation donnée est de la forme

$$(E) \qquad f_1 + f_2 = f_3 + f_4.$$

On la décompose immédiatement en

$$(E') \qquad f_1 + f_2 = \zeta$$

et

$$(E'') \qquad f_3 + f_4 = \zeta.$$

On peut construire les nomogrammes de ces deux dernières équations [dont l'accolement par l'échelle (ζ) engendrera le nomogramme demandé] par l'un ou par l'autre des procédés suivants qui, bien entendu, ne sont pas théoriquement distincts, mais qui, au point de vue de la pratique, offrent une différence capitale sur laquelle on insistera plus loin.

Premier procédé. — Pour représenter l'équation (E'), on peut poser

$$(z_1) \qquad u_1 = \mu_1 f_1,$$

$$(\zeta) \qquad u = -\mu\zeta.$$

Il vient alors pour z_2, en vertu de ce qui a été vu au n° 67,

$$(z_2) \qquad u_2 = -\mu_2 f_2,$$

avec

$$(1) \qquad \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_1},$$

l'axe A_2u_2 (*fig.* 107) étant d'ailleurs tel que

$$\frac{A_2A_1}{A_2A} = -\frac{\mu_1}{\mu}$$

ou, si l'on tient compte de (1),

$$\frac{A_1A}{A_2A} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Représentant par x_1 et x_2 les distances des axes A_1u_1 et A_2u_2 à l'axe Au des pivots, on peut écrire

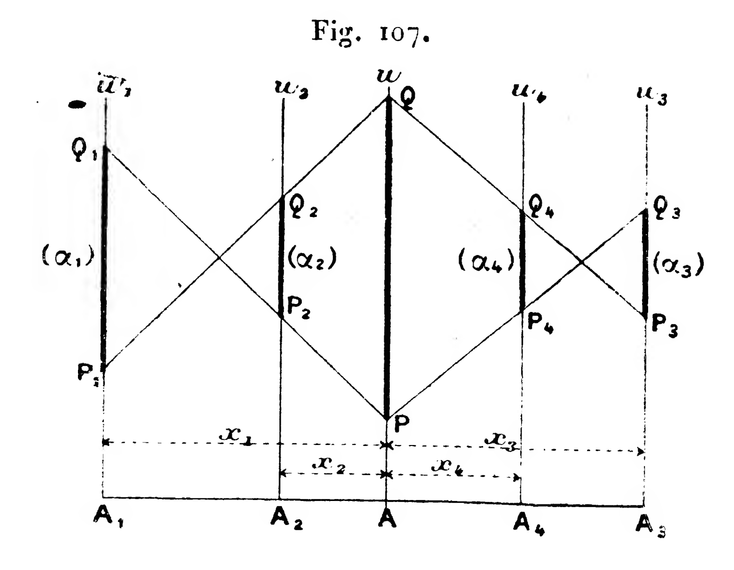
(2) $$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

De même l'équation (E″) sera représentée par

(z_3) $$u_3 = \mu_3 f_3,$$

(ζ) $$u = -\mu\zeta,$$

Fig. 107.



μ ayant la même valeur que ci-dessus, et

(z_4) $$u_4 = -\mu_4 f_4,$$

avec

(3) $$\frac{1}{\mu_4} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_3}.$$

et

(4) $$\frac{x_3}{x_4} = \frac{\mu_3}{\mu_4}.$$

On obtient ainsi la disposition de la figure 107 [1].

---

[1] On a, sur cette figure, placé pour plus de clarté les systèmes (z_1), (z_2) d'une part, (z_3), (z_4) de l'autre, de côtés différents par rapport à la charnière. Mair rien n'empêche évidemment, pour réduire la largeur du nomogramme, de placer les deux couples de systèmes associés d'un même côté de cette charnière.

Les cinq modules μ, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 ne sont astreints à vérifier que les égalités (1) et (3). On pourra donc chercher à les déterminer en vue de la meilleure disposition du nomogramme.

Comme on connaît les limites [1] entre lesquelles, pratiquement, reste comprise chaque variable, on peut calculer les différences δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 entre les valeurs extrêmes des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4.

Si, dès lors, on veut faire en sorte que les échelles (z_1) et (z_2) d'une part, (z_3) et (z_4) de l'autre aient même longueur, on posera

$$\mu_1 \delta_1 = \mu_2 \delta_2,$$
$$\mu_3 \delta_3 = \mu_4 \delta_4.$$

Ces deux équations, jointes à (1) et (3), permettent d'exprimer quatre des modules en fonction du cinquième, μ par exemple. On trouve ainsi

$$\mu_1 = \mu \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1}, \qquad \mu_2 = \mu \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_3},$$
$$\mu_3 = \mu \frac{\delta_3 - \delta_4}{\delta_3}, \qquad \mu_4 = \mu \frac{\delta_3 - \delta_4}{\delta_4}.$$

Les quatre échelles seront de même longueur si $\mu_1 \delta_1 = \mu_3 \delta_3$, c'est-à-dire

$$\delta_1 - \delta_2 = \delta_3 = \delta_4.$$

Il ne reste plus qu'à choisir le module μ pour que les diverses graduations donnent le degré d'approximation exigé.

Second procédé. — On pose

(z_1) $$u_1 = \mu_1 f_1,$$
(z_2) $$u_2 = \mu_2 f_2,$$
(z_3) $$u_3 = \mu_3 f_3,$$
(z_4) $$u_4 = \mu_4 f_4,$$

enfin

(ζ) $$u = \mu \zeta.$$

---

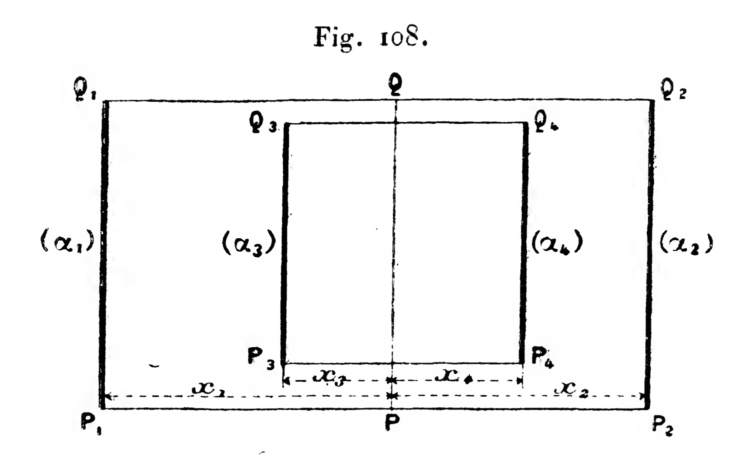
[1] Théoriquement, les valeurs limites de trois des variables prises comme indépendantes entraînent celles de la quatrième; mais, en pratique, celle-ci reste généralement comprise entre des valeurs plus resserrées que ces limites théoriques, et qui résultent de l'expérience.

avec

(5) $$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_4}.$$

Dans ce cas, la charnière est située à la fois entre les échelles (z_1) et (z_2) et entre les échelles (z_3) et (z_4) (*fig.* 108), les distances x_1,

Fig. 108.



x_2, x_3, x_4 de cet axe aux supports parallèles de ces échelles étant telles que

(6) $$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{\mu_1}{\mu_2}, \qquad \frac{x_3}{x_4} = -\frac{\mu_3}{\mu_4}.$$

Si l'on veut ici que les échelles (z_1) et (z_2) d'une part, (z_3) et (z_4) de l'autre, soient de même longueur, il faut avoir, en appelant toujours δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 les différences entre les valeurs extrêmes des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4,

$$\mu_1 \delta_1 = \mu_2 \delta_2, \qquad \mu_3 \delta_3 = \mu_4 \delta_4,$$

ce qui donne

$$\mu_1 = \mu \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_1}, \qquad \mu_3 = \mu \frac{\delta_3 + \delta_4}{\delta_3},$$

$$\mu_2 = \mu \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_2}, \qquad \mu_4 = \mu \frac{\delta_3 + \delta_4}{\delta_4}.$$

Les quatre échelles seront de même longueur si $\mu_1 \delta_1 = \mu_3 \delta_3$ ou

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_3 + \delta_4.$$

Dans ce cas comme dans le précédent, si $\mu_1 = \mu_3$ et $\mu_2 = \mu_4$, on peut faire coïncider les supports des échelles (z_1) et (z_3) d'une part, (z_2) et (z_4) de l'autre. Il suffit, pour cela, de placer les deux graduations d'un même support de part et d'autre de ce support, en

adoptant le même côté pour celles qui doivent être associées dans un même alignement.

Comparaison des deux procédés. — Le premier procédé présente l'avantage (surtout lorsque les deux couples d'échelles associées sont d'un même côté de la charnière) que les deux points dont il faut prendre l'alignement sont, pour chacune des deux positions de l'index, du même côté du pivot. Lorsque cette condition est remplie, on peut se servir pour l'index d'un fil tendu que l'on fixe sur le pivot. Si elle ne l'est pas, comme dans le second procédé, on ne peut plus fixer le fil sur le pivot, et, pour repérer la position du pivot, il convient de munir l'axe sur lequel il se trouve d'une graduation d'ailleurs absolument quelconque. En revanche, ce second procédé a l'avantage de limiter la longueur de la portion utile de la charnière à celle de la plus grande longueur des échelles parallèles (*fig.* 108), tandis que, dans le premier cas, elle la dépassait sensiblement, à moins que l'on ne diminuât beaucoup la longueur des échelles P_3Q_3 et P_4Q_4 (*fig.* 107).

Cette seconde considération l'emportera généralement sur la première. Toutefois, il y aura des cas où, pratiquement, les points extrêmes des échelles P_2Q_2, P_4Q_4 n'auront pas à être associés respectivement à toute la partie utile des échelles P_1Q_1, P_3Q_3, en sorte que la longueur de la portion utile PQ de la charnière se trouvera réduite.

Manière d'effectuer la construction. — Quel que soit le procédé employé, on effectuera la construction de la même manière, une fois qu'on aura arrêté les valeurs des modules μ_1, μ_2, μ_3, μ_4.

On commencera par tracer la charnière, puis les supports, en observant, pour leurs écartements par rapport à cet axe, les relations (2) et (4) dans un cas, (6) dans l'autre.

Cela fait, on construira, tout à fait indépendamment les unes des autres, et seulement en vue de la meilleure disposition à obtenir trois des échelles, (z_1), (z_2) et (z_3) par exemple, réduites à leurs portions utiles P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3.

Pour fixer la position de la quatrième échelle sur son support, il suffit de fixer celle d'un de ses points. Or il sera toujours facile, par une particularisation convenable, d'obtenir un système de valeurs α_1^0, α_2^0 α_3^0 et α_4^0 des quatre variables satisfaisant à l'équation.

Dès lors, la droite, joignant les points cotés α_1^0 et α_2^0, coupera la charnière en un point, et la droite, unissant ce point au point coté α_3^0, coupera le support de la quatrième échelle au point où devra se trouver la cote α_4^0. Ce point suffira pour déterminer la position de cette dernière échelle.

93. *Exemples.* — Nous allons donner des exemples de l'un et de l'autre procédé.

1° *Poutres uniformément chargées.* — Si une poutre à section rectangulaire de largeur b^{cm} et de hauteur h^{cm} supporte une charge uniformément répartie q^{kg} par centimètre courant, sur une portée p^{cm}, on a, entre ces quantités, la relation

$$\frac{qp_2}{8} = k\frac{bh^2}{6},$$

k étant la limite de travail admise pour le bois par unité de surface (par exemple 75^{kg} par centimètre carré). D'ailleurs, la valeur commune des deux membres de cette égalité est le moment de flexion de la section la plus fatiguée.

Posant

$$\frac{4k}{3} = k_1,$$

nous pouvons écrire cette équation

$$\log q + 2\log p = \log b + 2\log h + \log k_1.$$

Prenant donc

$$f_1 \equiv \log q, \qquad f_2 \equiv 2\log p, \qquad f_3 \equiv \log b, \qquad f_4 \equiv 2\log h + \log k_1,$$

nous aurons, par application du premier procédé, le nomogramme à double alignement correspondant, en posant

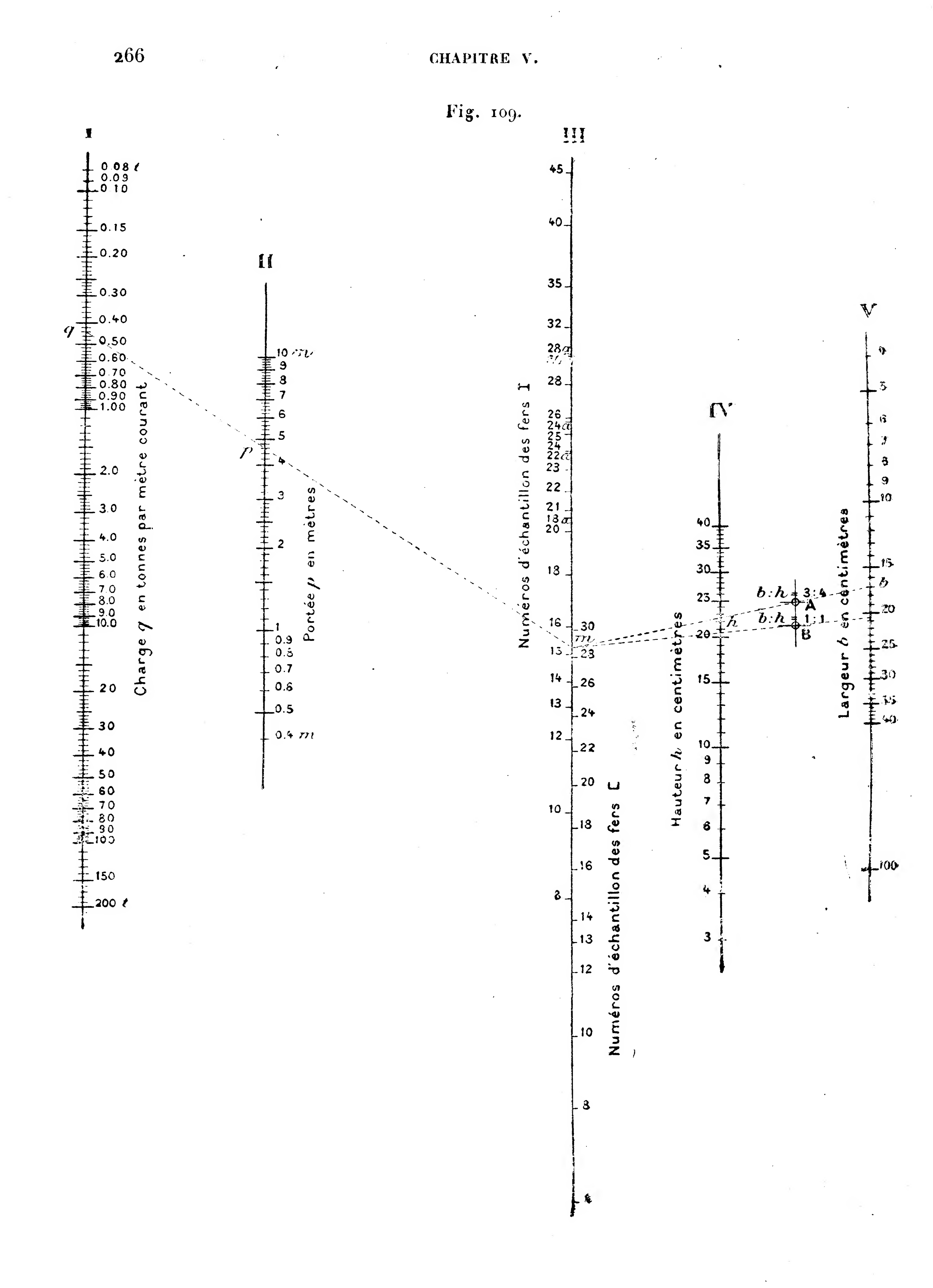
$$\begin{array}{ll} (q) & u_1 = \quad \mu_1 \log q, \\ (p) & u_2 = -\mu_2 \log p, \\ (b) & u_3 = \quad \mu_3 \log b, \\ (h) & u_4 = -\mu_4 (2\log h + \log k_1), \end{array}$$

avec

$$\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{\mu_4} - \frac{1}{\mu_3}.$$

La figure 109 donne la réduction aux $\frac{2}{3}$ environ du nomogramme construit d'après ce procédé par M. J. Mandl, lieutenant du Génie dans l'armée autri-

Fig. 109.


I
Charge q en tonnes par mètre courant
II
Portée p en mètres
III
Numéros d'échantillon des fers I
Numéros d'échantillon des fers ⊏
IV
Hauteur h en centimètres
b:h = 3:4
b:h = 1:1
A
B
V
Largeur b en centimètres

chienne (¹), avec les modules

$$\mu_1 = 7^{cm},5, \qquad \mu_2 = 4^{cm},72, \qquad \mu_3 = 12^{cm},7, \qquad \mu_4 = 6^{cm},35.$$

Les échelles graduées sont alors définies par

$$(q) \qquad u_1 = \quad 7^{cm},5 \times \log q,$$
$$(p) \qquad u_2 = -\ 9^{cm},44 \times \log p,$$
$$(b) \qquad u_3 = \quad 12^{cm},7 \times \log b,$$
$$(h) \qquad u_4 = -12^{cm},7 \times \log b - 6,35 \times \log k_1.$$

On peut d'ailleurs, pour la chiffraison des échelles (p) et (q), adopter comme unités le mètre et la tonne par mètre, comme cela a lieu sur la figure 109, ce qui revient à écrire l'équation représentée sous la forme

$$12500 qp^2 = k\frac{bh^2}{6}.$$

Si l'on se reporte à la manière d'effectuer la construction indiquée à la fin du n° 93, on verra qu'il est inutile de calculer le terme constant du second membre de cette dernière formule.

M. Mandl a complété ce nomogramme (²) par un dispositif ingénieux qui permet de déterminer b et h en vue de rendre la section de la poutre semblable à un rectangle donné. Posons

$$\frac{b}{h} = \lambda.$$

Nous avons alors

$$\log b - \log h = \log\lambda.$$

Or, si nous faisons un changement d'origine sur l'axe A_4u_4, et si nous remettons μ_3 à la place de $12^{cm},7$, nous pouvons écrire les formules définissant les échelles (b) et (h)

$$u_3 = \quad \mu_3 \log b,$$
$$u_4 = -\mu_3 \log h.$$

(¹) *Mittheilungen über Gegenstände der Artill.-u.-Genie-Wesens*, 1893. La disposition de la figure 109 suppose le sens positif pris du haut vers le bas.

(²) Sur la charnière, l'auteur, d'après la remarque faite plus haut, aurait pu inscrire les valeurs du moment de flexion. Il a préféré, avec juste raison, inscrire les numéros d'échantillons des fers du commerce, de type courant en son pays, qui donnent ce moment de flexion. La graduation de gauche se rapporte à des fers à double T, celle de droite à des fers à U. L'index tendu entre le point coté q et le point coté p venant rencontrer la charnière en un point, il suffit, sur chaque graduation, de prendre le numéro inscrit au-dessus de ce point pour savoir quel est le type de fer correspondant à adopter. Pour l'exemple numérique indiqué en pointillé ($p = 4^m,60$, $q = 0^t,44$), on a le choix entre le fer à double T n° 16 et le fer à U n° 30. Les fabricants de poutre en fer devraient joindre un nomogramme de ce genre à leur album d'échantillons pour tous les types de section.

Nous voyons donc que, pour les couples de valeurs satisfaisant à la relation ci-dessus, nous aurons

$$u_2 + u_4 = \mu_3 \log \lambda.$$

Cette équation définit un point (λ) situé sur la parallèle équidistante des axes $A_3 u_3$ et $A_4 u_4$. Donc, *pour que la section ait la similitude définie par une certaine valeur de* λ, *il suffira que l'index passe par le point* (λ) *correspondant.*

Ayant tracé la parallèle équidistante des supports des échelles (b) et (h), il n'y a qu'à joindre par une droite les points cotés b_0 et h_0, tels que

$$b_0 = \lambda h_0,$$

pour avoir sur cette parallèle le point (λ) correspondant. C'est ainsi, par exemple, que les droites joignant le point (h) coté 20 aux points (b) cotés 15 et 20 donnent les points A et B correspondant respectivement à $\lambda = \frac{3}{4}$ et $\lambda = 1$.

Les lignes pointillées de la figure 109 montrent les positions de l'index pour l'exemple numérique $p = 4^m,60$, $q = 0^t,44$.

Pour $\lambda = \frac{3}{4}$, on a $b = 17^{cm}$, $h = 23^{cm}$,
Pour $\lambda = 1$ » $b = h = 21^{cm}$.

2° *Écoulement des gaz par des tuyaux.* — M. F. Gaud a reconnu que l'écoulement des gaz dans les tuyaux obéissait à l'équation ([1])

$$h D^5 = 1655\, \Delta Q^2,$$

où

h représente la perte de charge kilométrique exprimée en millimètres d'eau;
D le diamètre du tuyau en centimètres;
Δ le poids du mètre cube de gaz en kilogrammes;
Q le débit horaire en mètres cubes.

Pratiquement, d'ailleurs,

h	reste compris entre	0,1	et	300,
D	»	0,5	et	25,
Δ	»	0,08	et	3,
Q	»	0,005	et	100.

Écrivons d'abord l'équation ci-dessus sous la forme

$$\log h + 5 \log D = \log \Delta + 2 \log Q + \log 1655.$$

D'après la remarque faite plus haut, il n'y a pas lieu, pour la construction des échelles, de tenir compte de la constante.

([1]) *Bull off. de la Soc. techn. de l'Acétylène*, 2e année, p. 136; 1898.

Nous poserons donc, suivant le second procédé,

$$(h)\qquad u_1 = \mu_1 \log h,$$
$$(\mathrm{D})\qquad u_2 = \mu_2\, 5 \log \mathrm{D},$$
$$(\Delta)\qquad u_3 = \mu_3 \log \Delta,$$
$$(\mathrm{Q})\qquad u_4 = \mu_4\, 2 \log \mathrm{Q}.$$

Nous avons d'ailleurs

$$\delta_1 = \log 300 - \log 0,1 = 3,47,$$
$$\delta_2 = 5(\log 25 - \log 0,5) = 8,49,$$
$$\delta_3 = \log 3 - \log 0,08 = 1,57,$$
$$\delta_4 = 2(\log 100 - \log 0,005) = 8,60.$$

Par suite,

$$\delta_1 + \delta_2 = 11,96,$$
$$\delta_3 + \delta_4 = 10,17.$$

Ces deux quantités étant peu différentes l'une de l'autre, les longueurs des échelles, supposées égales pour chaque couple, n'auront elles-mêmes, entre elles, qu'une petite différence.

L'égalité rigoureuse pour chaque couple exigerait que l'on eût, d'une part,

$$\mu_1 = \frac{11,96}{3,47}\mu, \qquad \mu_2 = \frac{11,96}{8,49}\mu,$$

de l'autre,

$$\mu_3 = \frac{10,17}{1,57}\mu, \qquad \mu_4 = \frac{10,17}{8,6}\mu.$$

Ces divers rapports sont voisins des suivants :

$$\mu_1 = \frac{7}{2}\mu, \qquad \mu_2 = \frac{7}{5}\mu,$$
$$\mu_3 = 6\mu, \qquad \mu_4 = \frac{6}{5}\mu,$$

qui satisfont, en outre, rigoureusement aux égalités nécessaires

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_4}.$$

Si on les adopte, on obtient les longueurs d'échelles voulues pour le degré d'approximation qu'exige la pratique en prenant

$$\mu = 20^{\mathrm{mm}},$$

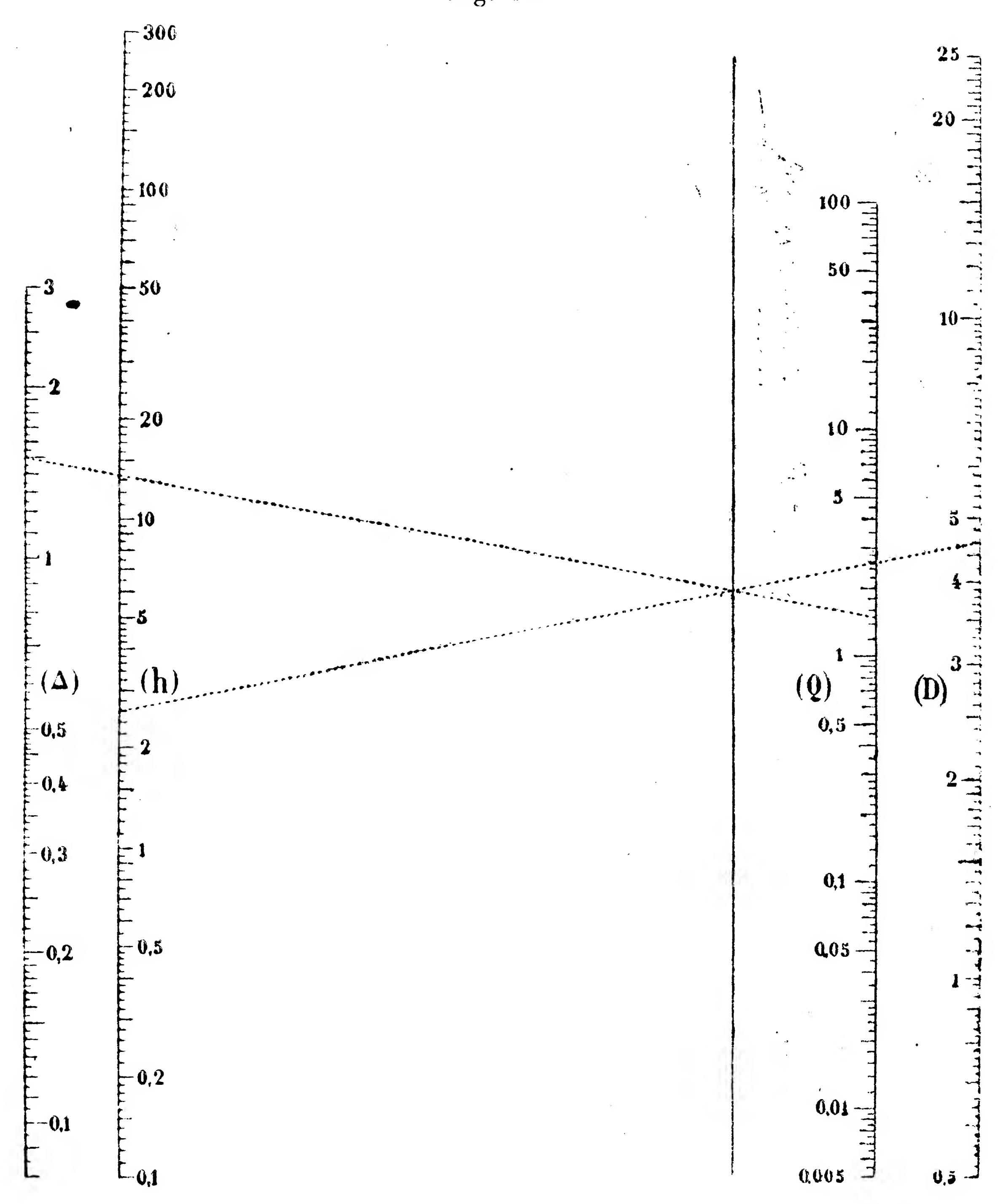
d'où

$$\mu_1 = 70^{\mathrm{mm}}, \qquad \mu_2 = 28^{\mathrm{mm}}, \qquad \mu_3 = 120^{\mathrm{mm}}, \qquad \mu_4 = 24^{\mathrm{mm}}.$$

Les échelles sont dès lors définies par

(h)	$u_1 = 70^{mm} \log h,$
(D)	$u_2 = 140^{mm} \log D,$
(Δ)	$u_3 = 120^{mm} \log \Delta,$
(Q)	$u_4 = 48^{mm} \log Q,$

Fig. 110.



et leurs longueurs sont données, au millimètre près, par

$$L_1 = 70^{mm}(\log 300 - \log 0,1) \quad = 238^{mm},$$
$$L_2 = 140^{mm}(\log \ 25 - \log 0,5) \quad = 238^{mm},$$
$$L_3 = 120^{mm}(\log \ \ 3 - \log 0,08) \ = 192^{mm},$$
$$L_4 = \ 48^{mm}(\log 100 - \log 0,005) = 206^{mm}.$$

On voit qu'elles diffèrent peu les unes des autres.

Les distances x_1, x_2, x_3, x_4 de ces échelles à l'axe des supports devront être telles que

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{5}{2}, \qquad \frac{x_3}{x_4} = 5.$$

Pour que l'index rencontre les axes sous des angles qui restent sensiblement compris entre 45° et 90°, il faut que les écartements des échelles (h) et (D) d'une part, (Δ) et (Q) de l'autre, diffèrent peu de la longueur des échelles. On atteint ce résultat en prenant

$$x_1 = 13^{cm}, \qquad x_2 = 5^{cm},2, \qquad x_3 = 15^{cm}, \qquad x_4 = 3^{cm}.$$

C'est avec ces données qu'a été construit le nomogramme dont la figure 110 est une réduction.

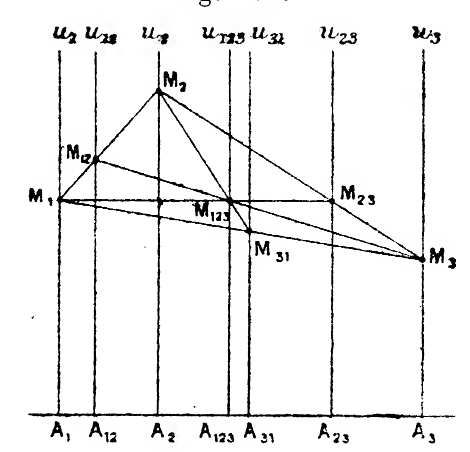
Les deux positions de l'index marquées en pointillé sur la figure montre que pour $h = 2,3$, $D = 4,6$, $\Delta = 1,5$, on a $Q = 1,25$.

94. *Composition des échelles parallèles.* — On peut rattacher aux types de nomogrammes qui viennent d'être étudiés ceux que l'on obtient par ce que l'on peut appeler la composition des échelles parallèles. Voici ce qu'il faut entendre par là :

Soient trois échelles à supports parallèles A_1u_1, A_2u_2, A_3u_3 (*fig.* 111), définies respectivement par les formules

$$(z_1) \qquad u_1 = \mu_1 f_1,$$
$$(z_2) \qquad u_2 = \mu_2 f_2,$$
$$(z_3) \qquad u_3 = \mu_3 f_3.$$

Fig. 111.



Traçons trois nouvelles échelles $A_{12}u_{12}$, $A_{23}u_{23}$, $A_{31}u_{31}$ parallèles aux premières, telles que

$$\frac{A_1A_{12}}{A_2A_{12}} = -\frac{\mu_1}{\mu_2}, \qquad \frac{A_2A_{23}}{A_3A_{23}} = -\frac{\mu_2}{\mu_3}, \qquad \frac{A_3A_{31}}{A_1A_{31}} = -\frac{\mu_3}{\mu_1},$$

et définies respectivement par les formules ([1])

$$(z_{12}) \qquad u_{12} = \mu_{12} f_{12},$$
$$(z_{23}) \qquad u_{23} = \mu_{23} f_{23},$$
$$(z_{31}) \qquad u_{31} = \mu_{31} f_{31},$$

les modules μ_{12}, μ_{23}, μ_{31} étant liés aux précédents par les formules

$$\frac{1}{\mu_{12}} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2},$$
$$\frac{1}{\mu_{23}} = \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3},$$
$$\frac{1}{\mu_{31}} = \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_1}.$$

D'après ce qui a été vu au n° 67, les cotes z_{12}, z_{23}, z_{31} des points obtenus sur ces échelles en prenant des alignements entre les points cotés z_1, z_2, z_3 sur les trois premiers axes, seront telles que les équations

$$f_1 + f_2 = f_{12},$$
$$f_2 + f_3 = f_{23},$$
$$f_3 + f_1 = f_{31}$$

seront satisfaites.

Mais, en outre, d'après ce qui a été vu au n° 58, les points M_{12}, M_{23} et M_{31} sont les barycentres des points M_1, M_2, M_3 pris deux à deux et respectivement affectés des coefficients $\frac{1}{\mu_1}$, $\frac{1}{\mu_2}$, $\frac{1}{\mu_3}$. Par suite, les droites $M_{12}M_3$, $M_{23}M_1$ et $M_{31}M_2$ passent par un même point M_{123} qui est le barycentre des trois premiers points. Ce point M_{123} se trouve donc sur une parallèle aux axes menée par le barycentre A_{123} des points A_1, A_2, A_3 respectivement affectés des coefficients $\frac{1}{\mu_1}$, $\frac{1}{\mu_2}$, $\frac{1}{\mu_3}$ et à une distance u_{123} du point A_{123} telle que

$$\frac{u_{123}}{\mu_{123}} = \frac{u_1}{\mu_1} + \frac{u_2}{\mu_2} + \frac{u_3}{\mu_3},$$

le module μ_{123} étant défini par

$$\frac{1}{\mu_{123}} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3}.$$

([1]) Les doubles indices ont ici une autre signification que dans notre notation générale, mais aucune confusion n'est possible, leur définition dans le cas présent étant parfaitement claire.

Si donc on porte sur l'axe $A_{123}u_{123}$ l'échelle (z_{123}) définie par la formule

$$(z_{123}) \qquad u_{123} = \mu_{123} f_{123},$$

on voit que les valeurs correspondantes de z_1, z_2, z_3 et z_{123} satisferont à l'équation

$$f_1 + f_2 + f_3 = f_{123},$$

et l'on peut remarquer que si l'on donne trois des sept variables z_1, z_2, z_3, z_{12}, z_{23}, z_{31}, z_{123}, il suffit de prendre quatre alignements pour obtenir les quatre autres.

Tel est le principe de la composition des échelles parallèles énoncé par le commandant du Génie (depuis lors colonel) Bertrand dans le Mémoire d'où est extraite l'application qui suit.

Il suffit d'écrire z_4 au lieu de z_{123} et de poser $f_{123} = -f_4$, pour que l'équation précédente prenne la forme

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0.$$

On retombe ainsi, à une variante près dans la notation, sur le type envisagé au n° 93. Une généralisation évidente montre qu'on pourra de même obtenir ainsi la représentation des équations de la forme

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = 0.$$

Il va sans dire que, dans le cas où l'on n'aurait pas besoin de considérer les équations obtenues par le groupement des échelles deux à deux, trois à trois, ..., il serait inutile de graduer les échelles résultantes correspondantes.

Exemple : Distributions d'eau. — Ce nomogramme est celui à propos duquel le commandant Bertrand [1] s'est trouvé amené à énoncer le principe ci-dessus. Il l'a établi en partant des formules de M. Flamant.

Soient :

l la longueur de la conduite,
d son diamètre,

---

(1) *Description et usage d'un abaque destiné à faciliter la solution des problèmes relatifs à la distribution des eaux* (*Revue du Génie militaire*, t. VIII, p. 475; 1894).

Le Mémoire a été tiré sous forme de brochure à part mise en vente à la librairie Berger-Levrault.

q son débit,
h la perte de charge,
i la pente de la ligne de charge,
p la puissance de la conduite,
r sa résistance,
u la vitesse,
e la variation de prix (1).

Entre les sept premières de ces quantités, on a les équations

$$\frac{7}{4}\log q - \log h = -\log r, \tag{1}$$

$$-\log h + \log l = -\log j, \tag{2}$$

$$\log l + \frac{7}{4}\log q = \log p, \tag{3}$$

$$\frac{7}{4}\log q - \log h + \log l = \frac{19}{4}\log d - C, \tag{4}$$

C étant une constante numérique.

Ces quatre équations permettent de calculer quatre des quantités qui y entrent en fonction des trois autres. On voit immédiatement qu'on peut appliquer à leur ensemble le principe de la composition des échelles en prenant

$$z_1 \equiv q, \qquad z_2 \equiv h, \qquad z_3 \equiv l,$$
$$z_{12} \equiv r, \qquad z_{23} \equiv j, \qquad z_{31} \equiv p,$$
$$z_{123} \equiv d,$$

puis

$$f_1 \equiv \frac{7}{4}\log q, \qquad f_2 \equiv \log h, \qquad f_3 \equiv \log l,$$
$$f_{12} \equiv -\log r, \qquad f_{23} \equiv -\log j, \qquad f_{31} \equiv \log p,$$
$$f_{123} \equiv \frac{19}{4}\log d - C.$$

Enfin l'auteur a choisi pour les modules les valeurs

$$\mu_1 = 5^{\text{cm}}, \qquad \mu_2 = \mu_3 = 6^{\text{cm}}.$$

Le nomogramme ainsi obtenu par le commandant Bertrand est celui que représente la figure 112, avec une réduction d'un peu moins de $\frac{1}{2}$.

Au diamètre d et à la résistance r sont respectivement liés la section s et le débouché δ par les formules

$$s = \frac{\pi d^2}{4}, \qquad \delta = r^{-\frac{4}{7}}.$$

(1) Pour la définition de ces termes divers, se reporter à la brochure du commandant Bertrand.

Fig. 112.

Débit (q)

Décalitres par seconde
Décalitres par minute
Litres par seconde
Hectolitres par minute
Décalitres par seconde
Mètres cubes par minute
Hectolitres par seconde
Dizaines de m³ par minute

Résistance (r)

Centièmes
Dixièmes
Unités
Dizaines
Centaines
Mille
Diz. de mille
Cent de mille
Millions

Débouché (δ)

Unités
Dixièmes
Centièmes
Millièmes
Dix millièmes

Perte de charge (h)

Centimètres
Décimètres
Mètres
Décamètres
Hectomètres

Diamètre (d)

Mètres
Décimètres
Centimètres

Section (s)

M²
Dizaines de dm²
Dm²
Dizaines de cm²
Cm²

Puissance (p)

Mille
Centaines
Dizaines
Unités
Dixièmes
Centièmes
Millièmes
Dix millièmes
Cent-millièmes

Variation du prix (e)

Millions
Cent-mille
Dix-mille
Mille
Centaines
Dizaines
Unités
Dixièmes
Centièmes

Pente (j)

Millionièmes
Cent-millièmes
Dix-millièmes
Millièmes
Centièmes
Dixièmes
Unités
Dizaines

Vitesse moyenne (u)

Décimètres par seconde
Mètres par seconde

Hauteur due à u $\frac{u^2}{2g}$

$\frac{1}{10}$ millimètres
Millimètres
Centimètres
Décimètres
Mètres

Longueur (l)

Myriamètres
Kilomètres
Hectomètres
Décamètres
Mètres

Fig. 112.

Débit (*q*)

Résistance (*r*)

Débouché (*δ*)

Perte de charge (*h*)

Diamètre (*d*)

Section (*s*)

Puissance (*p*)

Variation du prix (*e*)

Pente (*j*)

Vitesse moyenne (*u*)

Hauteur due à *u* $\frac{u^2}{2g}$

Longueur (*l*)

Hectolitres par seconde — Dizaines de m³ par minute.
Décalitres par seconde. — Mètres cubes par minute
Litres par seconde — Hectolitres par minute.
Décilitres par seconde — Décalitres par minute.

Centièmes — Dixièmes — Unités — Dizaines — Centaines — Mille — Diz. de mille — Cent de mille — Millions

Unités — Dixièmes — Centièmes — Millièmes — Dix-millièmes

Centimètres — Décimètres — Mètres — Décamètres — Hectomètres

Mètres — Décimètres — Centimètres

M² — Dizaines de dm² — Dm² — Dizaines de cm² — Cm²

Mille — Centaines — Dizaines — Unités — Dixièmes — Centièmes — Millièmes — Dix-millièmes — Cent-millièmes

Millions — Cent-mille — Dix-mille — Mille — Centaines — Dizaines — Unités — Dixièmes — Centièmes

Millioniémes — Cent-millièmes — Dix-millièmes — Millièmes — Centièmes — Dixièmes — Unités — Dizaines

Décimètres par seconde — Mètres par seconde

$\frac{1}{10}$ millimètres — Millimètres — Centimètres — Décimètres — Mètres

Myriamètres — Kilomètres — Hectomètres — Décamètres — Mètres

Il suffira donc, pour avoir ces nouvelles quantités, d'accoler aux échelles (d) et (r) déjà construites des échelles (s) et (δ) établies ainsi qu'il a été dit au n° 11. Ces échelles se trouvent sur la figure 112. On voit, en outre, que l'échelle du débit a reçu une double graduation suivant que l'unité admise est le litre par seconde ou par minute.

Il convient de remarquer, en ce qui concerne l'inscription des graduations, l'innovation introduite par l'auteur et qui consiste à donner en toutes lettres l'indication de chaque ordre décimal, ce qui fait qu'il suffit d'inscrire un seul chiffre en face de chaque point.

95. *Échelles rectilignes non parallèles.* — Les équations qui viennent d'être représentées, à titre d'exemples, au numéro précédent, sont de la forme

$$f_1 f_2 = f_3 f_4.$$

Il a suffi de prendre les logarithmes des deux membres pour leur donner la forme voulue, mais elles peuvent, sans subir cette transformation, être représentées par double alignement. Si, en effet, on appelle ζ la valeur commune des deux membres de cette équation, on peut représenter les équations

$$f_1 f_2 = \zeta,$$
$$f_3 f_4 = \zeta,$$

en posant, d'une part,

$$u = \mu\zeta,$$
$$u_1 = \mu_1 f_1,$$

de l'autre,

$$u = \mu\zeta,$$
$$u_3 = \mu_3 f_3,$$

et faisant coïncider les échelles (ζ).

Exemple : Nivellement barométrique [1]. — La différence de niveau Z,

---

[1] Cet exemple est emprunté à l'excellent Ouvrage de M. Prévot : *La Topographie appliquée aux Travaux publics* (Ouvrage faisant partie de la *Bibliothèque du Conducteur des Travaux publics;* Dunod, éditeur, 1898). Le nomogramme ici reproduit figure sur la planche jointe au Tome I.

M. Prévot a également construit, pour la détermination du poids des cordes filées employées dans les instruments de musique, un remarquable nomogramme à double alignement rentrant dans le type du n° 96, et s'appliquant à une équation assez compliquée. M. Gustave Lyon, directeur de la maison Pleyel-Wolff, qui a fait constamment usage de ce nomogramme au cours des études qui l'ont conduit à l'invention de la harpe chromatique, a, dans une conférence faite le 24 février 1897, devant le Groupe parisien des Polytechniciens, déclaré qu'à son estime, ce nomogramme lui a

en mètres, entre deux stations voisines, est donnée approximativement par la formule

$$Z = 16\,000\left[1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right]\frac{h-h'}{h+h'},$$

où h et t désignent la hauteur barométrique exprimée en millimètres et la température en degrés centigrades à la station supérieure, h' et t' les mêmes quantités à la station inférieure.

Posant

$$\frac{t+t'}{2} = \theta, \qquad h - h' = \varepsilon, \qquad \frac{h+h'}{2} =$$

on peut écrire cette formule

$$\frac{Z}{\varepsilon} = \frac{8000 + 32\theta}{m}.$$

Appelant ζ la valeur commune des deux membres de cette équation, quantité qui représente la différence de niveau correspondant à une différence de pression de 1^{mm}, nous poserons, comme il vient d'être dit,

(ζ) $$u = \mu\zeta,$$

(Z) $$u_1 = \mu_1 Z,$$

(θ) $$u_3 = \mu_3(8000 + 32\theta).$$

Les échelles (ε) et (m) seront alors définies respectivement par

$$\mu_1 \varepsilon u - \mu u_1 = 0,$$

ou, en désignant par δ_1 la demi-distance des origines A et A_1,

(ε) $$x = \delta_1 \frac{\mu + \mu_1\varepsilon}{\mu - \mu_1\varepsilon}$$

et

$$\mu_3 m u - \mu u_3 = 0,$$

ou, en désignant par δ_3 la demi-distance des origines A et A_3,

(m) $$x = \delta_3 \frac{\mu + \mu_3 m}{\mu - \mu_3 m}.$$

La figure 113 reproduit le nomogramme ainsi construit par M. Prévot : 1° avec les modules $\mu = 10^{\text{mm}}$, $\mu_1 = 0^{\text{mm}},1$, $\mu_3 = \frac{1^{\text{mm}}}{120}$; 2° avec les mêmes modules μ et μ_3 et le module $\mu_1 = 0^{\text{mm}},5$.

---

fait gagner environ les onze douzièmes du temps qu'il eût dû, s'il en avait été privé consacrer au calcul numérique.

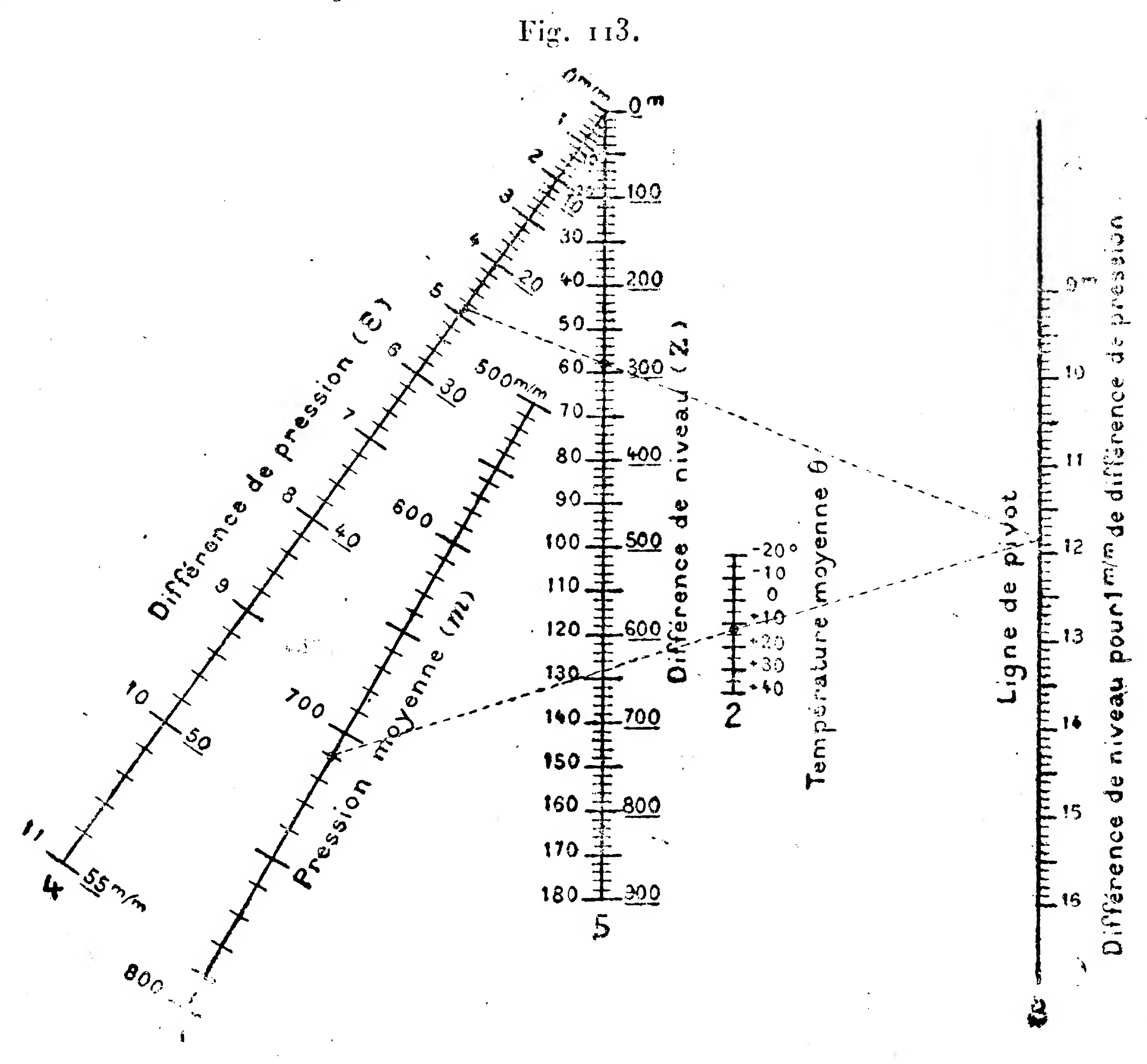
A ce type de nomogramme se rattache aussi celui construit par M. G. Pesci pour le jaugeage des tonneaux (*G. C.*; t. XXXV; 1899, p. 41).

On trouvera plus loin un autre exemple (n° 114).

Les deux nomogrammes ainsi obtenus ne diffèrent que par leurs graduations (Z) et (ε). Les deux graduations distinctes relatives à un même axe sont placées de part et d'autre de cet axe, ce qui, en l'espèce, est d'autant plus commode que les points de division sont les mêmes d'une graduation à l'autre, et que seules les chiffraisons diffèrent, l'une étant quintuple de l'autre.

Pour qu'il n'y ait aucune hésitation dans la façon de lire ces graduations, celles qui doivent être associées dans la seconde position de l'index ont été munies de chiffres soulignés [1].

Fig. 113.



Les deux positions de l'index, tracées en pointillé sur la figure, se rapportent à l'exemple numérique pour lequel on a

$$h = 722^{mm},6, \qquad h' = 698^{mm},3, \qquad t = 15^{\circ},2, \qquad t' = 12^{\circ},$$

d'où

$$\varepsilon = 24^{mm},3, \qquad m = 710^{mm},4, \qquad \theta = 13^{\circ},6.$$

Le nomogramme, pris avec ses graduations soulignées, donne

$$Z = 258^{m}.$$

([1]) Nous répétons qu'en pratique il est bon d'effectuer les distinctions de ce genre au moyen de couleurs différentes.

On aurait pu, pour la disposition des échelles de chacun des deux nomogrammes juxtaposés, appliquer ici ce qui a été dit au n° 72.

96. *Échelles curvilignes.* — Parmi les équations rentrant dans le type général (1) du n° **92**, celles qui se rencontrent le plus souvent sont de la forme

$$(E) \qquad f_1 g_2 + f_2 = f_3 g_4 + f_4.$$

Désignant par ζ la valeur commune des deux membres de cette équation, on aura à représenter simultanément les équations

$$(E') \qquad f_1 g_2 + f_2 = \zeta,$$

$$(E'') \qquad f_3 g_4 + f_4 = \zeta.$$

Pour la première, on pose

$$(z) \qquad u = \mu\zeta,$$

$$(z_1) \qquad v = -\mu_1 f_1,$$

ce qui donne pour les points (z_2)

$$\mu_1 u + \mu g_2 v = \mu\mu_1 f_2$$

ou

$$(z_2) \qquad x = \delta \frac{\mu g_2 - \mu_1}{\mu g_2 + \mu_1}, \qquad y = \frac{\mu\mu_1 f_2}{\mu g_2 + \mu_1}.$$

Pour la seconde,

$$(\zeta) \qquad u = \mu\zeta,$$

$$(z_3) \qquad v = -\mu_3 f_3,$$

ce qui donne pour les points (z_4)

$$\mu_3 u + \mu g_4 v = \mu\mu_3 f_4$$

ou

$$(z_4) \qquad x = \delta \frac{\mu g_4 - \mu_3}{\mu g_4 + \mu_3}, \qquad y = \frac{\mu\mu_3 f_4}{\mu g_4 + \mu_3}.$$

Il est, bien entendu, nécessaire de faire coïncider les échelles (ζ) des deux nomogrammes partiels, dont la graduation n'aura d'ailleurs pas à être marquée, et dont le support constituera la charnière.

Quant aux échelles (z_1) et (z_3), on pourra leur donner le même support en prenant le même axe des v dans les deux cas. Les graduations correspondantes n'auront alors qu'à être portées de part et d'autre de cet axe.

Exemple : Vitesse d'écoulement de l'eau dans les canaux découverts (1). — La formule donnée par M. Bazin est la suivante :

$$U = \frac{87\sqrt{RI}}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}},$$

où U désigne la vitesse moyenne en mètres, R le rayon moyen en mètres, I la pente, γ un coefficient numérique qui dépend de la nature de la paroi.

Elle peut s'écrire

$$\frac{\gamma}{R} + \frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{87\sqrt{I}}{U}.$$

Sous cette forme, on voit qu'elle rentre dans le type (E) ci-dessus lorsqu'on prend

$$z_1 \equiv \gamma, \qquad z_2 \equiv R, \qquad z_2 \equiv I, \qquad z_4 \equiv U$$

et

$$f_1 \equiv \gamma, \qquad g_2 \equiv \frac{1}{R}, \qquad f_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{R}},$$

$$f_3 \equiv 87\sqrt{I}, \qquad g_4 \equiv \frac{1}{U}, \qquad f_4 \equiv 0.$$

Il en résulte que les quatre échelles seront définies, en vertu de ce qui vient d'être vu, par les formules suivantes :

(γ). $$v = -\mu_1\gamma,$$

(R) $$x = \delta\frac{\mu - \mu_1 R}{\mu + \mu_1 R}, \qquad y = \frac{\mu\mu_1\sqrt{R}}{\mu + \mu_1 R},$$

I) $$v = -\mu_3\, 87\sqrt{I},$$

(U) $$x = \delta\frac{\mu - \mu_3 U}{\mu + \mu_3 U}, \qquad y = 0.$$

Les échelles (γ), (I) et (U) sont rectilignes. L'échelle (R) a pour support la courbe dont l'équation, obtenue par élimination de R entre les formules (R), est

(1) $$x^2 + \frac{4\delta^2}{\mu\mu_1}y^2 = \delta^2.$$

La construction de cette ellipse est bien simple. Considérons (*fig.* 114) le cercle qui, rapporté à Ox et à la perpendiculaire Oy' élevée en O à cet axe, a pour équation

$$x^2 + y'^2 = \delta^2.$$

C'est le cercle décrit sur AB comme diamètre. Pour une même abscisse x,

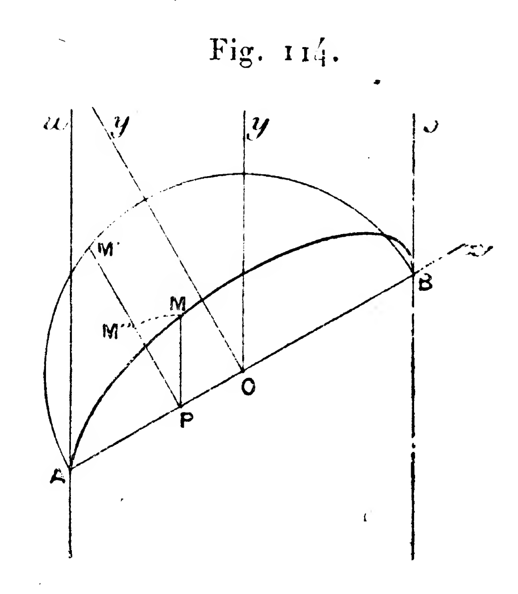
(1) O.30.

on a, entre l'ordonnée y' du cercle et l'ordonnée y de l'ellipse, la relation

$$(2) \qquad y = y' \frac{\sqrt{\mu\mu_1}}{2\delta}.$$

Donc, réduisant l'ordonnée PM′ du cercle dans le rapport $\frac{\sqrt{\mu\mu_1}}{2\delta}$, ce qui donne PM″, on n'a qu'à faire tourner celle-ci en PM de façon à la rendre parallèle à Oy pour avoir le point correspondant M de l'ellipse.

Fig. 114.



Il ne s'agit, en somme, là que d'une simple transformation affine, la construction du point M courant reposant sur la remarque que toutes les droites MM′ sont parallèles entre elles.

Les expressions (R) et (U) de x montrent en outre que les cotes R et U des points M et P sont liées par la relation

$$(3) \qquad \mu_1 R = \mu_3 U.$$

Le nomogramme, dont la figure 115 est une réduction, a été construit avec les modules

$$\mu = 8^{mm}, \qquad \mu_1 = 32^{mm}, \qquad \mu_3 = 8^{mm},$$

la demi-distance des origines A et B étant

$$\delta = 40^{mm}.$$

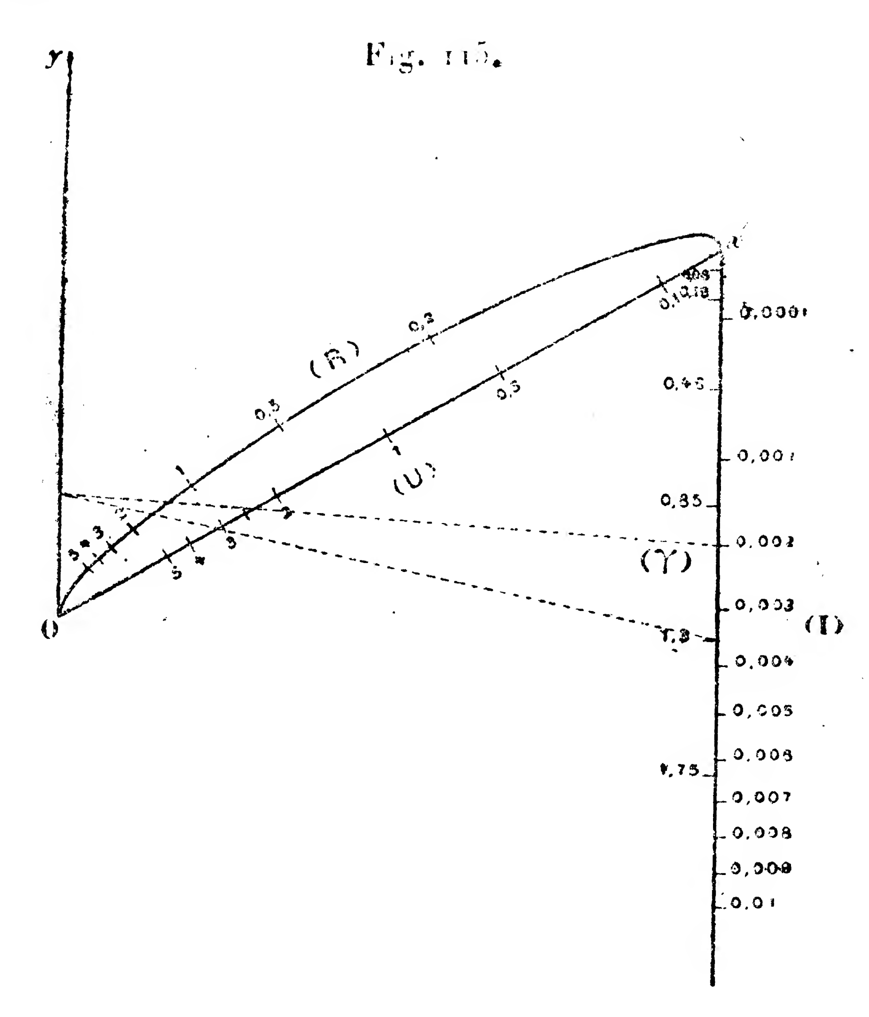
En outre, l'échelle (U) étant d'abord supposée s'étendre de A (cote ∞) à B (cote 0), on a, conformément à la remarque qui termine le n° **72**, pris l'axe AB des origines incliné à 60° sur la direction des axes Au et Bv.

L'échelle (γ) est alors donnée par

$$v = -\gamma . 32^{mm}.$$

C'est une échelle métrique facile à construire [1]. Elle a été portée sur le côté gauche de l'axe Bv.

Fig. 115.



L'échelle (I), portée sur le côté droit, de $I = 0{,}0001$ à $I = 0{,}01$, est définie par

$$v = -\sqrt{I}.696^{mm}.$$

L'échelle (U), portée par l'axe AB des origines, est définie par

$$x = \frac{1-U}{1+U}40^{mm}.$$

C'est une échelle homographique bien facile à construire par projection d'une échelle métrique (n° 7), puisqu'on en connaît immédiatement trois points qui sont le point A coté ∞, le point B coté 0 et le milieu de AB coté 1. Il suffit d'ailleurs de prendre les valeurs de v entre 0, 1 et 5.

Pour ce qui est de l'échelle (R), on commencera par tracer l'ellipse qui lui

(1) Les seules valeurs de γ à considérer sont, d'après M. Bazin :

0,06. — Parois très unies (ciment, bois raboté, etc.).
0,16. — Parois unies (planches, briques, pierre de taille, etc.).
0,46. — Parois en maçonnerie de moellons.
0,85. — Parois de nature mixte (terres très régulières, perrés, etc.).
1,30. — Parois en terre dans des conditions ordinaires.
1,75. — Parois en terre d'une résistance exceptionnelle (galets, herbes, etc.).

sert de support en remarquant qu'ici le rapport de réduction qui entre dans les formules (2) est

$$\frac{\sqrt{8 \times 32}}{2 \times 40} = \frac{1}{5}.$$

Une fois ce support construit, on a immédiatement l'échelle (R) en remarquant que, d'après la formule (3), qui donne ici

$$4\,R = U,$$

on a la projection de l'échelle (R) sur AB, faite parallèlement à Au et Bv, en divisant par 4 les cotes de l'échelle (U).

Il suffit de prendre les valeurs de R entre 0,2 et 5.

C'est ici l'axe Au qui sert de charnière. Pour savoir quelle est sa longueur utile, il suffit d'associer la plus grande valeur de $\gamma (\gamma = 1{,}75)$ à la plus petite de $R (R = 0{,}2)$. On trouve ainsi un peu moins de $8^{cm},8$.

Les positions de l'index tracées en pointillé sur la figure 115 correspondent à l'exemple numérique $\gamma = 1{,}3$, $R = 1{,}6$, $I = 002$, pour lequel le nomogramme donne $U = 2^m,4$.

97. *Représentation des équations à quatre variables d'ordre nomographique 4, par double alignement.* — Si les quatre échelles d'un nomogramme à double alignement sont rectilignes, les trois fonctions f_i, g_i, h_i correspondant à chaque variable z_i sont linéairement dépendantes, c'est-à-dire peuvent s'exprimer linéairement au moyen d'une seule f_i. Si, après avoir fait cette substitution dans l'équation (1) du n° 92, on la développe, on voit que l'on obtient une équation de la forme

$$(1) \qquad A f_1 f_2 f_3 f_4 + \Sigma B_{ijk} f_i f_j f_k + \Sigma C_{ij} f_i f_j + \Sigma D_i f_i + E = 0,$$

qui est d'ordre nomographique 1 par rapport à chacune des quatre variables, donc de l'ordre nomographique total 4 (¹).

On peut se proposer inversement, étant donnée une équation du type (1), de rechercher à quelle condition elle est représentable par un nomogramme de l'espèce considérée. Ce problème fait le pendant de celui que nous avons résolu pour l'équation d'ordre nomographique 3 (nᵒˢ 74 et 75). Il a été abordé pour la première fois par M. Soreau (²), qui a remarqué, pour commencer, que l'équation (1) peut toujours être mise sous la forme (³) (privée des termes

---

(¹) Voir encore à ce sujet le n° 7 de la Note III des Annexes, où sont résumés les travaux de M. F. Boulad qui s'y rapportent.

(²) *Contribution...*, n° 112.

(³) Il suffit, pour cela, si A n'est pas nul, de poser $f_i = g_i - \frac{B_i}{A}$. Si A est nul, on est ramené au cas où il ne l'est pas en remplaçant une ou plusieurs fonctions f_i par leur inverse.

contenant les triples produits)

$$(1') \qquad g_1 g_2 g_3 g_4 + \Sigma \gamma_{ij} g_i g_j + \Sigma \delta_i g_i + \varepsilon = 0,$$

et qui a ensuite démontré que, pour pouvoir grouper les variables de cette équation dans une équation de la forme

$$F_{12} = F_{34}.$$

il faut que

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\gamma_{13}}{\gamma_{23}} = \frac{\gamma_{14}}{\gamma_{24}}$$

et

$$\frac{\delta_3}{\delta_4} = \frac{\gamma_{13}}{\gamma_{14}} = \frac{\gamma_{23}}{\gamma_{24}}.$$

M. Clark a remarqué à son tour que ces conditions, dites de groupement, se réduisaient à trois, savoir

$$\frac{\delta_1 \delta_3}{\gamma_{13}} = \frac{\delta_1 \delta_4}{\gamma_{14}} = \frac{\delta_2 \delta_3}{\gamma_{23}} = \frac{\delta_2 \delta_4}{\gamma_{24}};$$

et, en représentant la valeur commune de ces rapports par ρ, il a trouvé, en outre, que

$$\rho = \varepsilon - \gamma_{12} \gamma_{34},$$

faisant observer que les conditions ainsi complétées sont non seulement nécessaires, mais suffisantes, car il est facile de voir que l'équation (1') prend alors la forme

$$\rho(g_1 g_2 + \gamma_{34})(g_3 g_4 + \gamma_{12}) + (\delta_1 g_1 + \delta_2 g_2 + \rho)(\delta_3 g_3 + \delta_4 g_4 + \rho) = 0$$

ou

$$(2) \qquad \frac{g_1 g_2 + \gamma_{34}}{\delta_1 g_1 + \delta_2 g_2 + \rho} = -\frac{\delta_3 g_3 + \delta_4 g_4 + \rho}{\rho(g_3 g_4 + \gamma_{12})}.$$

L'équation étant ainsi écrite, il suffit de représenter par g la valeur commune de ses deux membres et de représenter simultanément les deux équations

$$(3) \qquad \delta_1 g_1 g + \delta_2 g_2 g - g_1 g_2 + \rho g - \gamma_{34} = 0,$$

$$(4) \qquad \rho g g_3 g_4 + \delta_3 g_3 + \delta_4 g_4 + \gamma\rho_{12} g + \rho = 0,$$

en leur donnant une échelle (g) commune qui constituera la charnière, ce qui est toujours licite quand la représentation est possible, puisque dans chacun des nomogrammes partiels, on peut toujours disposer arbitrairement d'une des trois échelles.

Or les discriminants des équations (3) et (4), qui sont toutes deux d'ordre

nomographique 3, sont respectivement

$$\Delta = \rho^2 + 4\delta_1\delta_2\gamma_{34},$$
$$\Delta' = (\rho^2 + 4\delta_3\delta_4\gamma_{12})\rho^2.$$

Nous pouvons représenter chacune des équations (3) et (4) par un nomogramme conique (n° **83**), ayant une échelle rectiligne (g) choisie arbitrairement. Prenant cette échelle (g) la même pour les deux nomogrammes partiels, nous obtenons ainsi, *dans tous les cas, quand les conditions de groupement*

$$(5) \qquad \frac{\delta_1\delta_3}{\gamma_{13}} = \frac{\delta_1\delta_4}{\gamma_{14}} = \frac{\delta_2\delta_3}{\gamma_{23}} = \frac{\delta_2\delta_4}{\gamma_{24}} = \varepsilon - \gamma_{12}\gamma_{34}$$

sont satisfaites, la représentation de l'équation (1') *par un nomogramme à double alignement, à charnière rectiligne* **D** (*support de l'échelle fictive de* g), *sur lequel les échelles* (z_1) *et* (z_2) *ont pour support commun une conique* **C**, *les échelles* (z_3) *et* (z_4) *une autre conique* **C'** (*fig.* 116).

Fig. 116.

Si Δ et Δ' sont de signes contraires, le support rectiligne **D** coupe l'une des coniques en des points réels, l'autre en des points imaginaires; la superposition de ces coniques est donc alors impossible.

Dans le cas où $\Delta\Delta' > 0$, ces conditions de superposition, venant compléter celles de groupement, ont été trouvées par M. Soreau [1] sous la forme

$$(6) \qquad \frac{\delta_1\delta_2}{\gamma_{12}} = \frac{\delta_3\delta_4}{\gamma_{34}} = \rho.$$

Une vérification s'offre ici à nous.

Si, en effet, nous envisageons séparément les nomogrammes partiels (z_1, z_2, g) et (z_3, z_4, g) constitués chacun par une échelle rectiligne (g)

(1) *Nouveaux types...*, p. 25. Depuis lors, en ayant recours à la notion de valeur critique (n° 74), il a grandement simplifié la démonstration assez laborieuse qu'il avait d'abord donnée de ces formules.

portée par la droite **D** et deux échelles portées par la même conique **C**, les cotes affectées sur l'échelle (g) aux points I et J de rencontre de **D** et de **C** sont les valeurs critiques correspondantes (n° 83) données, d'après l'équation (6_i) du n° 75, respectivement par

$$\delta_1\delta_2\varphi^2 + \rho\varphi - \gamma_{34} = 0$$

et

$$\rho^2\delta_{12}\varphi^2 + \rho^2\varphi - \delta_3\delta_4 = 0.$$

L'identité des deux échelles (g) exige donc que l'on ait

$$\frac{\delta_1\delta_2}{\rho^2\gamma_{12}} = \frac{1}{\rho} = \frac{\gamma_{34}}{\delta_3\delta_4},$$

ce qui est, sous une autre forme, la double relation (6) ci-dessus.

Pour réaliser la superposition, M. Soreau amène, par des changements de fonctions, l'équation (2) à la forme symétrique

$$\frac{h_1 h_2 + p}{h_1 + h_2 + \rho} = \frac{h_3 h_4 + p}{h_3 + h_4 + \rho},$$

évidemment représentable par un nomogramme à support conique unique **C**.

On peut toujours, par une transformation homographique, rejeter la droite **D** à l'infini en faisant coïncider ses points I et J avec les ombilics du plan.

Dans ces conditions, la conique **C** devient un cercle et les alignements (z_1, z_2) et (z_3, z_4) parallèles. On tombe ainsi sur le type du nomogramme circulaire à alignements parallèles dont il sera question plus loin (n° 122).

98. *Nomogrammes coniques à double alignement pour équations à quatre variables, d'ordre nomographique supérieur à 4.* — Quand on aura à représenter une équation à quatre variables d'ordre nomographique supérieur à 4 [1], on s'efforcera de la dissocier en deux équations des types (E) et (E') du n° 91. On y parviendra le plus souvent, dans la pratique, en la ramenant au type canonique (1) du n° 92 qui est de l'ordre nomographique 6.

Il pourra se faire cependant que, l'ayant mise sous la forme

$$F_{12} = F_{34},$$

on reconnaisse que les équations

$$F_{12} = \zeta \qquad \text{et} \qquad F_{34} = \zeta,$$

sans être toutes deux représentables par des nomogrammes de genre 1, le soient par des nomogrammes coniques, c'est-à-dire que, n'étant pas réduc-

---

[1] Voir, au n° 8 de la Note IV des Annexes, les résultats obtenus par M. F. Boulad à ce sujet.

tibles simultanément à la forme canonique (E) du n° 78, elles le soient à la forme canonique (4) du n° 83, que nous écrirons (pour mettre en évidence la façon dont ζ doit y entrer)

$$\zeta f_1 f_2 + (\zeta + f_1) g_2 + h_2 = 0,$$
$$\zeta f_3 f_4 + (\zeta + f_3) g_4 + h_4 = 0.$$

En construisant alors les nomogrammes de ces deux équations avec la même échelle conique (ζ) sur le support **C** de laquelle se trouveront aussi les échelles (z_1) et (z_2), les échelles (z_3) et (z_4) étant quelconques, on aura un nomogramme à double alignement, sur lequel la charnière sera la conique **C**.

On voit que la forme canonique de l'équation correspondante est

$$\frac{f_1 g_2 - h_2}{f_1 f_2 + g_2} = \frac{f_3 g_4 + h_4}{f_3 f_4 + g_4}.$$

Exemple : Vitesse d'écoulement dans un canal à section trapézoïdale. — Soit l'équation

$$(1) \qquad \frac{bd + d^2}{b + \sqrt{8}\,d} = \frac{V^{\frac{3}{2}}}{30^{\frac{3}{2}} s^{\frac{3}{4}}},$$

qui fait connaître la vitesse d'écoulement V (en mètres par seconde) dans un canal à section trapézoïdale avec talus à 1/1 en fonction de la largeur au plafond b (en mètres) de la hauteur d du plan d'eau (en mètres) et de la pente longitudinale s.

Elle rentre évidemment dans le type voulu.

Le nomogramme correspondant a été construit par M. Wolff [1] avec un cercle comme support conique commun à (b), à (s) et à (ζ) (charnière). Ce nomogramme est représenté par la figure 117.

Voici comment sa théorie peut être résumée :

λ étant une constante numérique dont nous disposerons par la suite, représentons par $\frac{\zeta}{\lambda}$ la valeur commune des deux membres de l'équation (1). Si nous multiplions les deux membres haut et bas, respectivement par λ et μ, nous dissocions l'équation (1) en

$$(2) \qquad \zeta\left(-\frac{\lambda b}{\sqrt{8}}\right) - \lambda d\left(-\frac{\lambda b}{\sqrt{8}} + \zeta\right) + \frac{\lambda^2 d^2}{\sqrt{8}} = 0$$

et

$$(3) \qquad \zeta\left(-\mu s^{\frac{3}{4}}\right) + \lambda\mu W = 0,$$

en posant, pour simplifier l'écriture

$$(4) \qquad W = \left(\frac{V}{40}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

---

[1] Voir le premier renvoi du n° 83 (p. 229).

Si l'on se reporte aux notations du n° 83, on voit que chacune de ces équations peut être identifiée à la forme canonique (4) de ce numéro, moyennant que l'on prenne

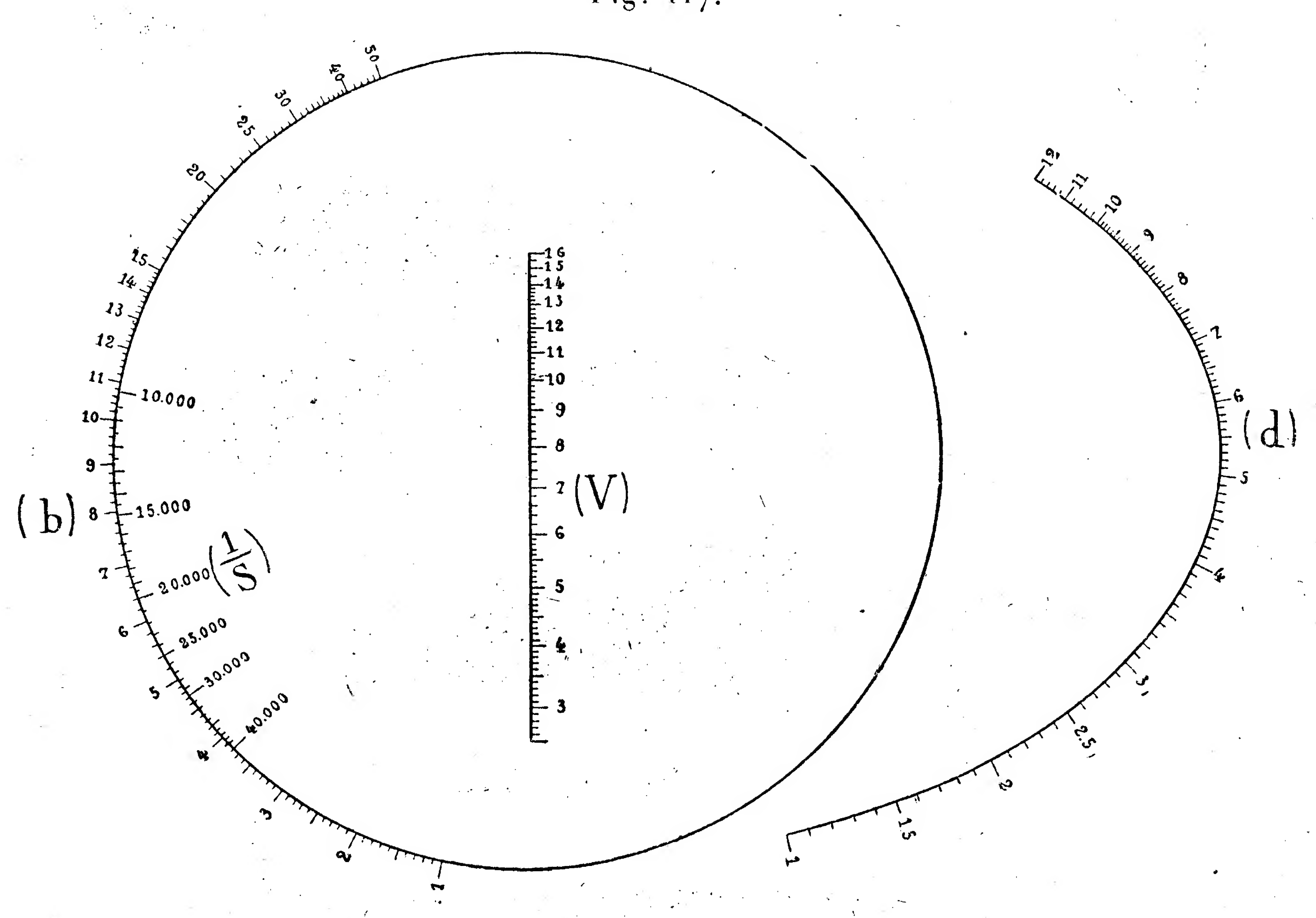
$$g_1 \equiv \zeta, \qquad g_2 \equiv -\frac{\lambda b}{\sqrt{8}}, \qquad g_3 \equiv 1, \qquad h_3 \equiv -\lambda d, \qquad l_3 \equiv \frac{\lambda^2 d^2}{\sqrt{8}}$$

pour l'une, et

$$g_1 \equiv \zeta, \qquad g_2 \equiv -\mu s^{\frac{3}{4}}, \qquad g_3 \equiv 1, \qquad h_3 \equiv 0, \qquad l_3 \equiv W$$

pour l'autre.

Fig. 117.



Donc, par identification avec la forme (1) du n° 84, on voit que le premier nomogramme partiel comprend les échelles définies respectivement, en coordonnées cartésiennes, par les couples de formules

$$(\zeta) \qquad x = \frac{1}{1+\zeta^2}, \qquad y = \frac{\zeta}{1+\zeta^2},$$

$$(b) \qquad x = \frac{1}{1+\dfrac{\lambda^2 b^2}{8}}, \qquad y = \frac{-\dfrac{\lambda b}{\sqrt{8}}}{1+\dfrac{\lambda^2 b^2}{8}},$$

$$(d) \qquad x = \frac{1}{1+\dfrac{\lambda^2 d^2}{\sqrt{8}}}, \qquad y = \frac{\lambda d}{1+\dfrac{\lambda^2 d^2}{\sqrt{8}}},$$

les deux premières échelles étant marquées sur le cercle

$$x^2+y^2-x=0,$$

et l'échelle (d) sur l'ellipse

$$x^2+\frac{y^2}{\sqrt{8}}-x=0,$$

qui se déduit du cercle précédent par dilatation de ses ordonnées dans le rapport $\sqrt[4]{8}=1,68$ (¹).

De même, les échelles du second nomogramme partiel sont définies par les couples de formule

(ζ) $$x=\frac{1}{1+\zeta^2}, \qquad y=\frac{\zeta}{1+\zeta^2},$$

(s) $$x=\frac{1}{1+\mu^2 s^{\frac{3}{2}}}, \qquad y=\frac{-\mu s^{\frac{3}{4}}}{1+\mu^2 s^{\frac{3}{2}}},$$

(W) $$x=\frac{1}{1+\lambda\mu W}, \qquad y=0.$$

L'identité des deux échelles (ζ) montre que leur support commun (le cercle ci-dessus) sert ici de charnière et n'a, par suite, pas besoin de porter de graduation (ζ).

Quant aux échelles (b) et (s), également portées par ce cercle, on voit que leurs cotes en un même point sont liées par la relation

$$\frac{\lambda b}{\sqrt{8}}=\mu s^{\frac{3}{4}}.$$

Le nomogramme que reproduit la figure 117, construit par M. Wolff, correspond au cas où $\lambda=\frac{1}{\sqrt{10}}$ et $\mu=1200$. La chiffraison de V y est faite non en mètres, mais en décimètres, et celle de s au moyen des valeurs de $\frac{1}{s}$.

99. *Nomogrammes à points condensés.* — On peut aussi accroître le nombre des variables dans les équations à représenter en points alignés en y substituant aux échelles simples des échelles de points condensés (Remarque du n° 49). Il convient toutefois d'observer que

(¹) Pour s'expliquer la figure 117, il faut se rendre compte que l'axe Ox se confond avec le support de l'échelle (V), l'origine étant au point de cette échelle coté ∞, qui l'est en même temps pour les échelles (b) et (d), et où la tangente commune aux supports de ces deux échelles est confondue avec Oy. On voit aussi qu'ici le module est égal au diamètre du cercle.

cette manière de faire ne résulte encore que d'une façon spéciale d'opérer la dissociation de l'équation proposée, chaque échelle ponctuelle entrant dans le nomogramme étant définie au moyen d'une certaine variable auxiliaire, puis chaque point de ce support défini lui-même comme point condensé au moyen d'un faisceau condensé, ainsi qu'il a été vu au n° 49.

Le cas, bien entendu, le plus utile à considérer, au point de vue de la pratique, est celui où le support de l'échelle condensée est une droite et où le faisceau servant à définir cette échelle est formé de perpendiculaires à cette droite; autrement dit, celui que l'on obtient en accolant des échelles binaires (n° 50) aux supports d'un nomogramme à échelles rectilignes et, plus particulièrement encore, à échelles parallèles.

Soit, par exemple, une équation de la forme

$$f_{14} + f_{25} = f_{36}.$$

Il suffira, pour la représenter, de poser

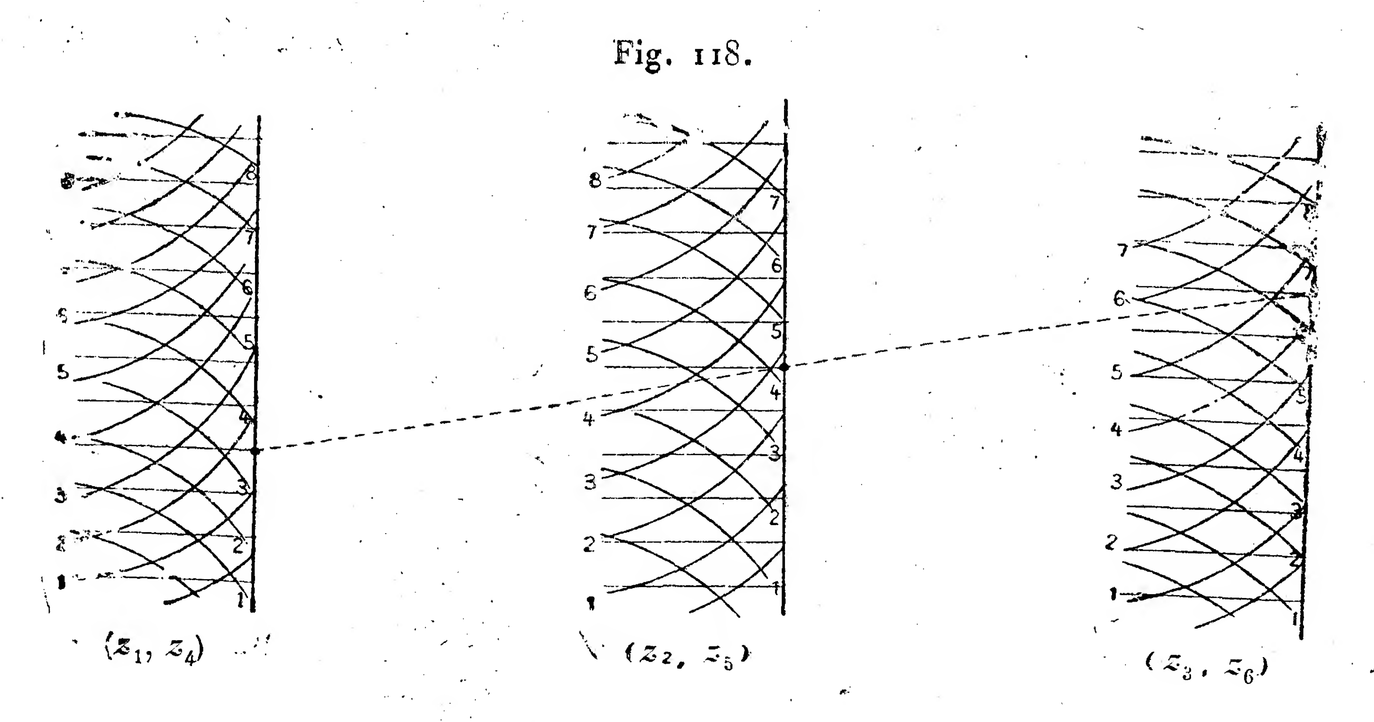
$$u = \mu_1 f_{14},$$
$$v = \mu_2 f_{25},$$

ce qui donne

$$\mu_2 u + \mu_1 v = \mu_1 \mu_2 f_{36}.$$

On voit que les points (z_1, z_4) sont condensés sur l'axe Au

Fig. 118.



(*fig.* 118), où ils seront définis par une échelle binaire de f_{14}. De même, pour les points (z_2, z_5) condensés sur Bv, et les points

(z_3, z_6), condensés sur une parallèle aux deux premiers axes et divisant leur intervalle dans le rapport des modules μ_1 et μ_2.

Exemple : Temps de montée d'un avion. — Si t est le temps, exprimé en minutes, de la montée à l'altitude Z, exprimée en mètres, d'un avion dont la hauteur de plafond est Z_1, en mètres, et la vitesse ascensionnelle au départ V, en mètres par seconde, on a

$$t = \frac{2,303}{60}\frac{Z}{V}\log\left(1 - \frac{Z}{Z_1}\right),$$

d'où, en prenant les logarithmes et représentant la fonction log log par le symbole $\log^2$,

$$\log t + k = \log Z - \log V + \log^2\left(1 - \frac{Z}{Z_1}\right),$$

représentable par points alignés si l'on pose

$$u = \mu_1\left[\log Z + \log^2\left(1 - \frac{Z}{Z_1}\right)\right], \qquad v = -\mu_2 \log V,$$

ce qui, sur la parallèle aux axes divisant leur intervalle dans le rapport $\frac{\mu_1}{\mu_2}$, donne (à un décalage près, dont la mise en place par alignement, telle qu'elle a été indiquée au n° 68, permet de ne pas calculer la grandeur) l'échelle

$$w = \mu_3 \log t \qquad \text{avec} \qquad \mu_3 = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Reste à définir, sur l'axe Au, les points condensés correspondant à la fonction de Z et Z_1 dont l'expression est ci-dessus écrite. Pour cela, on a recours à une échelle binaire (n° 50) rapportée à deux axes cartésiens dont l'axe Oy se confond avec Au, l'axe Ox lui étant perpendiculaire. Cela revient à poser

$$x = \mu Z_1, \qquad y = u,$$

μ étant un module quelconque. Les courbes (Z) de cette échelle binaire ont alors pour équation

$$y = \mu_1\left[\log Z + \log^2\left(1 - \frac{\mu Z}{x}\right)\right].$$

On les obtient en construisant individuellement les échelles (Z) ainsi définies, sur les différentes droites (Z_1), et unissant par des traits continus les points de même cote de ces échelles.

Le nomogramme dont la figure 119 est une réduction a été ainsi construit [1] avec les modules

$$\mu = 0^{mm},022, \qquad \mu_1 = 110^{mm}, \qquad \mu_2 = 280^{mm}, \qquad \mu_3 = 80^{mm}.$$

---

[1] Ce nomogramme, construit pendant la guerre à la Section technique de l'Aéro-

Fig. 119.

Plafond

Z1 4000 4500 5000 5500 6000 6500 7000 7500 8000

500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
4500
5000
5500
6000
Z

t, Temps de montée à l'altitude Z

min
0,8
1
2
3
4
5
10
20
30
40
50
100
150

Vitesse ascentionnelle au départ, V

m/s
10
9
8
7
6
5
4
3
2

La position de l'index, marquée en pointillé sur la figure, correspond à l'exemple $Z = 1800^m$, $Z_1 = 5400^m$, $V = 5^{ms}$, pour lequel on a $t = 7$ minutes.

100. *Nomogrammes à alignements multiples.* — S'il s'agit d'une équation non plus à quatre, mais à n variables, on pourra, en certains cas, grâce à l'introduction de $n-3$ variables auxiliaires, la dissocier (nº 52) en $n-2$ équations à trois variables représentables par points alignés. L'ensemble des nomogrammes ainsi obtenus, sur lesquels on n'aura plus qu'à prendre, avec l'index, des alignements successifs, fournira alors la représentation de l'équation proposée. C'est là une extension corrélative du principe exposé au nº 52, dont une application particulière a déjà été donnée au nº 53.

Il y a lieu de considérer plus spécialement le cas où toutes les échelles du nomogramme sont rectilignes et parallèles entre elles.

Le procédé peut, dans ce cas, être exposé comme suit : étant donnée l'équation

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = 0,$$

on peut, comme au nº 53, la considérer comme le résultat de l'élimination des variables auxiliaires ζ_3, ζ_4, ζ_5, ... entre les équations

$$f_1 + f_2 + \zeta_3 = 0,$$
$$\zeta_3 - f_3 + \zeta_4 = 0,$$
$$\zeta_4 + f_4 + \zeta_5 = 0,$$

jusqu'à

$$\zeta_{2p-1} - f_{2p-1} - f_{2p} = 0 \qquad \text{(si } n \text{ est pair)}$$

ou

$$\zeta_{2p} + f_{2p} + f_{2p+1} = 0 \qquad \text{(si } n \text{ est impair).}$$

Il suffit dès lors de construire, suivant le mode indiqué au nº 67, les nomogrammes de ces équations successives en adoptant, pour deux consécutifs d'entre eux, la même échelle pour la variable auxiliaire ζ qu'ils ont en commun; les supports de ces diverses

---

nautique, est emprunté à la brochure **O.60**, ainsi que plusieurs autres que l'on trouvera par la suite (nºs 120 à 123). Cette brochure contient un exposé sommaire de ce qu'il est indispensable de connaître de la Nomographie et plus spécialement de la méthode des points alignés pour en faire les applications les plus courantes. Tous les exemples qu'elle renferme sont empruntés à la masse importante des applications de cette méthode que les nécessités des diverses techniques intéressant la conduite de la guerre ont conduit à effectuer au cours même des hostilités.

échelles (ζ) (qui n'ont pas besoin d'être graduées ou le seront de façon arbitraire pour le repérage) constitueront autant de charnières. On voit que, pour les cas de n variables, il y en aura $n-3$.

On trouvera plus loin (n° 106 et Note IV des Annexes) diverses applications du procédé des alignements multiples.

II. — Points à deux cotes [1].

101. *Principe des points alignés à deux cotes.* — Tous les artifices mis en avant jusqu'ici, notamment au Chapitre III et dans la section I du présent Chapitre, reposent sur la substitution, à une équation à n variables donnée, d'une suite d'équations à trois variables obtenue par dissociation de celle-ci (p. 137). On a vu au n° 49 qu'en ce qui concerne la représentation par lignes concourantes, on ne saurait songer à aller plus loin par suite de l'impossibilité de figurer sur une seule feuille un système doublement infini de lignes.

Or, il n'en va pas de même pour des points, un système doublement infini de points pouvant être défini par les mutuelles intersections des lignes de deux faisceaux simplement infinis, dont l'ensemble constitue ce qu'on appelle un *réseau*. De là, la possibilité de représenter au moyen de la méthode des points alignés, en substituant aux échelles ponctuelles des réseaux, certaines équations à plus de trois variables *non dissociables* en équations à trois variables et appartenant néanmoins à un type qui se rencontre très fréquemment dans les applications.

On peut définir un système de points à deux cotes (z_1, z_2) par l'équation en coordonnées parallèles de chacun de ses points

$$u f_{12} + v g_{12} + h_{12} = 0.$$

---

[1] Introduits pour la première fois dans la note **O.3** et la brochure **O.4** sous le nom de *points doublement isoplèthes*.

Le graphique de l'écoulement de l'eau dans les canaux et rivières, publié en 1869 par MM. E. Ganguillet et W.-R. Kutter (*Zeitschrift des Œstr. Ing. und Arch. Vereins*, t. XXI, p. 30), que ses auteurs ont obtenu par un procédé géométrique direct, a pu être regardé après coup comme une application du principe général étudié ici, mais il y a lieu de renouveler à cette occasion la remarque faite dans le renvoi de la page 155, à propos de la table de multiplication graphique de Möbius. Ce graphique de Ganguillet et Kutter n'éveille pas la moindre idée du principe général auquel on peut aujourd'hui le rattacher.

Si l'on prend, ainsi qu'au n° 58, comme origine O le milieu de la distance AB des origines des axes Au et Bv, comme axe Oy la parallèle à ces axes menée par O, comme axe Ox la droite OB (dirigée de O vers B), et si l'on pose OB $= \delta$, les coordonnées cartésiennes du point défini par l'équation ci-dessus sont

$$x = \delta \frac{g_{12} - f_{12}}{g_{12} + f_{12}},$$
$$y = \frac{-h_{12}}{g_{12} + f_{12}},$$

et l'élimination successive de z_2 et de z_1 entre ces deux dernières équations donne les équations cartésiennes des systèmes (z_1) et (z_2) constituant par leur ensemble le réseau (z_1, z_2).

Un système de points à deux cotes étant ainsi défini, il n'y a qu'à reprendre tout ce qui a été dit dans les n°s 61 et suivants, en substituant à un, à deux ou aux trois systèmes de points à une cote, des systèmes de points à deux cotes, pour avoir des nomogrammes à points alignés représentant des équations à quatre, cinq ou six variables.

Si l'on se reporte au n° 61, on voit donc que l'équation la plus générale représentable par un nomogramme à points alignés comportant trois systèmes de points à deux cotes est de la forme

$$\begin{vmatrix} f_{12} & g_{12} & h_{12} \\ f_{34} & g_{34} & h_{34} \\ f_{56} & g_{56} & h_{56} \end{vmatrix} = 0.$$

Le nomogramme correspondant a la disposition indiquée par la figure 120.

Son emploi se réduit à ceci :

Si, par exemple, on prend z_6 pour inconnue, on fait passer l'index par les points de rencontre d'une part des lignes z_1 et z_2, de l'autre des lignes z_3 et z_4; cet index coupe alors la ligne z_5 en un point par lequel passe une ligne z_6 dont la cote est la valeur de l'inconnue demandée.

Ainsi, sur la figure 120, pour

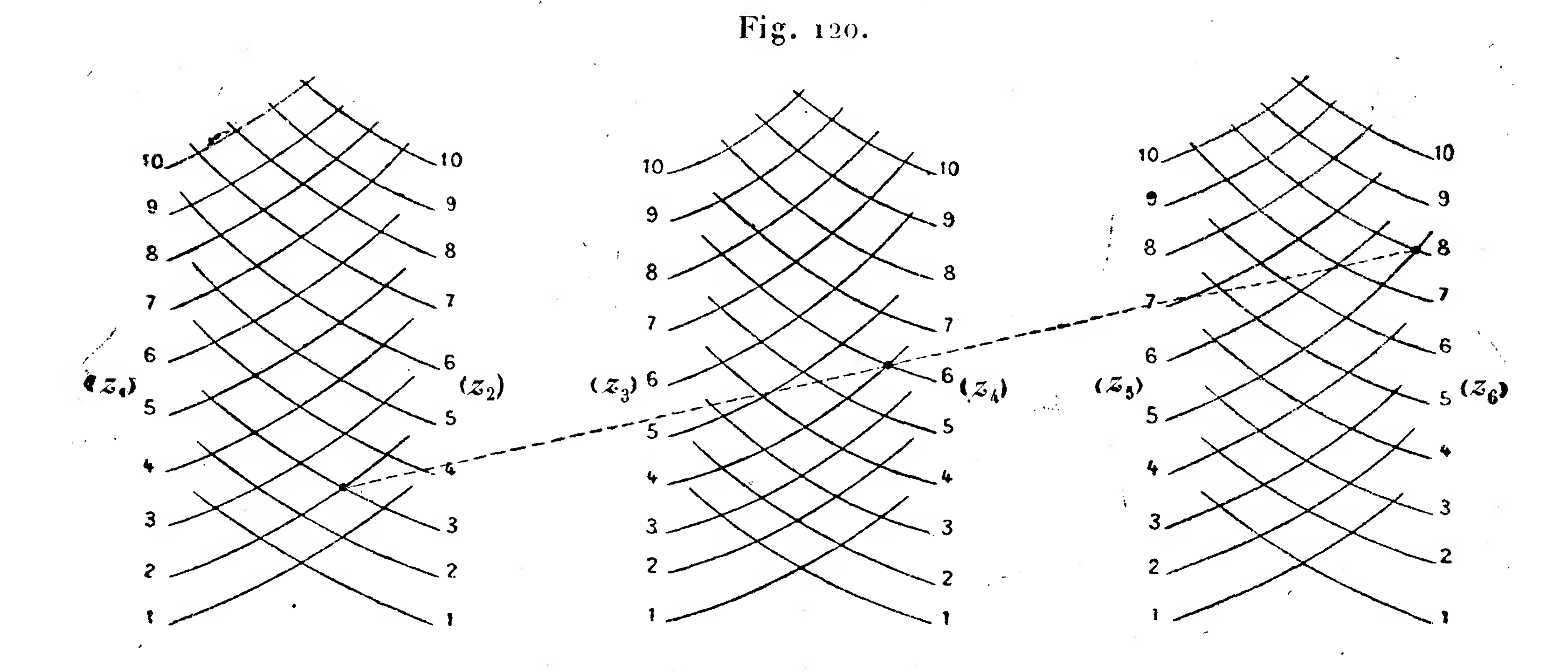
$$z_1 = 2, \quad z_2 = 3, \quad z_3 = 4, \quad z_4 = 6, \quad z_5 = 5,$$

le nomogramme donne $z_6 = 8$.

Tout ce qui a été dit relativement à la transformation homographique et au fractionnement des nomogrammes à points alignés à une cote pourrait être répété ici.

Parmi les nomogrammes à points alignés à deux cotes, ceux qui, de beaucoup, se rencontrent le plus fréquemment dans la pratique,

Fig. 120.



sont constitués au moyen d'un seul réseau à deux cotes et de deux échelles à une seule cote, portées par deux axes parallèles. Ils généralisent par conséquent les nomogrammes de genre 0 et 1, et en ce qui concerne leur disposition, on n'aura qu'à se reporter à ce qui a été dit de ceux-ci.

Les équations représentables par des nomogrammes de ce type sont celles de la forme

(E) $$f_1 g_{34} + f_2 h_{34} + f_{34} = 0.$$

Pour obtenir le nomogramme correspondant, il suffit, en représentant par μ_1 et μ_2 deux modules quelconques, de poser

(z_1) $$u = \mu_1 f_1,$$
(z_2) $$v = \mu_2 f_2.$$

L'équation du point (z_3, z_4) est alors

(z_2, z_4) $$u\mu_2 g_{34} + v\mu_1 h_{34} + \mu_1\mu_2 f_{34} = 0,$$

et ses coordonnées cartésiennes par rapport aux axes ci-dessus définis,

si l'on représente toujours par δ la moitié de la longueur AB,

$$x = \delta \frac{\mu_1 h_{34} - \mu_2 g_{34}}{\mu_1 h_{34} + \mu_2 g_{34}},$$

$$y = \frac{-\mu_1 \mu_2 f_{34}}{\mu_1 h_{34} + \mu_2 g_{34}}.$$

L'élimination successive de z_4 et de z_3 entre ces deux équations donne les équations cartésiennes des deux systèmes de lignes du réseau (z_3, z_4)

$$(z_3) \qquad f_3(x, y, z_3) = 0,$$

$$(z_4) \qquad f_4(x, y, z_4) = 0.$$

Remarque I. — Si, ce qui est un cas très fréquent, les fonctions h_{34} et g_{34} se réduisent à des fonctions h_3 et g_3 seulement, l'équation qui fait connaître x donne en même temps le faisceau (z_3) du réseau (z_3, z_4).

Dans ce cas, les diverses lignes du faisceau (z_4) déterminent sur chaque ligne (z_3) une échelle dont l'expression de y fournit l'équation lorsque, pour chaque valeur fixe attribuée à z_3, on y fait varier seulement z_4. Dans ces conditions, si l'expression de y est linéaire en z_4, toutes les échelles ainsi obtenues sont métriques, et il suffit, par conséquent, pour chacune d'elles, de déterminer seulement les points correspondants à deux valeurs particulières de z_4. Nous disons alors que les lignes (z_4) sont *métriquement espacées* suivant la direction de Oy.

Remarque II. — Si, dans la même hypothèse que ci-dessus (celle où les fonctious f_{34} et g_{34} se réduisent à f_3 et g_3), on suppose, en outre, que le rapport de f_3 à g_3 varie peu dans les limites où la variable z_3 reste comprise, le resserrement trop grand des lignes (z_3), parallèles à Oy, qui en résulte, peut être un inconvénient. Mais lorsque la nature de la question fait que z_3 ne figure jamais que parmi les données, on peut tourner la difficulté en prenant pour chaque valeur de z_3, avec un axe Au fixe, un axe Bv différent. Dans ces conditions, au lieu d'une échelle simple (z_2) portée sur un axe Bv unique, on a un réseau (z_2, z_3) dont les lignes (z_3) sont encore des parallèles à Oy et l'on prend les alignements entre les points de ce réseau et ceux de l'échelle (z_1). On trouvera une application de cette remarque au n° **122**.

102. *Premier exemple : Intérêts composés.* — Reprenons la formule des intérêts composés, mise sous forme logarithmique (n° 54, 1°),

$$\log A = \log a + n \log(1 + r).$$

Nous pouvons ici prendre comme éléments cotés (a) et (n)

$$(a) \qquad u = \mu_1 \log a,$$
$$(n) \qquad v = \mu_2 n.$$

Cela nous donne, pour l'ensemble des variables A et r, les points à deux cotes définis par l'équation

$$\mu_2 u + \mu_1 \log(1 + r) v - \mu_1 \mu_2 \log A = 0$$

ou, en vertu des formules du numéro précédent,

$$(r) \qquad x = \delta \frac{\mu_1 \log(1 + r) - \mu_2}{\mu_1 \log(1 + r) + \mu_2},$$
$$y = \frac{\mu_1 \mu_2 \log A}{\mu_1 \log(1 + r) + \mu_2}.$$

La première de ces équations ne contenant que r définit les lignes du réseau cotées (r) qui sont, comme on voit, des droites parallèles aux axes Au et Bv; puis l'élimination de r entre les deux dernières formules donne, pour les lignes du réseau cotées (A), l'équation

$$(A) \qquad 2 \delta y = \mu_1 (\delta - x) \log A,$$

droites qui passent toutes par l'origine $B(x = \delta,\ y = 0)$ de l'axe Bv, et qui coupent l'axe $Au(x = -\delta)$ aux points définis par

$$y = \mu_1 \log A,$$

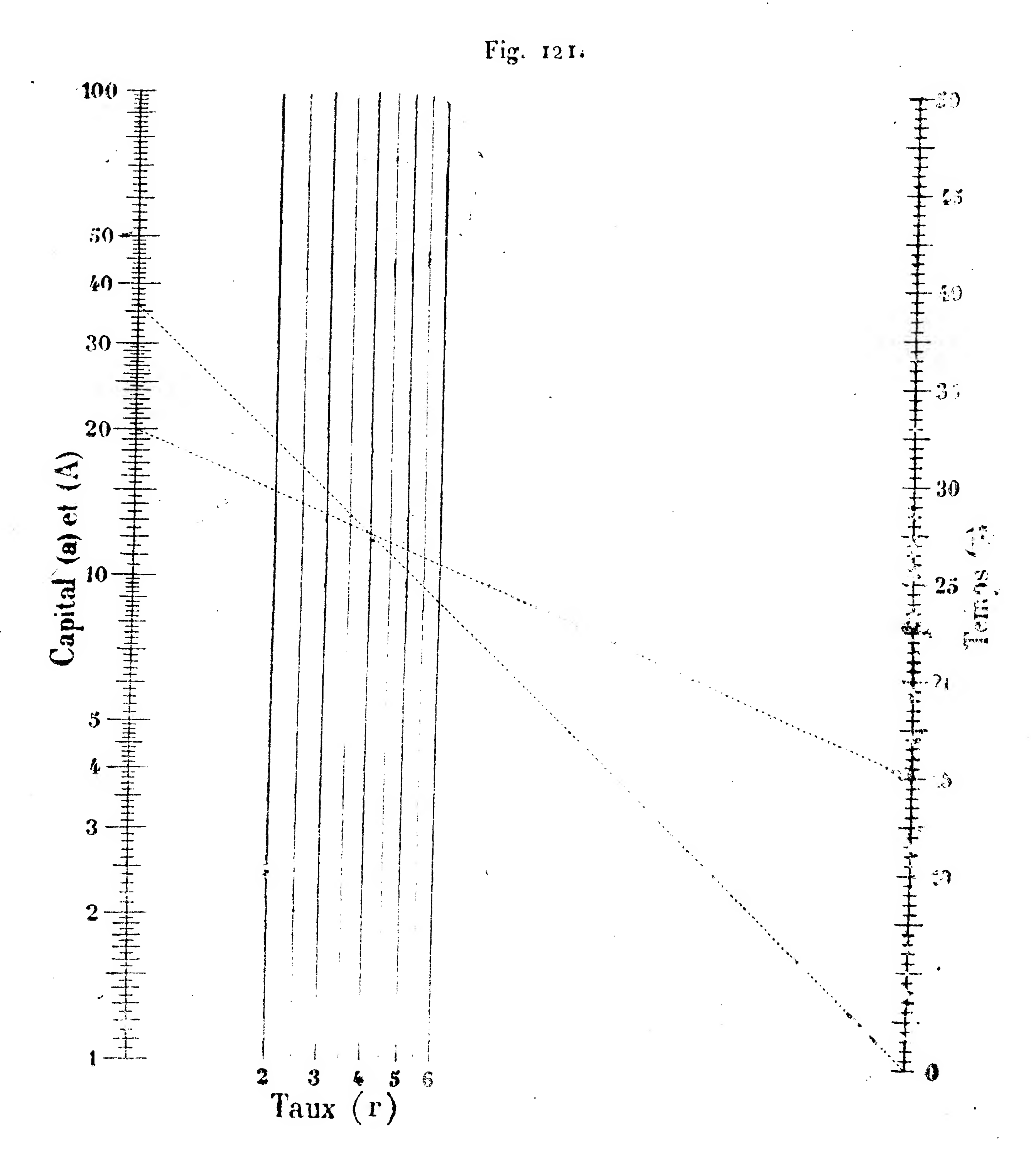
qui se confondent avec les points (a). Cette circonstance permet d'éviter le tracé des droites (A). En effet, il suffit, pour avoir une telle droite, de joindre le point B (qui n'est autre que le point $n = 0$) au point de l'échelle (a) coté A. On peut, d'ailleurs, pour réaliser cette droite, se servir de l'index lui-même. L'emploi du nomogramme devient alors analogue à celui des nomogrammes à double alignement, le second alignement passant ici par un point fixe. Il peut s'énoncer ainsi :

On fait d'abord passer l'index par le point coté a *sur l'échelle du capital et le point coté* n *sur l'échelle du temps, puis on le fait pivoter autour du point où il rencontre la verticale cotée* r, *de façon à l'amener à passer par le point* $n = 0$. *Il coupe alors l'échelle du capital au point coté* A.

Sur le nomogramme représenté par la figure 121, on a pris $\mu_2 = 0{,}04\mu_1$ de

façon à donner à l'échelle du temps (n) la même longueur qu'à l'échelle du capital (a) et (A), avec les limites adoptées.

Fig. 121.



Les deux positions de l'index marquées en pointillé sur la figure correspondent à l'exemple numérique déjà envisagé au n° 54 (1°), savoir

$$a = 20\,000^{\text{fr}}, \qquad n = 15^{\text{a}}, \qquad r = 4\ {}^0/_0,$$

pour lequel le nomogramme donne

$$A = 36\,000^{\text{fr}}.$$

103. *Deuxième exemple : Grille trigonométrique* (¹). — La formule fon-

(¹) Donné pour la première fois dans **O.4**, p. 84, ce nomogramme a, depuis lors, été utilisé par Collignon dans sa *Note sur la détermination de l'heure du passage du Soleil dans un plan vertical* (*J. E. P.*, 2ᵉ série, 3ᵉ cahier, p. 123; 1898).

damentale de la trigonométrie sphérique

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

peut, ainsi que l'a remarqué Collignon, s'écrire

$$2 \cos a = (1 + \cos A) \cos(b - c) + (1 - \cos A) \cos(b + c).$$

Sous cette forme, elle rentre dans le type (E) du n° **101**.

Adoptant ici pour μ_1 et μ_2 la valeur δ du demi-écartement des axes Au et Bv (ce qui donne pour quadrangle limite un carré), nous poserons, en vertu des formules (z_1) et (z_2) du n° **101**,

$$u = \delta \cos(b + c),$$
$$v = \delta \cos(b - c),$$

ce qui nous donne, pour équation du réseau (a, A),

$$u(1 - \cos A) + v(1 + \cos A) - 2\delta \cos a = 0.$$

Les coordonnées cartésiennes du point correspondant sont ici données par les formules

$$y = \delta \cos a,$$
$$x = \delta \cos A,$$

qui ne comportent pas d'élimination, puisque chacune des variables A et a n'entre que dans l'une d'elles. Elles font donc connaître directement les lignes cotées (A) et (a) qui sont des parallèles aux axes cartésiens.

Le nomogramme correspondant, obtenu avec $\delta = 4^{cm}$, est représenté par la figure 122.

Ce nomogramme est, en somme, constitué par les droites joignant deux à deux, dans le sens parallèle à Ox et dans celui parallèle à Oy, des points d'égale division (de 5° en 5° sur la figure 122) d'un cercle gradué rapporté à ces axes. Ce mode de génération justifie pour un tel nomogramme le nom de ***grille trigonométrique***. Toutes les graduations étant d'ailleurs cosinusoïdales, on doit, pour un angle supérieur à 180, prendre le point coté au moyen de son complément à 360°.

La position de l'index, marquée en pointillé sur la figure, correspond à l'exemple numérique suivant, qui fait connaître, sur la mappemonde, la distance sphérique de Paris à Hanoï, lorsqu'on prend pour b et c les colatitudes 66°20′ et 48°50′ d'Hanoï et de Paris, dont la différence de longitude est de 116°. On a donc ici

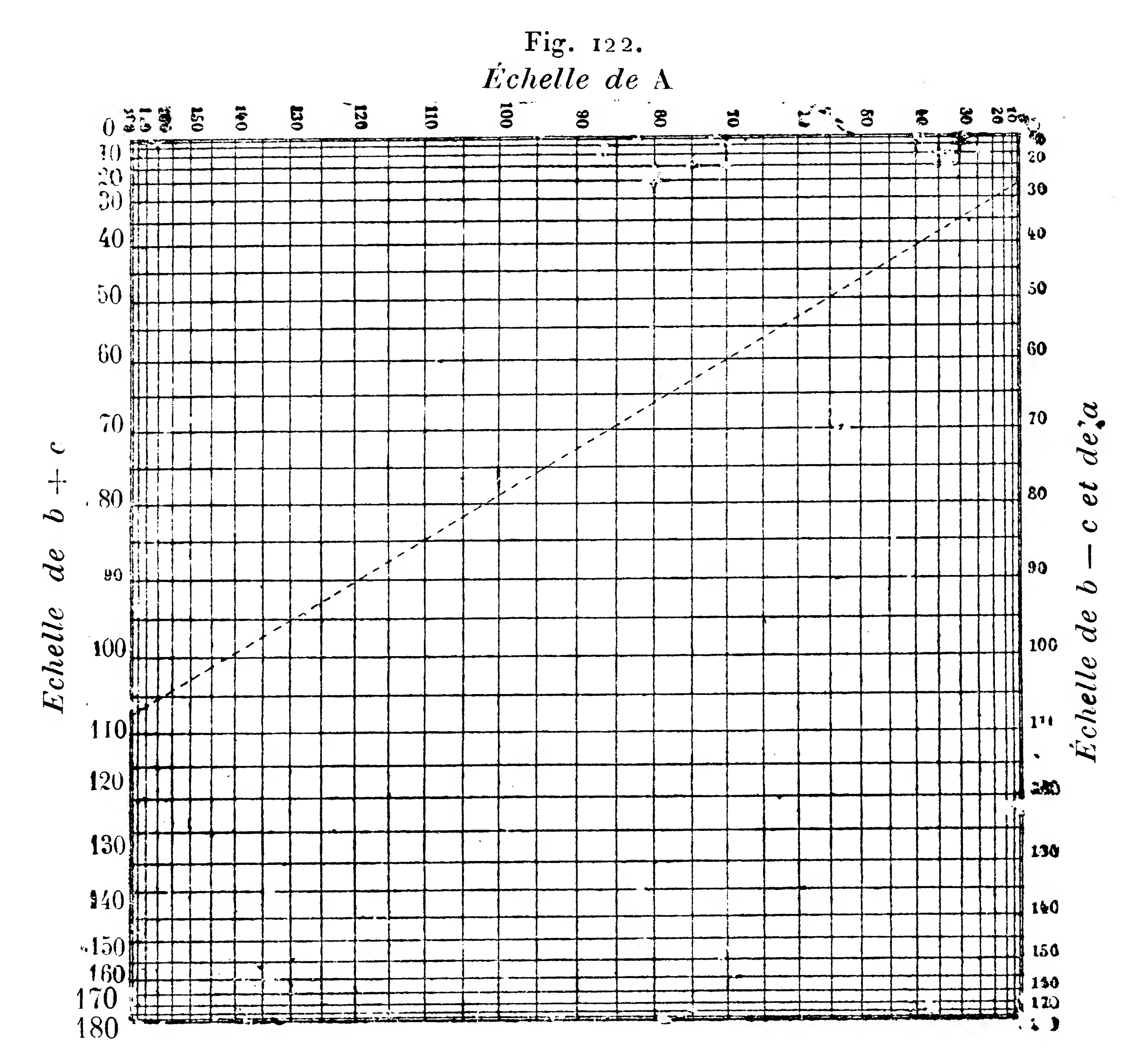
$$b + c = 107°30', \qquad b - c = 25°10', \qquad A = 116°.$$

Le nomogramme donne $a = 87°50'$.

Cette grille trigonométrique ne permet de prendre pour inconnue que a ou A, et non b ni c, qui entrent à la fois dans les chiffraisons $(b + c)$ et $(b - c)$.

Nous avons toutefois résolu le problème consistant à obtenir l'une ou l'autre de ces variables b et c, prise pour inconnue, en ne faisant usage que

Fig. 122.



de cette grille ([1]). M. G. Pesci nous a indiqué une utile simplification de la solution de ce problème. C'est cette solution simplifiée que nous allons reproduire ici.

Supposons que les données étant A, a et b, nous cherchions à obtenir c.

Soient D le point diamétralement opposé au sommet C sur la sphère et CHD le grand cercle orthogonal à AB. Le pôle C′ de AB se trouve sur CD et les grands cercles C′A et C′B sont orthogonaux sur AB.

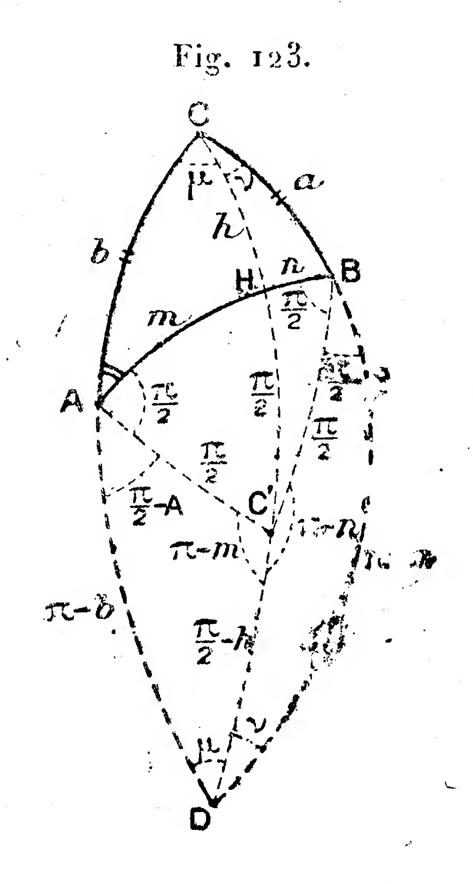
Dans l'hypothèse de $B < \frac{\pi}{2}$, appelons m et n les segments déterminés par le grand cercle CHD sur AB, alors tous deux intérieurs à AB, μ et ν les angles qu'il fait avec CA et CB.

Dans le triangle DAC′ on connaît trois éléments conséeutifs, savoir l'angle en A, égal à $\frac{\pi}{2} - A$, et les deux côtés qui le comprennent, $AD = \pi - b$, $AC' = \frac{\pi}{2}$.

([1]) **O.41** et **43**. Il va sans dire que la grille s'applique de même aux cas corrélatifs résultant de la considération du triangle supplémentaire.

La grille permet alors d'obtenir les autres éléments du triangle, savoir : le côté C′D, l'angle en C′ égal à $\pi - m$ (d'où m) et l'angle en D égal à μ.

Fig. 123.



C′D venant d'être obtenu, on connaît les trois côtés du triangle DBC′. La grille en donne alors les trois angles, savoir $\frac{\pi}{2} - B$ (d'où B), $\pi - n$ (d'où n) et ν.

On a enfin

$$AB = m + n \qquad \text{et} \qquad C = \mu + \nu.$$

Si B était obtus, il faudrait prendre

$$AB = m - n, \qquad C = \mu - \nu.$$

La résolution nomographique générale des triangles sphériques par le procédé le plus direct en chaque cas sera traité plus loin en détail (n°s 113 à 117).

104. *Troisième exemple : Résolution de l'équation complète du troisième degré.* — Pour représenter l'équation

$$z^3 + n z^2 + p z + q = 0,$$

qui rentre évidemment dans le type (E) du n° 101, il suffit, en appelant μ_1 et μ_2 deux modules quelconques, de poser

$$(p) \qquad u = \mu_1 p,$$
$$(q) \qquad v = \mu_2 q,$$

équations qui définissent deux échelles métriques portées sur Au et Bv. Le point (n, z) est alors défini, en vertu de ce qui a été vu au n° 101, par

l'équation

$$\mu_2 z u + \mu_1 v + \mu_1 \mu_2 (z^3 + n z^2) = 0$$

ou, ce qui revient au même, par les formules

$$x = \delta \frac{\mu_1 - \mu_2 z}{\mu_1 + \mu_2 z},$$

$$y = -\frac{\mu_1 \mu_2 (z^3 + n z^2)}{\mu_1 + \mu_2 z}.$$

La première de ces équations ne contenant que z définit, dans le réseau (n, z), les lignes cotées (z) qui sont, comme on voit, des parallèles aux axes coordonnés Au et Bv, déterminant, sur l'axe AB des origines, une échelle homographique (n° 7), identique à celle dont la construction a été donnée au n° 79.

Quant aux courbes (n), qui sont des cubiques cuspidales, on pourrait aisément former leur équation en éliminant z entre les valeurs de x et y; mais cela est inutile.

On se trouve, en effet, ici dans un cas d'application de la remarque I du n° 101. Les lignes (n) sont, d'après l'expression de y, métriquement espacées dans le sens de Oy, et il suffit, pour les déterminer, d'obtenir sur chaque ligne (z) deux points de l'échelle métrique correspondante. Il est tout naturel de choisir d'abord le point $n = 0$ dont la construction a été donnée au n° 80.

Si l'on prend ensuite le point $n = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, on voit qu'il se déduit, par une construction très simple, du point $n = 0$ correspondant. En effet, l'expression ci-dessus de y, pour $n = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, devient

$$y = -\mu_1 z^2$$

et, d'autre part, le point $n = 0$ situé sur la droite (z) ayant pour équation

$$\mu_2 z u + \mu_1 v + \mu_1 \mu_2 z^3 = 0,$$

qui, pour $v = 0$, donne

$$u = -\mu_1 z^2,$$

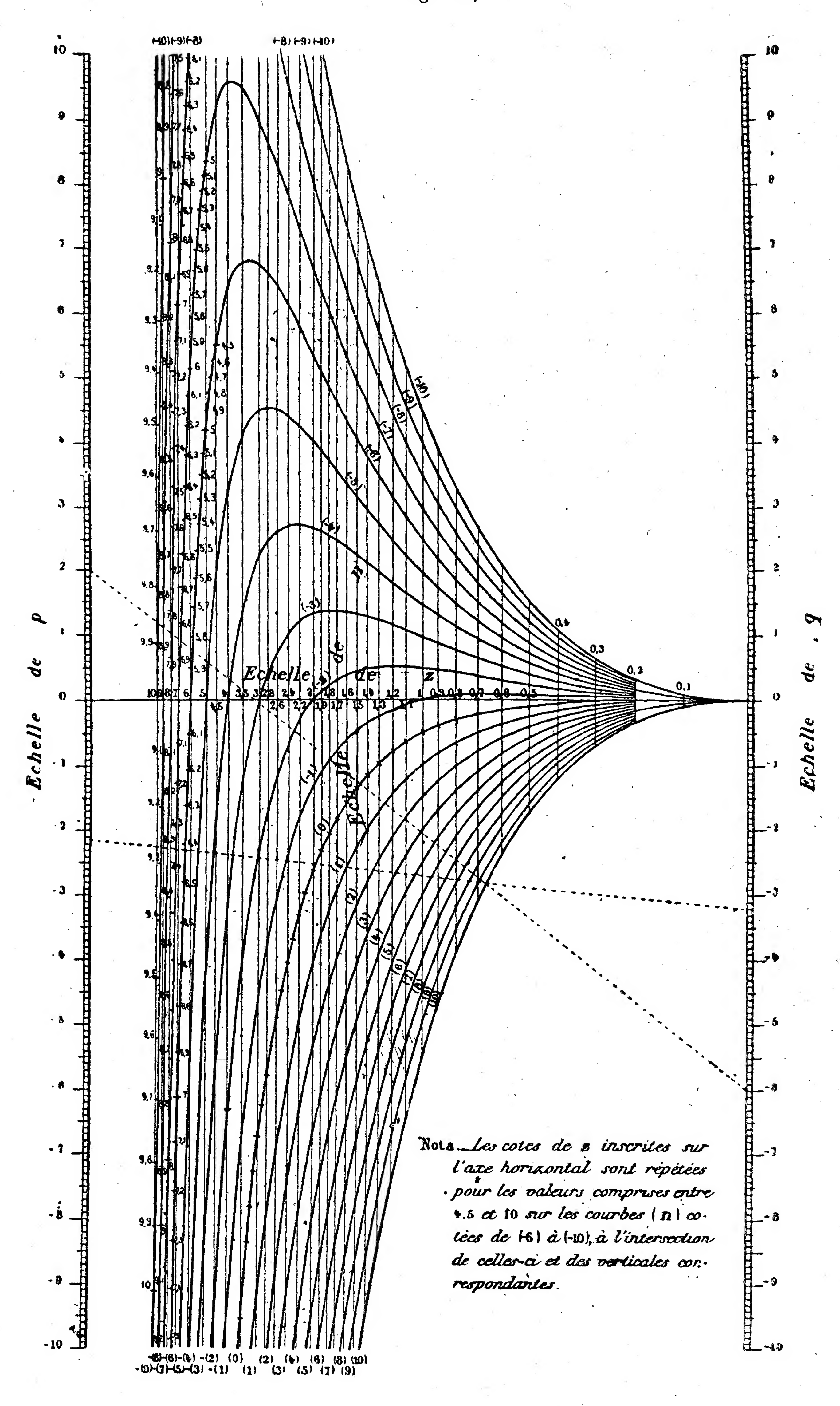
on voit que *la projection orthogonale sur* Au *du point coté* $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ *situé sur une droite* (z) *se confond avec la projection du point coté* 0 *sur cette même droite* (z), *faite à partir de l'origine* B *sur l'axe* Au.

Étant donné que la construction de la courbe $n = 0$ a été entièrement réalisée au n° 80 par des projections successives faites à partir d'échelles métriques, on voit que la construction du nomogramme de l'équation complète du troisième degré offre le même caractère.

C'est ainsi qu'en prenant

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{\delta}{5}$$

Fig. 124.


Echelle de p
Echelle de q
Echelle de z
Echelle de n
Nota. — Les cotes de z inscrites sur l'axe horizontal sont répétées pour les valeurs comprises entre 4.5 et 10 sur les courbes (n) cotées de (-6) à (-10), à l'intersection de celles-ci et des verticales correspondantes.

on a construit le nomogramme de la figure 124, dont l'emploi se réduit à ceci : *faire passer l'index par les points cotés p et q et lire les cotes z des parallèles aux axes, passant par les points où cet index rencontre la courbe cotée n.*

On s'est d'ailleurs, en vertu d'une remarque déjà faite à propos de l'équation trinome (n° 80), borné à envisager des valeurs positives de z, les valeurs absolues des racines négatives de l'équation pouvant être obtenues comme racines positives de la transformée en $-z$, c'est-à-dire de l'équation définie par les coefficients $-n$, p et $-q$.

Les équations du troisième degré qui se rencontrent dans la pratique n'ont, d'ailleurs, en général, qu'une racine positive, et c'est la seule qu'on ait besoin de calculer.

Les positions de l'index marquées en pointillé sur la figure se rapportent aux équations

$$z^3 + 2z - 6 = 0$$

et

$$z^3 + z^2 - 2,16z - 3,2 = 0,$$

pour lesquelles le nomogramme donne respectivement $z = 1,46$ et $z = 1,6$.

Remarquons, en outre, qu'ici s'applique le principe des multiplicateurs correspondants (n° 20) lorsqu'on prend

$$z' = \lambda z, \qquad n' = \lambda n, \qquad p' = \lambda^2 p, \qquad q' = \lambda^3 q.$$

En voici des exemples pris dans la pratique :

1° *Voûte en dôme.* — Bossut, dans ses *Recherches sur l'équilibre des voûtes* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, p. 556; 1774), est amené, à propos d'une voûte en dôme particulière, à résoudre l'équation

$$t^3 + 96t^2 + 721,879t - 7826,051 = 0.$$

En prenant $\lambda = \frac{1}{10}$, on a l'équation

$$t'^3 + 9,6t'^2 + 7,21t' - 7,82 = 0.$$

Le nomogramme donne pour cette dernière

$$t' = 0,59.$$

Par suite,

$$t = 5,9.$$

2° *Remous d'une rivière.* — Le remous z d'une rivière, à son passage sous un pont, est donné par l'équation

$$z^3 + (2H - A)z^2 + H(H - 2A)z + B - AH^2 = 0,$$

où

$$A = \frac{Q^2}{2gU^2l^2H^2}, \qquad B = \frac{Q^2}{2gL^2},$$

L désignant la largeur de la rivière en amont du pont,
l sa largeur totale sous les arches du pont,
H la profondeur moyenne en amont,
Q le débit de la rivière,
U le coefficient de contraction.

Avec les données suivantes, qui sont celles relevées par d'Aubuisson dans son expérience sur la Veser, savoir

$$L = 180^{m},71. \quad l = 96^{m},13, \quad H = 5^{m},37, \quad Q = 1450^{m^3}, \quad U = 0,9,$$

on a l'équation

$$z^3 + 10,2 z^2 + 23,5 z - 11,04 = 0.$$

Prenant ici $\lambda = \frac{1}{2}$, on est ramené à l'équation

$$z'^3 + 5,1 z'^2 + 5,9 z' - 1,38 = 0,$$

pour laquelle le nomogramme donne

$$z' = 0,19$$

et, par suite,

$$z = 0^{m},38 \quad (^1).$$

105. *Quatrième exemple : Résolution de l'équation du quatrième degré.* — Soit l'équation du quatrième degré

$$z^4 + m z^3 + n z^2 + p z + q = 0.$$

Lorsqu'on pose

$$z = m z', \quad n = m^2 n', \quad p = m^3 p', \quad q = m^4 q',$$

elle devient (²)

$$z'^4 + z'^3 + n' z'^2 + p' z' + q' = 0.$$

(¹) L'expérience de d'Aubuisson a donné $z = 0^{m},382$.

(²) Il y a lieu ici de faire une double observation :

1° Pour le cas où m serait négatif, il y aurait lieu de construire un second nomogramme, analogue à celui qui va être décrit, et correspondant à l'équation

$$z'^4 - z'^3 + n' z'^2 + p' z' + q' = 0.$$

Ce nomogramme servirait notamment à obtenir les valeurs absolues des racines négatives des équations pour lesquelles le coefficient m est positif.

2° Pour le cas où $m = 0$, on pourrait construire aussi le nomogramme de l'équation

$$z^4 + n z^2 + p z + q = 0,$$

analogue à celui qui a été décrit au numéro précédent, mais la résolution d'une telle équation se ramène immédiatement à l'emploi du nomogramme décrit ci-dessus, au moyen de la transformation $z' = z \pm 1$.

Sous cette forme, il suffit, pour la représenter, de poser

$$(p') \qquad u = \mu_1 p',$$

$$(q') \qquad v = \mu_2 q',$$

ce qui donne pour les points (n', z')

$$x = \delta \frac{\mu_1 - \mu_2 z'}{\mu_1 + \mu_2 z'},$$

$$y = -\frac{\mu_1 \mu_2 (z'^4 + z'^3 + n' z'^2)}{\mu_1 + \mu_2 z'}.$$

On voit que tout ce qui a été dit à propos de la construction du nomogramme précédent peut être répété ici. On obtient seulement comme courbes (n') des quartiques au lieu de cubiques. Mais, une fois tracée la courbe $n' = 0$, les autres s'en déduisent exactement de même qu'au numéro précédent, toujours d'après la remarque du n° **101**. En effet, si l'on compare l'expression de y ci-dessus à celle qui figure au numéro précédent, on voit que, pour une même valeur de z' ou de z, dans l'une ou l'autre de ces expressions, on a, entre les y correspondant à une même valeur de n', une différence constante. Si donc on construit ce nomogramme nouveau avec les mêmes modules que le précédent, on voit que les échelles métriques déterminées sur les diverses verticales (z), par les courbes (n'), sont les mêmes dans l'un et l'autre cas. C'est ainsi qu'a été obtenu le nomogramme de la figure 125 [1].

Pour déduire les coefficients n', p', q' des coefficients m, n, p, q et passer ensuite des racines z' aux racines z, on voit qu'il suffit de construire le nomogramme de l'équation

$$\alpha = m^i \alpha'$$

pour $i = 1, 2, 3, 4$.

Ce nomogramme rentre lui-même dans le type ici étudié. Il suffit, en effet, d'écrire l'équation précédente sous la forme

$$\log \alpha = \log \alpha' + i \log m,$$

pour voir qu'elle est représentable au moyen des deux systèmes de points à une cote

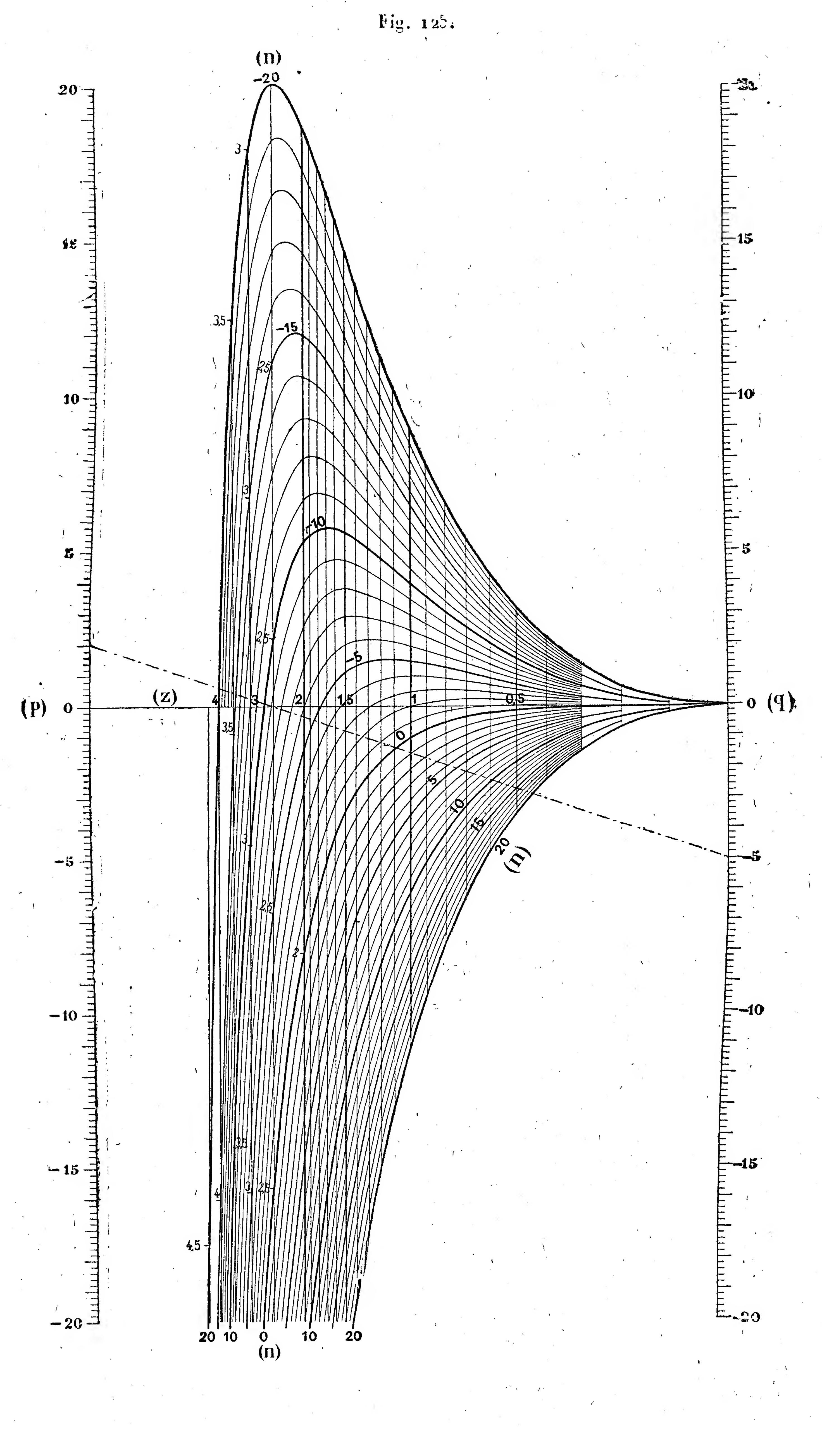
$$(\alpha) \qquad u = \mu_1 \log \alpha,$$

$$(m) \qquad v = -\mu_2 \log m,$$

---

(1) La simple inspection de la figure (sur laquelle on a supprimé les accents affectés aux lettres z, n, p, q) montre que la portion tracée des courbes (n) comprise entre les axes n'est jamais coupée par une droite en plus de trois points, c'est-à-dire qu'aucune des équations représentées n'a plus de trois racines positives, ce qui est évident *a priori*, attendu que, la somme des racines étant égale à -1, l'une au moins de ces racines est nécessairement négative.

Fig. 125.



(n)
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
(n)
(p)
(q)
(z)
4
3
2
1,5
1
0,5
3,5
2,5
4,5
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
20 10 0 10 20
(n)

et le système de points à deux cotes

$$\mu_2 u + \mu_1 iv - \mu_1 \mu_2 \log \alpha' = 0$$

ou

$$x = \delta \frac{\mu_1 i - \mu_2}{\mu_1 i + \mu_2},$$

$$y = \frac{\mu_1 \mu_2 \log \alpha'}{\mu_1 i + \mu_2}.$$

Prenons $\mu_1 = \mu_2$. Les échelles (α) et (m) sont alors des échelles logarithmiques de même module portées en sens contraires sur Au et Bv. Les lignes (i) sont des parallèles à ces axes définies par

$$(i) \qquad x = \delta \frac{i - 1}{i + 1},$$

c'est-à-dire déterminant sur AB une échelle homographique (n° 7), et les lignes (α'), dont l'équation s'obtient par l'élimination de i entre les expressions ci-dessus de x et y, sont définies par

$$(\alpha') \qquad 2\alpha y = \mu_1 \log \alpha' (\delta - x).$$

Ce sont des droites et l'on voit, en faisant $x = \delta$ et $x = -\delta$, que la droite cotée α' joint l'origine B de l'axe Bv au point coté α de l'échelle portée sur Au.

Ce nomogramme, où il suffit de donner à i les valeurs 1, 2, 3, 4, est donc très simple à construire (*fig.* 126). Au lieu d'inscrire à côté des verticales les valeurs de i, on y a inscrit la désignation des variables correspondantes. En outre, on a, à côté de l'échelle de gauche, inscrit les désignations des diverses variables auxquelles se rapporte cette échelle, c'est-à-dire qui ont été représentées en bloc par la variable α dont on s'est servi pour la construction [1].

Le procédé à suivre pour la résolution d'une équation du quatrième degré est alors le suivant : *Faisant passer l'index, sur le nomogramme de la figure* 126, *par le point m de l'échelle de droite, on le fait pivoter autour de ce point pour prendre successivement les points n, p, q de l'échelle de gauche. Ces diverses positions de l'index coupent respectivement les échelles* (n'), (p') *et* (q') *en des points dont les cotes font connaître* n', p', q'. *Celles-ci, transportées sur le nomogramme de la figure* 125, *font connaître les racines* z'. *En faisant passer alors sur la figure* 126 *l'index,*

---

(1) Au lieu de construire les radiantes qui figurent sur ce nomogramme auxiliaire, on peut recourir à un pivotement de l'index, comme pour le nomogramme des intérêts composés (*fig.* 121). Pour avoir n', par exemple, ayant fait passer l'index par les points m et n, on le fait pivoter autour de son point de rencontre avec la verticale (n') jusqu'à ce qu'il passe par le point z de l'échelle (m). Il donne alors la valeur de n' sur l'échelle (n).

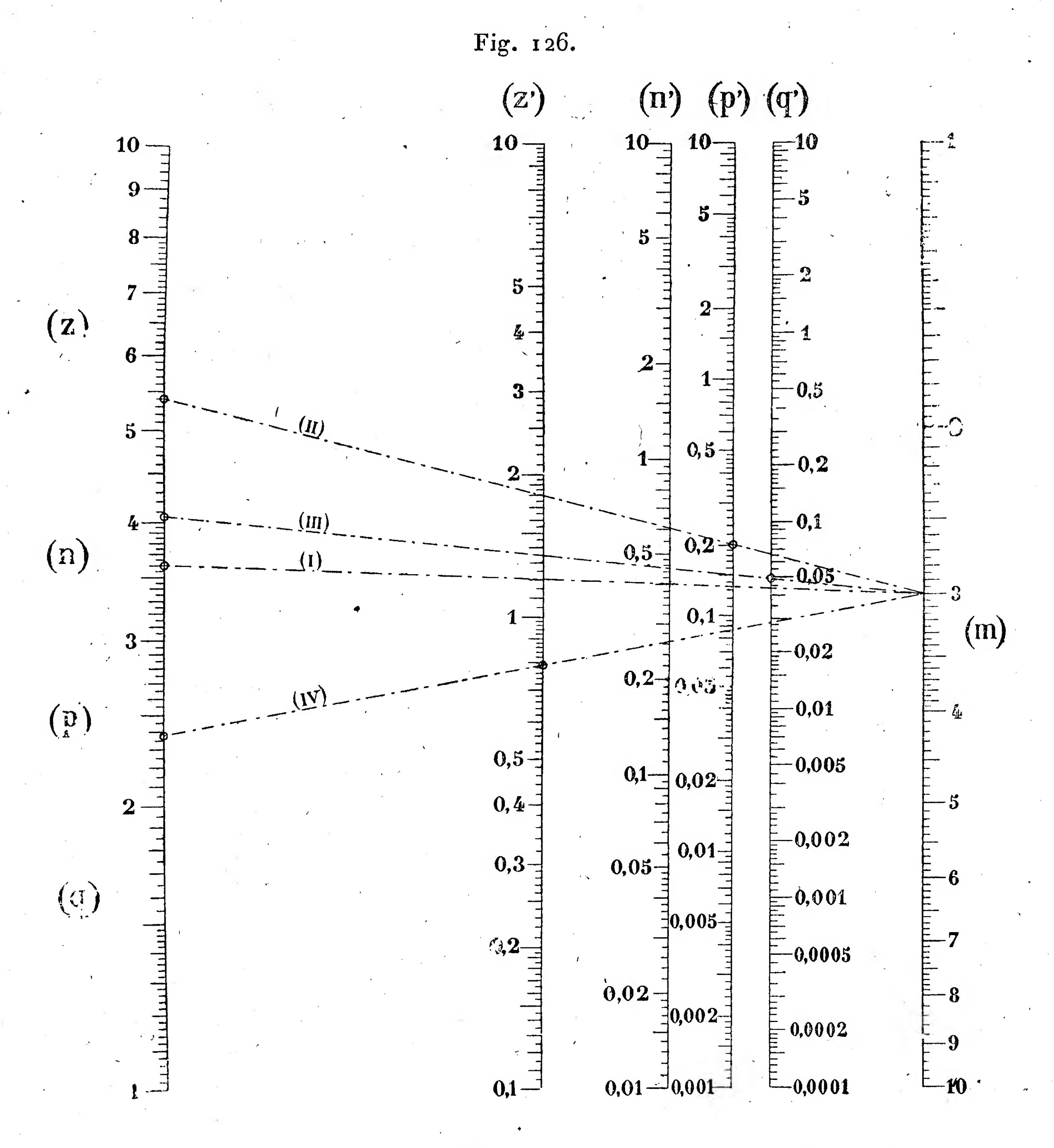
pivotant toujours autour du point m, par les points de l'échelle (z') cotés au moyen des valeurs de ces racines, on obtient les racines z demandées sur l'échelle de gauche.

Soit, par exemple, à résoudre l'équation

$$z^4 + 3z^3 + 36z^2 + 54z - 405 = 0.$$

Les trois traits mixtes (I), (II) et (III) qui sont marqués sur la figure 126

Fig. 126.



montrent que, si l'on réduit le coefficient du second terme à l'unité, les trois autres coefficients deviennent respectivement, en valeur absolue, 4, 2 et 5. On a donc à résoudre, au moyen du nomogramme de la figure 125, l'équation

$$z'^4 + z'^3 + 4z'^2 + 2z' - 5 = 0.$$

Le trait mixte marqué sur cette figure et qui unit les points $p = 2$, $q = -5$ coupe la courbe $n = 4$ tout près de la verticale $z = 0,8$, mais un peu en avant. Nous aurons donc pour cette dernière équation

$$z' = 0,79.$$

Le trait pointillé (IV) de la figure 126 montre que la valeur correspondante de z est

$$z = 2,37,$$

comme d'ailleurs, dans ce cas particulier, on le vérifie immédiatement par le calcul.

Remarque. — L'artifice qui a permis de ramener la résolution de l'équation du quatrième degré à la lecture d'un nomogramme a consisté à transformer cette équation en une autre dans laquelle n'entrent que trois coefficients variables. On sait que le même but peut être atteint pour toutes les équations des sept premiers degrés moyennant l'emploi de transformations linéaires ou de transformations de Tschirnhausen, elles-mêmes susceptibles de se traduire en nomogrammes à points alignés. En particulier, toute équation du cinquième degré est susceptible d'être ainsi ramenée à l'un des trois types canoniques.

$$z^5 + nz^2 + pz + q = 0,$$
$$z^5 - z^3 + nz^2 + pz + q = 0,$$
$$z^5 - z^3 + nz^2 + pz + q = 0.$$

Cette remarque (¹) fait ressortir que la résolution de *toutes* les équations des sept premiers degrés peut être effectuée avec le seul secours de la méthode des points alignés.

106. *Combinaison des deux principes de l'alignement multiple et des points à deux cotes.* — La combinaison des principes exposés aux nos 100 et 101 fournit, en certains cas, un bon moyen de représenter certaines équations à multiples variables.

Exemple : Épaisseurs minima des pales d'hélice d'avion vers le moyeu (²). — Désignons par :

h cette épaisseur en centimètres (de 0 à 24),

(¹) Formulée pour la première fois dans la Note **O.34**.

(²) Emprunté à la brochure **O.60** (*voir* le renvoi du n° 99).

Un autre exemple important d'application de la même méthode à la détermination du chemin parcouru par un navire en cours de mouvement varié, lorsqu'on, fait passer la vitesse du propulseur d'une certaine grandeur de régime à une autre est indiqué dans la Note **O.54** et traité en détail dans la Note **O.55**. On en trouvera plus loin (n° 122) un autre exemple non moins important emprunté à la brochure **O.60**.

D la densité de la matière (de 0,1 à 1),
R sa tension en kilogrammes par centimètre carré (de 25 à 300),
V la vitesse périphérique en mètres par seconde (de 0 à 300),
P la poussée en kilogrammes (de 100 à 500),
ρ le rapport du diamètre de l'hélice à la largeur de la pale (de 4 à 20).

L'épaisseur cherchée est donnée par la formule

$$h = \sqrt{\frac{3}{2R}} \left(1 + \frac{3DV^2}{8R}\right) \sqrt{P\rho}.$$

Pour représenter cette formule, nous introduirons les variables auxiliaires ζ_1 et ζ_2 telles que

(1) $$\zeta_1 = \sqrt{\frac{3}{2R}} \left(1 + \frac{3DV^2}{8R}\right),$$

(2) $$\zeta_2 = \zeta_1 \sqrt{P},$$

(3) $$h = \zeta_2 \sqrt{\rho}.$$

Chacune de ces formules est représentable en points alignés. Pour (1), on prendra

$$u = -\mu V^2, \qquad v = \mu_1 \zeta_1;$$

pour (2), si l'on fait coïncider le nouvel axe des u avec l'axe des v précédent, de façon que cet axe commun constitue une charnière,

$$u = \mu_1 \zeta_1, \qquad v = -\mu_2 \zeta_2;$$

et pour (3), de même,

$$u = -\mu_2 \zeta_2, \qquad v = \mu_3 h.$$

Cela donne pour (1) le réseau (D, R)

$$3\sqrt{3}\mu_1 D u + 8\sqrt{2}\mu R^{\frac{2}{3}} v = 8\sqrt{3}\mu\mu_1 R$$

ou

$$x = \delta \frac{8\sqrt{2}\mu R^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{3}\mu_1 D}{8\sqrt{2}\mu R^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{3}\mu_1 D}, \qquad y = \frac{8\sqrt{3}\mu\mu_1 R}{8\sqrt{2}\mu R^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{3}\mu_1 D},$$

dans lequel les lignes (R), dont l'équation, provenant de l'élimination de D, est

$$\sqrt{3}\mu_2(x + \delta) = 1\sqrt{2}\delta\sqrt{Ry},$$

sont des droites issues de l'origine A de l'axe Au.

Pour (2), on a l'échelle (P) définie par

$$\mu_2 \sqrt{P} u + \mu_1 v = 0$$

ou, sur l'axe Ox,

$$x = \delta \frac{\mu_1 - \mu_2\sqrt{P}}{\mu_1 + \mu_2\sqrt{P}};$$

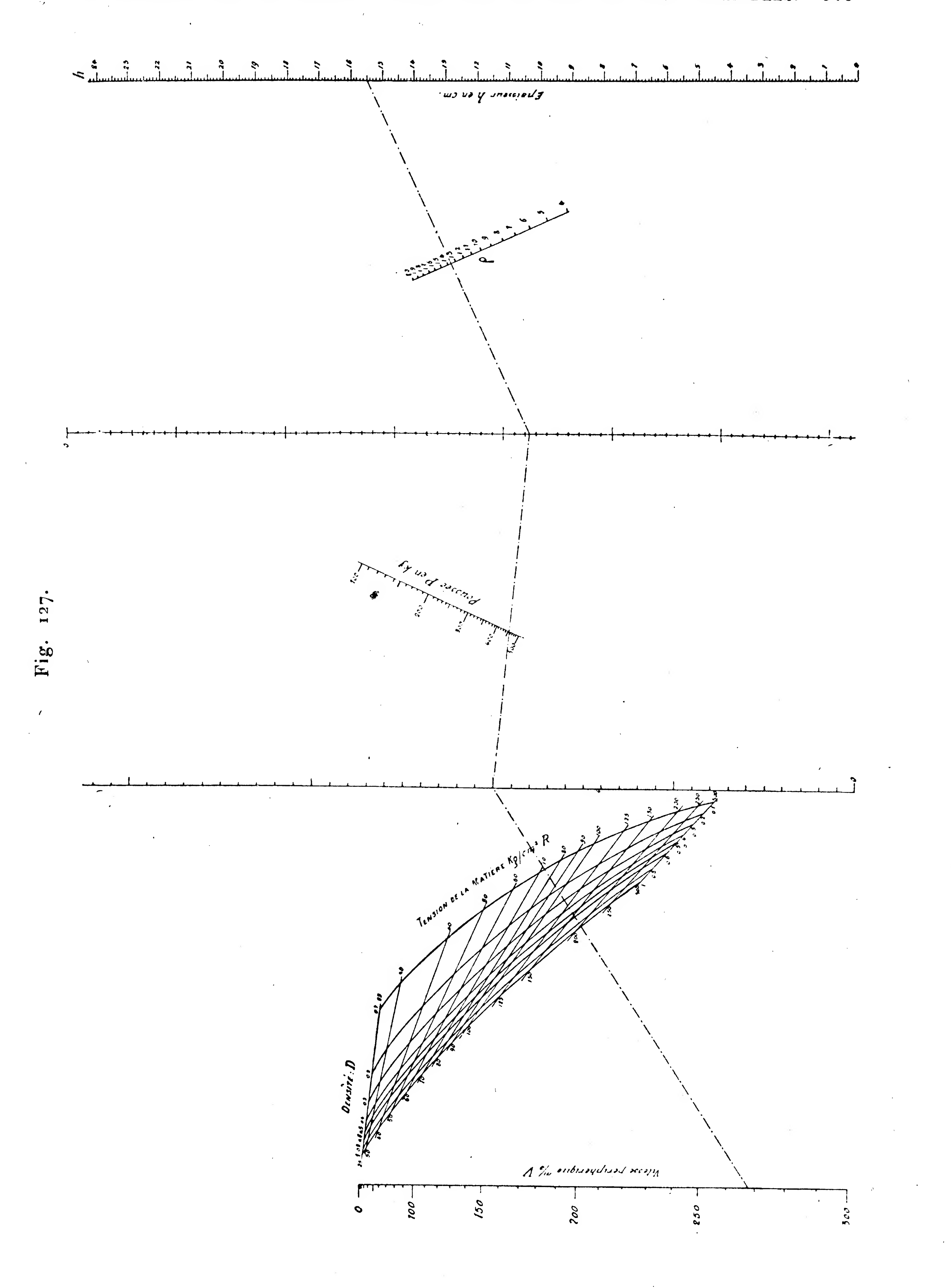


Fig. 127.

pour (3), l'échelle (ρ) définie par

$$\mu_3\sqrt{\rho}\,u + \mu_2 v = 0$$

ou, sur l'axe Ox,

$$x = \delta\frac{\mu_2 - \mu_3\sqrt{\rho}}{\mu_2 + \mu_3\sqrt{\rho}}.$$

Les échelles (P) et (ρ), l'une et l'autre projectives de celle de $\sqrt{z}$, se construisent facilement au moyen de celle-ci par le procédé connu (n° 7).

Le nomogramme correspondant, construit ([1]) avec des modules tels que

$$\mu_1 = 3500\,\mu, \qquad \mu_2 = \frac{\mu_1}{17}, \qquad \mu_3 = \frac{2\mu_2}{7},$$

est reproduit, en réduction, sur la figure 127.

Les positions de l'index marquées sur la figure correspondent à l'exemple

$$V = 268 \text{ m : sec}, \qquad D = 0{,}655, \qquad R = 167 \text{ kg : cm}^2,$$
$$P = 454^{\text{kg}}, \qquad \rho = 13{,}64,$$

pour lequel le nomogramme donne $h = 15^{\text{cm}},5$.

107. *Droites à doubles enveloppes.* — Alors que nous avons reconnu (n° **49**) l'impossibilité de faire figurer, sur un nomogramme, un système doublement infini de lignes, l'introduction de l'index mobile que comporte l'emploi de la méthode des points alignés a conduit le P. Poulain à une remarque ingénieuse ([2]) permettant d'engendrer au moyen d'une droite mobile un système doublement infini de lignes droites.

Pour l'exposé de ce principe, revenons aux équations du type (E) du n° **101**, savoir

$$f_1 g_{34} + f_2 h_{34} + f_{34} = 0.$$

Si nous posons ([3]), cette fois, en coordonnées cartésiennes,

(1) $$x = \mu_1 f_1, \qquad y = \mu_2 f_2,$$

([1]) A la Section technique de l'Aéronautique.

([2]) Qu'il nous a communiquée dans une Lettre en date du 16 octobre 1891.

([3]) On aperçoit immédiatement la généralisation suivante : si l'équation donnée était de la forme

$$f_{12} g_{34} + g_{12} h_{34} + f_{34} = 0,$$

on poserait encore

$$x = \mu_1 f_{12}, \qquad y = \mu_2 g_{12},$$

ce qui déterminerait le point à deux cotes (z_1, z_2) par un réseau dont les deux systèmes constituants seraient définis par l'élimination successive de z_2 et de z_1 entre les expressions de x et de y.

nous définissons un point à deux cotes, z_1 et z_2, qui doit se trouver sur la droite

$$x\mu_2 f_{34} + y\mu_1 g_{34} + \mu_1\mu_2 h_{34} = 0, \tag{2}$$

droite que nous pouvons appeler Δ et dont, pour plus de simplicité, nous représenterons l'équation ci-dessus par

$$\Delta_{34} = 0. \tag{2'}$$

Si l'on donne à z_3 une valeur constante, cette droite a une enveloppe $\mathcal{E}_3$, dont l'équation s'obtient par l'élimination de z_4 entre l'équation (2′) et sa dérivée prise par rapport à z_4 ou

$$\frac{\partial\Delta_{34}}{\partial z_4} = 0. \tag{3}$$

On peut ainsi construire les enveloppes $\mathcal{E}_3$ correspondant aux diverses valeurs de z_3.

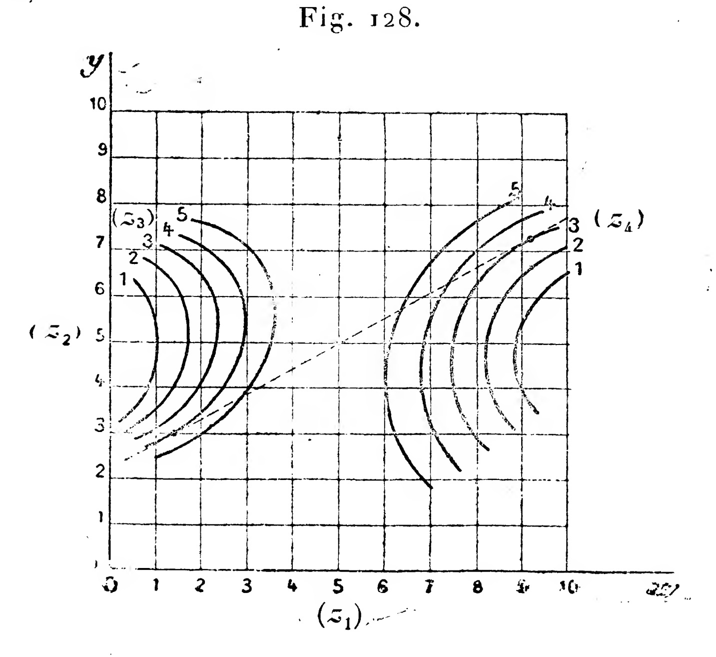
De même, l'élimination de z_3 entre l'équation (2′) et

$$\frac{\partial\Delta_{34}}{\partial z_3} = 0 \tag{4}$$

permettrait de construire les enveloppes $\mathcal{E}_4$ correspondant aux diverses valeurs de z_4.

On voit, dès lors, que l'équation (E) ci-dessus exprime simplement qu'*une tangente commune aux courbes $\mathcal{E}_3$ et $\mathcal{E}_4$ passe par le point* (z_1, z_2).

Fig. 128.



Le nomogramme comprendra (*fig.* 128) : 1° le réseau des parallèles aux axes, défini par les formules (1) et servant à déterminer les points

(z_1, z_2); 2° le système des enveloppes $\mathcal{E}_3$; 3° celui des enveloppes $\mathcal{E}_4$.

Si, par exemple, z_1, z_2, z_3 étant donnés, on veut avoir z_4, *on fait passer par le point* (z_1, z_2) *un index, posé sur le nomogramme, que l'on amène à être tangent à l'enveloppe* $\mathcal{E}_3$, *et on lit la cote de l'enveloppe* $\mathcal{E}_4$ *qui se trouve en contact avec cet index.*

Lorsque les enveloppes $\mathcal{E}_3$ et $\mathcal{E}_4$ se réduisent à des points, on retombe sur une variante de la méthode des points alignés.

Soit, par exemple, l'équation complète du troisième degré

$$z^3 + nz^2 + pz + q = 0.$$

Posons

$$x = \mu p, \qquad y = \mu q,$$

équations qui définissent un quadrillage métrique parallèle aux axes. Il vient ensuite

$$xz + y + \mu(z^3 + nz^2) = 0.$$

Lorsque, laissant n fixe, on fait varier z dans cette équation, on obtient une enveloppe $\mathcal{E}_n$ dont l'équation peut s'écrire immédiatement, puisque c'est la condition pour que l'équation ci-dessus ait une racine double en z.

La voici :

$$27\mu y^2 + 4x^3 + n(4n^2\mu^2 y - n\mu x^2 - 18\mu xy) = 0.$$

Cette équation définit des cubiques cuspidales (unicursales, de la troisième classe) passant par l'origine, où elles sont tangentes à Ox.

Quant aux enveloppes $\mathcal{E}_z$, obtenues en faisant varier n dans l'équation ci-dessus, z restant fixe, on voit, puisque, dans ces conditions, la droite correspondante reste parallèle à une direction fixe, qu'elles se réduisent à des points à l'infini.

Pour une direction donnée, la valeur de z est le coefficient angulaire de cette direction, changé de signe. On pourra donc définir ces diverses directions au moyen d'un transparent sur lequel seront marquées, en plus des axes $O'x'$ et $O'y'$, des droites issues de l'origine et cotées au moyen de leur coefficient angulaire changé de signe.

L'usage du nomogramme sera alors le suivant :

Les axes $O'x'$ *et* $O'y'$ *étant maintenus parallèlement à* Ox *et* Oy, *on place l'origine* O' *du transparent en coïncidence avec le point* (p, q) *du quadrillage. Les racines* z *de l'équation sont alors les cotes des droites du transparent qui se trouvent en contact avec la courbe cotée* n [1].

---

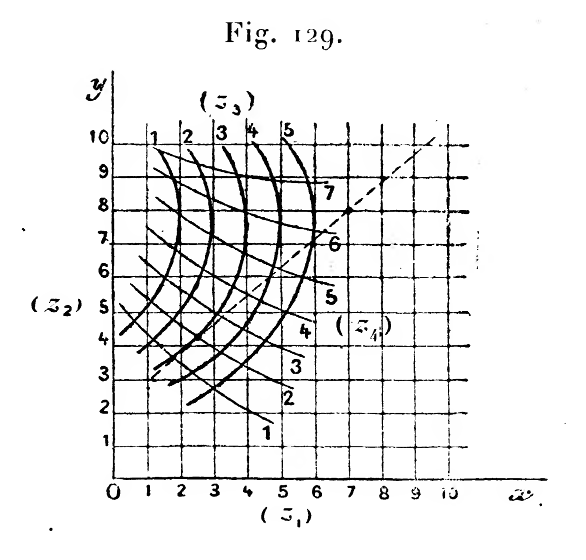
[1] Pour éviter l'usage du transparent, on pourrait appliquer une transformation homographique ramenant à distance finie la droite de l'infini du nomogramme ci-

108. *Trajectoires des contacts.* — Reprenant le type de nomogramme général du numéro précédent, considérons-y une des enveloppes $\mathcal{E}_4$ et menons les tangentes communes à cette courbe et à chacune des enveloppes $\mathcal{E}_3$. Le lieu des points de contact de ces tangentes et des courbes $\mathcal{E}_3$ sera une certaine courbe $\mathcal{C}_4$ qui pourra être dite *trajectoire des contacts* z_4 *pour le système* (z_3).

L'équation de cette trajectoire est bien aisée à obtenir; elle résulte simplement de l'élimination de z_3 entre les équations (2′) et (3) du numéro précédent. En effet, ces équations sont celles de deux droites passant par le point de contact de la droite (z_3, z_4) avec son enveloppe $\mathcal{E}_3$. Par suite, l'élimination de z_3 donne bien le lieu de ce point correspondant à une valeur fixe de z_4.

Cette trajectoire $\mathcal{C}_4$ étant tracée et cotée au moyen de la valeur correspondante de z_4 pourra, au point de vue de l'usage du

Fig. 129.



nomogramme, remplacer la courbe $\mathcal{E}_4$, qu'il n'y aura partant plus besoin de tracer. L'emploi du nomogramme sera alors le suivant (*fig.* 129) :

---

dessus, celle, par exemple, qui est définie par les formules

$$y = \frac{y'}{y' - a}, \qquad x = \frac{x'}{y' - a},$$

et qui fait correspondre à la droite de l'infini la droite $y' = a$. Aux différentes valeurs de z correspondraient alors des points cotés sur cette droite. Le réseau (p, q) serait constitué par des droites (p) issues du point $x' = 0$, $y' = a$, et des parallèles (q) à Ox, et l'on aurait les racines de l'équation en lisant les cotes des points où un index, passant par le point (p, q), viendrait couper la droite $y' = a$, lorsqu'il aurait été amené à être tangent à la courbe cotée (n).

Étant données z_1, z_2, z_3, on fait passer par le point (z_1, z_2) du quadrillage un index que l'on amène à être tangent à la courbe (z_3). La cote de la courbe (z_4) passant par le point de contact fait connaître la valeur de z_4 cherchée (¹).

Le principe de ce mode de représentation nous a été, sous forme de l'exemple particulier cité plus bas, communiqué par M. B. Paladini.

Suivant que les courbes $\mathcal{C}_4$ ou les courbes $\mathfrak{C}_4$ seront plus simples à construire, on aura recours aux unes ou aux autres. Par exemple, dans le cas de l'équation complète du troisième degré, envisagé à la fin du numéro précédent, les courbes $\mathcal{C}_z$ se réduisaient à de simples points, tandis que les courbes $\mathfrak{C}_z$ seraient assez compliquées. Voici, par contre, un exemple, celui même que nous devons à M. Paladini, où l'emploi des trajectoires $\mathfrak{C}$ comporte une réelle simplification. Il s'agit de l'équation

$$n \sin(\alpha + \omega) + m \sin\omega - \sin\alpha = 0, \tag{1}$$

rencontrée par M. Pesci dans un Mémoire sur la Cinématique navale cité plus haut (²), et qui sert à déterminer ω en fonction de m, n et α.

Si nous posons, en appelant μ un module quelconque,

$$x = \mu m, \qquad y = \mu n, \tag{2}$$

nous avons les droites à doubles enveloppes $\mathcal{C}_\alpha$ et $\mathcal{C}_\omega$, définies par l'équation

$$y \sin(\alpha + \omega) + x \sin\omega = \mu \sin\alpha. \tag{3}$$

La dérivée de cette équation, prise par rapport à ω, est

$$y \cos(\alpha + \omega) + x \cos\omega = 0. \tag{4}$$

Retranchant cette équation, multipliée par $\sin\omega$, de la précédente, multi-

(¹) Il convient de remarquer qu'un tel nomogramme, à l'encontre des précédents, ne se prête pas également bien au choix de l'une quelconque des variables comme inconnue. Si, par exemple, c'est z_3 que l'on cherche, il faut trouver la courbe z_3, dont la tangente, en son point de rencontre avec la courbe z_4, passe par le point (z_1, z_2), ce qui ne peut se faire que par tâtonnement. Il est vrai que, dans un grand nombre de cas de la pratique, c'est toujours la même variable qui est prise pour inconnue. Il suffit d'adopter celle-ci pour z_4.

(²) *Rivista marittima*, mars 1898.

M. Pesci a publié dans le même Recueil (décembre 1896, mars 1897, juillet 1897, octobre 1898) une série intéressante de Notes relatives, comme celle ici spécialement visée, à l'application de la méthode des points alignés à divers problèmes soulevés par l'art de la navigation.

pliée par $\cos\omega$, nous avons, après suppression du facteur commun $\sin\alpha$,

$$y - \mu\cos\omega = 0. \tag{5}$$

L'élimination de ω, par addition des carrés (3) et (4), donne

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha = \mu^2\sin^2\alpha. \tag{6}$$

Telle est l'équation des enveloppes $\mathcal{C}_\alpha$, qui sont des coniques faciles à construire, comme on le verra plus bas.

On trouverait de même pour les enveloppes $\mathcal{C}_\omega$ un autre système de coniques. Mais l'élimination de α entre (3) et (4), qui se trouve effectuée dans (5), fait connaître les trajectoires $\mathfrak{T}_\omega$, et l'on voit, d'après (5), que ce sont des droites parallèles à Ox. Il sera donc plus simple ici de recourir à ces trajectoires plutôt qu'aux enveloppes $\mathcal{C}_\omega$.

Pour construire les ellipses $\mathcal{C}_\alpha$, il suffit de remarquer que, si l'on prend pour axes de coordonnées les bissectrices Ox_1 et Oy_1 des angles des axes primitifs, l'équation (6) devient

$$\frac{x_1^2}{2\mu^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{y_1^2}{2\mu^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 1.$$

Autrement dit, si, sur le cercle de centre O et de rayon $\mu\sqrt{2}$, on prend le point A tel que $\widehat{y_1 OA} = \frac{\alpha}{2}$, les demi-axes de l'ellipse $\mathcal{C}_\alpha$ sont les projections de OA sur Ox_1 et Oy_1.

Quant aux droites $\mathfrak{T}_\omega$, on peut les prendre superposées aux droites cotées n, la cote ω de chacune d'elles étant donnée par celle du point où elle rencontre le cercle de rayon μ $\left(\text{qui n'est autre que } \mathcal{C}_{\frac{\pi}{2}}\right)$ gradué comme un rapporteur à partir de Ox.

En pratique, m et n varient de 0,1 en 0,1 entre 0 et 2, α entre 0° et 180°, et ω entre 0° et 360°.

109. *Nomogrammes à points coplanaires.* — Bien que cela s'écarte un peu de notre sujet, qui vise la représentation *plane* des équations, c'est ici le lieu de faire connaître une curieuse extension à l'espace du principe des points alignés, sous forme de points coplanaires, dont M. A. Adler [1] d'une part, M. R. Mehmke [2] de l'autre, ont eu séparément l'idée.

Si nous reprenons les exemples donnés dans les n[os] 104 et 105, nous voyons que des équations de la forme

$$f(z) + n\,g(z) + p\,h(z) + q\,k(z) = 0 \tag{1}$$

---

[1] *Wiener Berichte*, t. XCIV, 2e section, p. 404.

[2] *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XLIII, p. 338.

ont été représentées par l'alignement des points à une cote

$$(p) \qquad u = \mu_1 p,$$
$$(q) \qquad v = \mu_2 q$$

et du point à deux cotes

$$(n, z) \qquad u\mu_2 h(z) + v\mu_2 k(z) + \mu_1\mu_2[f(z) + n\,g(z)] = 0.$$

Si nous prenons maintenant un système de *coordonnées parallèles dans l'espace* (1), nous voyons que l'équation (1) exprime que le plan dont les coordonnées sont

$$(n)' \qquad u = \mu_1 n,$$
$$(p)' \qquad v = \mu_2 p,$$
$$(q)' \qquad w = \mu_3 q,$$

passe par le point M dont l'équation est

$$(z)'' \qquad u\mu_2\mu_3 g(z) + v\mu_3\mu_1 h(z) + w\mu_1\mu_2 k(z) + \mu_1\mu_2\mu_3 f(z) = 0.$$

Ce point a pour projection, parallèlement aux axes Au, Bv, Cw, sur le plan ABC des origines, le point m, barycentre des points A, B, C respectivement affectés des coefficients $\mu_2\mu_3 g(z)$, $\mu_3\mu_1 h(z)$, $\mu_1\mu_2 k(z)$, et sa distance mM à cette projection, comptée parallèlement aux axes, est

$$m\mathrm{M} = \frac{-\mu_1\mu_2\mu_3 f(z)}{\mu_2\mu_3 g(z) + \mu_3\mu_1 h(z) + \mu_1\mu_2 k(z)}.$$

Lorsqu'on fait varier z, le point m décrit sur le plan ABC une certaine courbe γ et le point M engendre, sur le cylindre qui passe par cette courbe γ et a ses génératrices parallèles aux axes, une courbe Γ sur laquelle on peut marquer un certain nombre de ses positions en inscrivant à côté les valeurs de z correspondantes. On obtient ainsi le système des points cotés (z) de l'espace, distribués sur une certaine courbe gauche Γ.

Dès lors, *pour avoir les valeurs de z correspondant à des valeurs données de n, p, q, il suffit de couper la courbe* Γ *par le plan déterminé par les points cotés n, p, q respectivement sur les axes* Au, Bv, Cw, *et de lire les cotes des points ainsi obtenus sur* Γ.

Pour réaliser le plan (n, p, q) dans l'espace, on peut tendre un fil entre les points n et q de Au et de Cw, et amener un œilleton o, fixé à un curseur c mobile le long de Bv, en coïncidence avec le point p. En regardant alors par cet œilleton, on lit les valeurs de z aux points où le fil semble couper la courbe Γ.

---

(1) Voir au sujet de ces coordonnées notre *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, t. I, p. 25.

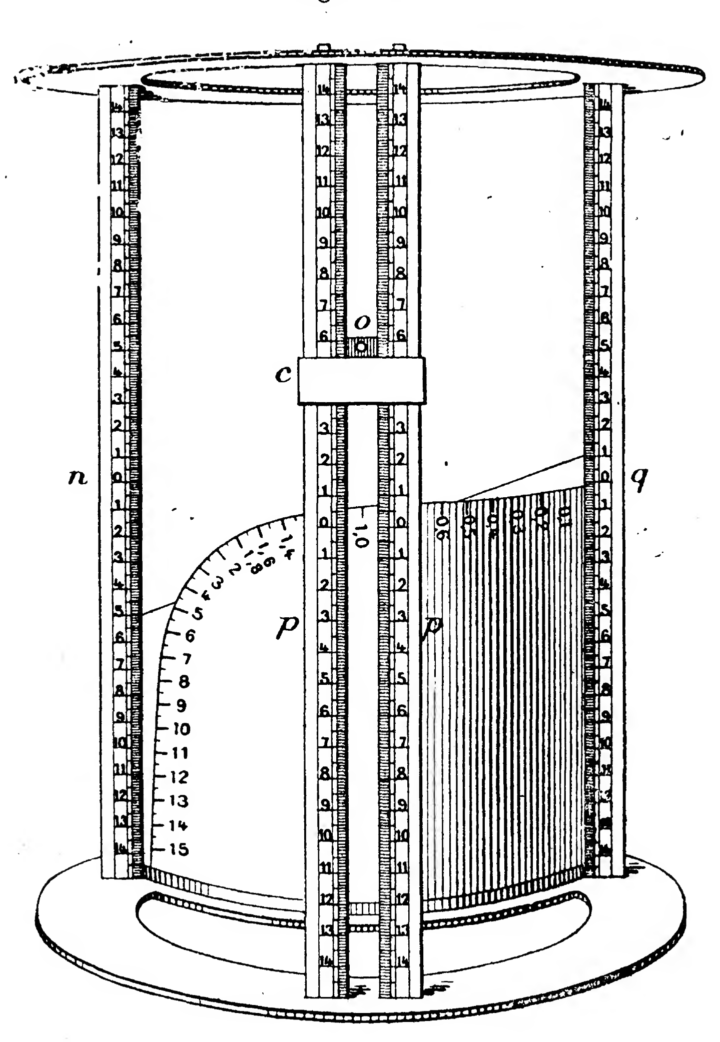
La figure 130 représente l'instrument construit, d'après ce principe, par M. Mehmke pour la résolution de l'équation complète du troisième degré

$$z^3 + n z^2 + p z + q = 0.$$

Si l'on suppose l'équation pourvue d'un terme de plus

$$f(z) + m\, g(z) + n\, h(z) + p\, k(z) + q\, l(z) = 0,$$

Fig. 130.



on peut, pour chaque valeur de m, traiter l'équation comme il vient d'être dit. A chaque valeur de m correspond ainsi une courbe Γ qui peut être cotée au moyen de cette valeur de m. Les diverses courbes gauches Γ ainsi obtenues et qui constituent le système (m) sont, d'ailleurs, toutes situées sur un même cylindre, attendu que la courbe γ, projection de Γ sur ABC, ne dépendant que des trois derniers termes de l'équation, est la même quel que soit m. On pourra donc les tracer toutes sur ce cylindre en marquant également les génératrices de ce cylindre correspondant aux diverses valeurs de z. Pourvu alors que le cylindre soit constitué par une matière transparente, comme le celluloïd, à travers laquelle on pourra, de l'œilleton, voir le fil tendu, on aura le moyen d'obtenir les valeurs de z correspondant à des valeurs données de m, n, p, q. Un tel nomogramme pourrait être construit pour l'équation complète du quatrième degré.

III. — Applications diverses de la méthode des points alignés [1].

A. — Calcul des profils de remblai et de déblai [2].

110. *Rappel des formules. Distinction des cas.* — Représentons par :

z la cote du sol naturel, prise avec son signe, par rapport à la plate-forme (remblai, signe $-$; déblai, signe $+$);
θ la déclivité transversale (tangente de l'angle sur l'horizon) du sol naturel, prise avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que, à partir de l'axe, dans le demi-profil considéré, le sol est en rampe ou en pente;
b la demi-largeur de la plate-forme;
b' cette demi-largeur augmentée de la largeur du fossé;
t le talus des remblais, pris en valeur absolue;
t' le talus des déblais, également en valeur absolue;
F l'aire de la section du fossé;
φ son périmètre (somme de la largeur au plafond et de la longueur des deux talus);
R l'aire du remblai;
D l'aire du déblai;
e la largeur d'emprise;
l la longueur du talus.

Posons, en outre,

$$bt = a, \qquad b't' = a', \qquad \frac{b^2 t}{2} = c, \qquad \frac{b'^2 t'}{2} - \mathrm{F} = c',$$
$$\sqrt{1+t^2} = \tau, \qquad \sqrt{1+t'^2} = \tau', \qquad b\tau = \beta, \qquad b'\tau' - \varphi = \beta',$$

et considérons les quantités ε, λ, σ, ε', λ', σ', γ définies par les

[1] Telle est l'importance prise aujourd'hui dans la pratique par cette méthode qu'il a paru utile d'en développer à part plusieurs applications d'une certaine ampleur, indépendamment de celles déjà choisies pour exemples au cours de l'exposé théorique de la méthode.

[2] Résumé du Mémoire **O.19** où sont donnés de plus grands détails sur les très nombreuses variantes antérieurement proposées par divers auteurs de la solution entièrement générale ici envisagée.

formules

(1) $\varepsilon = \frac{a - z}{t + \theta}$, (1′) $\varepsilon' = \frac{a' + z}{t' - \theta}$,

(2) $\frac{\lambda + \beta}{\tau} = \frac{a - z}{t + \theta}$, (2′) $\frac{\lambda' + \beta'}{\tau'} = \frac{a' + z}{t' - \theta}$,

(3) $\sigma + c = \frac{(a - z)^2}{2(t + \theta)}$, (3′) $\sigma' + c' = \frac{(a' + z)^2}{2(t' - \theta)}$,

(4) $\gamma = \frac{z^2}{2\,|\theta|}$,

$|\theta|$ désignant la valeur absolue de θ.

Remarquons d'ailleurs que les formules (1) et (3) d'une part, (1′) et (3′) de l'autre, nous donnent encore

(3 *bis*) $\sigma + c = \frac{\varepsilon(a - z)}{2}$,

(3′ *bis*) $\sigma' + c' = \frac{\varepsilon'(a' + z)}{2}$.

Tous les cas à considérer sont alors au nombre de quatre, pour lesquels les demi-profils ont été représentés sur la figure 131 ([1]), et les

Fig. 131.

résultats relatifs à ces quatre cas peuvent se résumer dans le tableau

([1]) Les cas V et VI envisagés dans le Mémoire **O.19**, conformément à un usage ancien, n'ont, en réalité, aucun intérêt pratique.

ci-dessous (¹), où les résultats sont exprimés en fonction des quantités calculées au moyen des formules précédentes :

I. Demi-profil simple en remblai ($z < 0$, $z + b\theta < 0$),

$$e = \varepsilon, \qquad l = \lambda, \qquad R = \sigma, \qquad D = 0;$$

II. Demi-profil mixte en remblai ($z > 0$, $z + b\theta < 0$),

$$e = \varepsilon, \qquad l = \lambda, \qquad R = \sigma + \gamma, \qquad D = \gamma;$$

III. Demi-profil simple en déblai ($z > 0$, $z + b\theta > 0$),

$$e = \varepsilon', \qquad l = \lambda', \qquad R = 0, \qquad D = \sigma';$$

IV. Demi-profil mixte en déblai ($z < 0$, $z + b\theta > 0$),

$$e = \varepsilon', \qquad l = \lambda', \qquad R = \gamma, \qquad D = \sigma' + \gamma.$$

111. *Solution générale par lignes concourantes. Variantes diverses.* — Laissant à part la formule (4) dite du *terme complémentaire*, facile à représenter, nous envisagerons les deux groupes de formules (1), (2), (3) dites du *remblai*, (1'), (2'), (3'), dites du *déblai*. Remarquons d'abord que dans chacun de ces groupes les formules à représenter se réduisent à deux : (1) et (3), ou (1') et (3'), puisque le rapprochement de (1) et (2), ou de (1') et (2'), donne

$$\lambda = \varepsilon\tau - \beta, \qquad \lambda' = \varepsilon'\tau' - \beta',$$

qui montrent que, sur le nomogramme donnant ε ou ε', il suffit d'accoler à l'échelle (ε) ou (ε') une échelle (λ) ou (λ'), puisque τ, β, τ', β' sont des constantes.

Occupons-nous du groupe formé par (1) et (3), par exemple. Ce qui va en être dit pourrait être répété sans modification pour le groupe de (1') et (3').

Le problème nomographique qui se pose est de réaliser une représentation commune de ces formules (1) et (3), associant les systèmes cotés (ε) et (σ) autant que possible aux mêmes systèmes (z) et (θ), ces quatre systèmes étant amenés à la plus grande simplicité possible.

(¹) Nous renvoyons, pour les démonstrations, à nos *Leçons sur la Topométrie* (n° 81).

Voyons tout d'abord comment ce problème se résoudrait par la méthode des lignes concourantes. Pour représenter la formule (1) par le concours de droites appartenant respectivement à trois systèmes, de la façon la plus générale, on poserait

$$a - z = \frac{U}{V}, \qquad t + \theta = \frac{U}{W}, \qquad \varepsilon = \frac{W}{V},$$

U, V, W étant trois polynomes du premier degré en x et y quelconques, mais toutefois linéairement indépendants. Dans ces conditions, conservant pour (z) et (θ) les mêmes systèmes, on aurait pour (σ) le système

$$2(\sigma + c) = \frac{UW}{V^2},$$

composé de coniques. Pour que le nomogramme donnant (σ) ne fût, lui aussi, composé que de droites, on devrait donc ne garder qu'un seul des systèmes (z) ou (θ) précédents et recourir pour le second à un système différent, prendre, par exemple,

$$a - z = \frac{U}{V}, \qquad \sqrt{t + \theta} = \frac{U}{T},$$

ce qui donnerait pour le système (σ)

$$\sqrt{2(\sigma + c)} = \frac{T}{V}.$$

La plus ancienne solution rentrant dans le premier type est celle de Davaine ([1]), que l'on obtient en prenant

$$U = x, \qquad V = 1, \qquad W = y,$$

ce qui donne les systèmes

(z) $$a - z = x,$$

(θ) $$t + \theta = \frac{x}{y},$$

(ε) $$\varepsilon = y,$$

(σ) $$\sigma + c = \frac{xy}{2}.$$

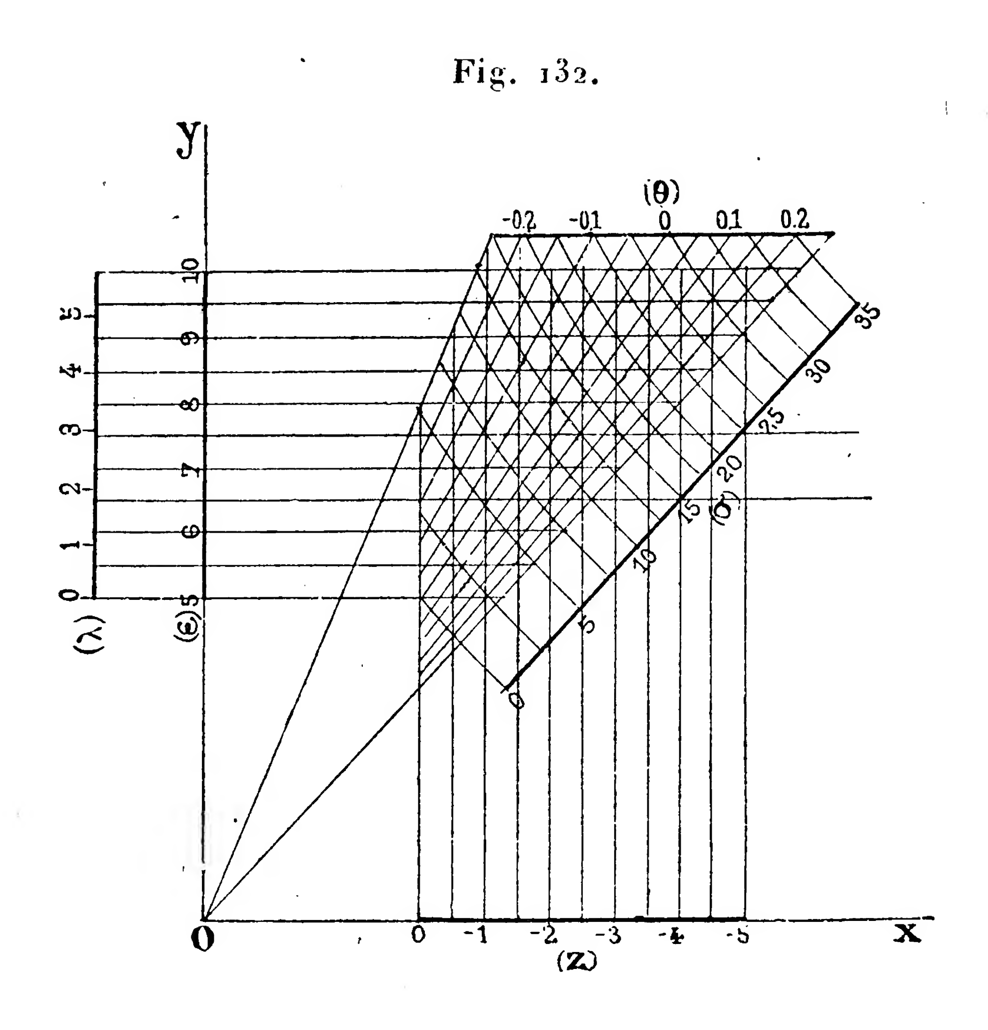
Le nomogramme correspondant, sur lequel, ainsi qu'il a été dit ci-

---

([1]) *Mémoires de la Société des Sciences de Lille.* 1845.

dessus, l'échelle (ε) se double d'une échelle (λ), est représenté schématiquement par la figure 132.

Fig. 132.



Les autres solutions connues, reposant sur l'emploi de droites concourantes, rentrent toutes dans le second type de solution susmentionné moyennant certaines particularisations des fonctions linéaires **U, V, W, T** ([1]).

C'est grâce à l'emploi de son anamorphose logarithmique (n° **26**) que Lalanne a pu transformer la table graphique de Davaine en une autre où les systèmes (ε) et (σ) sont associés aux mêmes systèmes (z) et (θ), mais ces quatre systèmes étant cette fois tous rectilignes. Il lui a suffi pour cela, ayant mis les formules (1) et (3) sous la forme

$$\text{(1 bis)} \qquad \log \varepsilon = \log(a - z) - \log(t + \theta),$$

$$\text{(3 bis)} \qquad \log(\sigma + c) + \log 2 = 2\log(a - z) - \log(t + \theta),$$

de poser

$$(z) \qquad x + y = 2\log(a - z),$$

$$(\theta) \qquad y = \log(t + \theta)$$

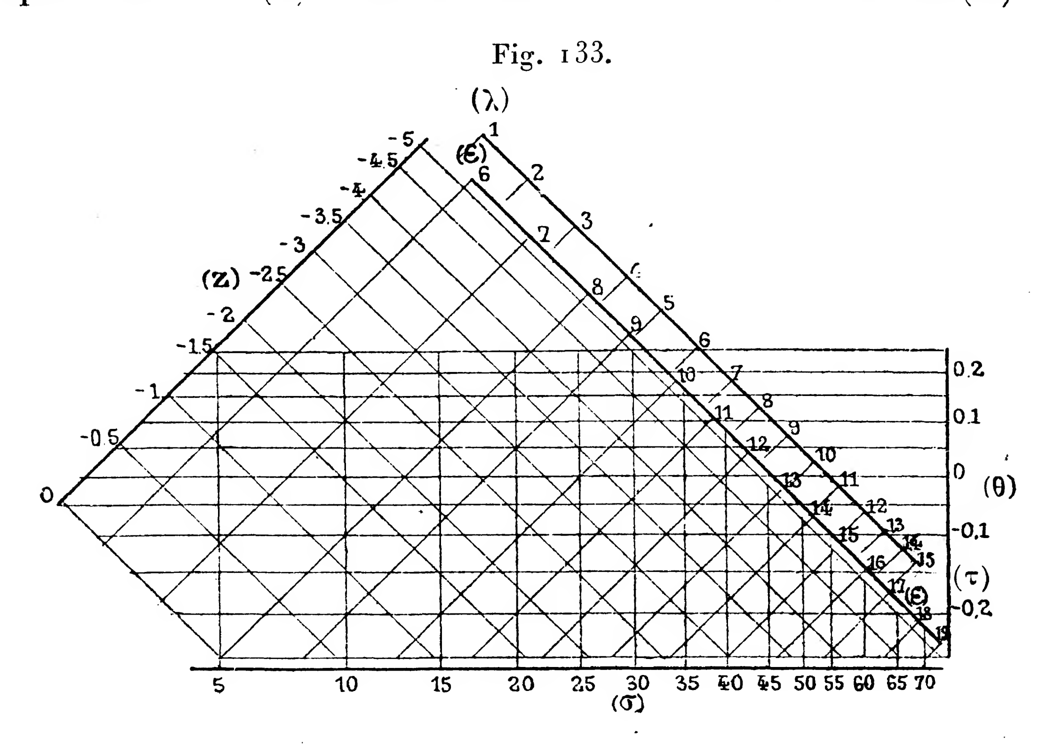
([1]) Nous renvoyons ici, pour le détail, au Mémoire **O.19**

pour obtenir

$$(\varepsilon) \qquad x - y = 2\log\varepsilon,$$
$$(\sigma) \qquad x = \log(\sigma + c) + \log 2,$$

d'où le nomogramme représenté schématiquement par la figure 133, sur lequel l'échelle (ε) a encore été doublée d'une échelle (λ).

Fig. 133.



La construction de ce nomogramme se trouve grandement simplifiée par rapport à celle du graphique de Davaine du fait qu'il ne comporte que des droites, alors que, sur le premier, figuraient des hyperboles équilatères; mais le mode d'emploi en reste le même : *on prend le point de rencontre des lignes cotées* (z) *et* (θ) *et on lit les cotes des lignes* (ε) *et* (σ) *passant par ce point de rencontre.*

Un tel nomogramme étant construit pour le groupe du déblai comme pour celui du remblai, et complété par celui du terme complémentaire, qui peut se construire de la même façon quand la formule (4) (n° 110) de ce terme a été mise sous la forme

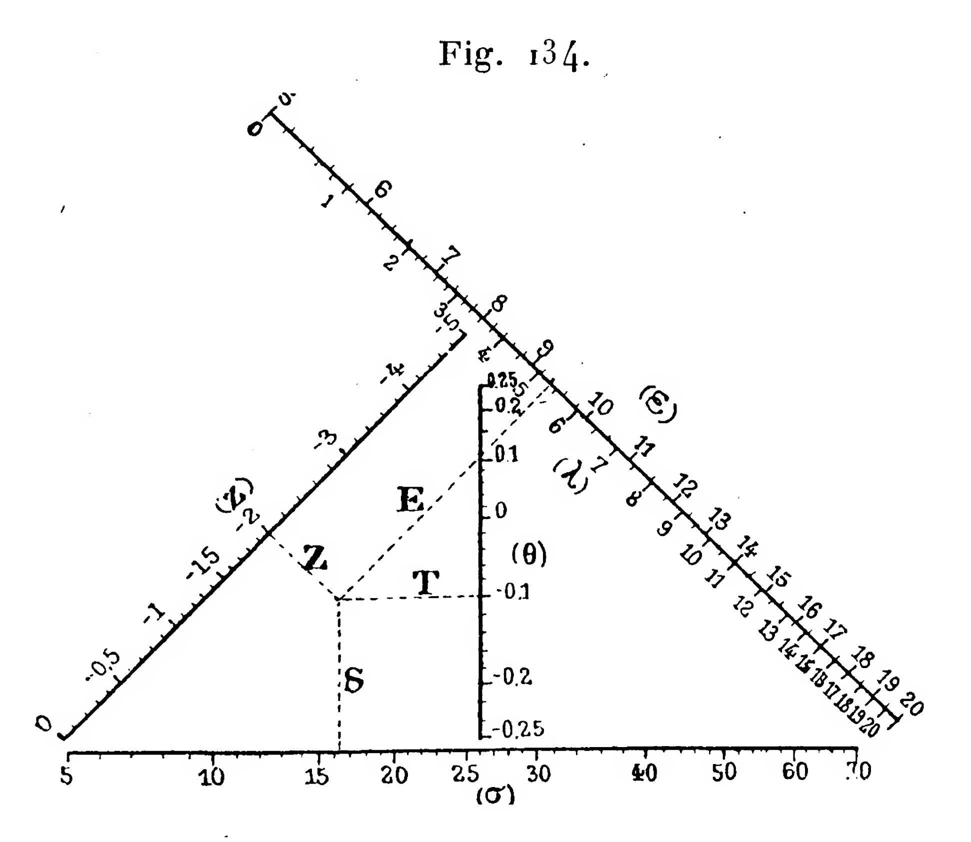
$$\log\gamma + \log 2 = 2\log z - \log|\theta|,$$

on voit que, pour des valeurs données de z et θ, le nomogramme du groupe de même nom (remblai ou déblai) que le demi-profil considéré fait, dans tous les cas, connaître la largeur d'emprise et la longueur de talus; il fournit également, à lui seul, l'aire lorsque le demi-profil est simple; si le demi-profil est mixte, il y faut, pour l'aire,

ajouter la lecture faite sur le nomogramme du terme complémentaire.

Il va sans dire que les inconvénients inhérents à la méthode des lignes concourantes, signalés au n° 29, sont, dans ce cas, particulièrement sensibles, en raison de l'entre-croisement, sur le tableau, de quatre systèmes de droites. Il est vrai que ces droites étant parallèles dans chaque système, on peut user ici du procédé du transparent à index concourants (à quatre index au lieu de trois) (n° 30) ([1]), ce qui donne le type de nomogramme représenté par la figure 134. On peut même ne se servir que d'un transparent à trois index si l'on a recours au principe des abaques hexagonaux; mais, dans ce cas, on doit user, pour le calcul de ε et celui de σ, de deux échelles (z) distinctes, puisque l'invariabilité du module sur les échelles d'un tel abaque

Fig. 134.



oblige à avoir des échelles différentes pour $\log(a - z)$ et $2\log(a - z)$. On obtient, dans ce cas, le dispositif représenté schématiquement sur la figure 135. Mais c'est incontestablement la méthode des points alignés qui fournit, ici encore, la solution la plus pratique ([2]).

112. *Solution par les points alignés.* — Occupons-nous d'abord

([1]) Un tel artifice a été appliqué aux abaques mêmes de Lalanne par M. Blum (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1er sem. 1881, p. 455).

([2]) On trouvera par la suite (nos 129, 134, 142) l'indication de quelques autres procédés nomographiques de calcul des profils de terrassements.

des formules du groupe du remblai, mises sous la forme

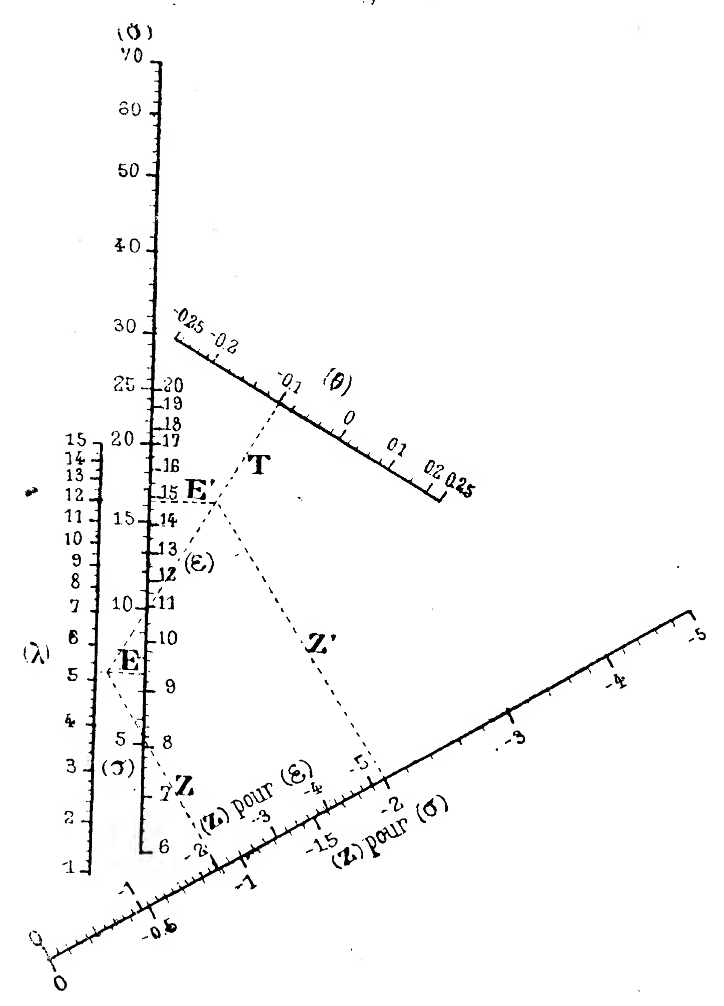
$$(1) \qquad \log \varepsilon = \log(a - z) - \log(t + \theta),$$

$$(2) \qquad \lambda = \tau\varepsilon - \beta,$$

$$(3) \qquad \log(\sigma + c) + \log 2 = 2\log(a - z) - \log(t + \theta).$$

Nous poserons ici, en supposant les graduations logarithmiques

Fig. 135.



portées sur Au et Bv avec un même étalon dont le module est pris pour unité de longueur,

$$(z) \qquad u = \log(a - z),$$

$$(\theta) \qquad v = -\log(t + \theta),$$

ce qui, porté dans (1) et (3), donne

$$(\varepsilon) \qquad u + v = \log \varepsilon,$$

$$(\sigma) \qquad 2u + v = \log(\sigma + c) + \log 2.$$

L'équation (ε) définit une échelle logarithmique, portée avec un

module réduit à la moitié du premier sur la parallèle équidistante de Au et Bv, l'équation (σ), une échelle logarithmique portée avec un module réduit au tiers du premier [1] sur la parallèle aux axes divisant l'intervalle de Au à Bv dans le rapport de 1 à 2.

Pour la mise en place des échelles, une fois construites les échelles (ε) et (θ) entre les limites voulues par l'application que l'on a en vue, il suffit d'obtenir un point, sur chacun de leurs supports, des échelles (ε) et (σ). Or, si l'on se reporte aux formules (1) et (3) du n° **110**, on voit que, pour $z = 0$ et $\theta = 0$, on a $\varepsilon = b$ et $\sigma = 0$. Les points cotés au moyen de ces deux valeurs fixeront la position des échelles de $\log z$ et de $\log(\sigma + c)$, portées avec les modules $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ sur leurs supports respectifs.

Une fois l'échelle (ε) construite, on lui accole (de l'autre côté du même support) l'échelle (λ) en se servant de la relation (2) qui lie les valeurs correspondantes de ε et λ.

Tout ce qui vient d'être dit pour le groupe du remblai peut être répété pour celui du déblai, à cette seule différence près que, pour $z = 0$ et $\theta = 0$, on a ici $\varepsilon = b'$ et $\sigma = F$.

Quant à la formule du terme complémentaire mise sous la forme

$$(4) \qquad \log\gamma + \log 2 = 2\log z - \log|\theta|,$$

on la représente de même en portant sur deux axes parallèles, avec les modules 2 et 1, les échelles de $\log z$ et de $-\log(\theta)$, et sur la parallèle équidistante de ces deux axes, l'échelle de $\log\gamma$ avec le module $\frac{1}{2}$.

C'est ainsi qu'avec les données

$$b = 5^{m}, \qquad b' = 6^{m},50, \qquad t = \frac{2}{3}, \qquad t' = 1, \qquad F = 0^{m},5, \qquad \varphi = 1^{m^2},91,$$

ont été construits les trois nomogrammes réunis sur la figure 136.

Il était intéressant d'obtenir, sur les nomogrammes eux-mêmes, la

---

(1) C'est principalement en vue de cette application que la maison Tavernier-Gravet a, sur nos indications, gravé, sur une même règle de buis, des étalons logarithmiques dont les modules sont proportionnels à 1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. La même règle porte aussi un étalon de module proportionnel à 2, en vue de la construction du nomogramme du terme complémentaire indiquée un peu plus bas.

figuration des conditions limites définissant les cas où l'on doit recourir à l'un ou à l'autre d'entre eux, afin d'éviter toute hésitation dans leur emploi lorsqu'on se trouve dans un cas mixte (car, pour les cas simples, une telle hésitation ne saurait se produire).

Pour la distinction du cas simple et du cas mixte dans chaque groupe, aucune difficulté. Si l'on se reporte, en effet, au n° **110**, on voit que cette distinction tient seulement au signe de z. Donc, selon que l'index coupe l'échelle (z) d'un côté ou de l'autre de son point coté o, on a affaire au cas simple ou au cas mixte, le cas mixte étant caractérisé par le z positif pour le groupe du remblai, le z négatif pour celui du déblai.

Quant à la distinction entre les deux groupes, elle tient au signe de $z+b\theta$. Voyons comment sont déterminées les positions de l'index pour lesquelles

$$z+b\theta=0,$$

et d'abord le cas du remblai.

Les distances des points cotés z et θ aux points cotés o sur leurs axes respectifs sont données par

$$u_0=\log(a-z)-\log a=\log\left(1-\frac{z}{a}\right)=\log\left(1-\frac{z}{bt}\right),$$

$$v_0=-\log(t+\theta)+\log t=-\log\left(1+\frac{\theta}{t}\right).$$

Lorsque $z=-b\theta$, on voit que

$$u_0=-v_0.$$

Par suite, les positions limites de l'index passent toutes par le milieu de la droite joignant le point $z=0$ au point $t=0$, c'est-à-dire par le point $\varepsilon=b$ (ce que l'on pouvait prévoir *a priori*). On sera bien dans le cas du remblai si l'index passe au-dessus du point $\varepsilon=b$; sinon, on doit se reporter au nomogramme du déblai.

Dans le cas du déblai, on a de même

$$u_0=\log\left(1+\frac{z}{a'}\right)=\log\left(1+\frac{z}{b't'}\right),$$

$$v_3=-\log\left(1-\frac{\theta}{t'}\right).$$

Pour les positions limites de l'index, correspondant à $z+b\theta=0$,

on a donc

$$\frac{u_0}{v_0} = -\frac{\log\left(1 - \frac{b\theta}{b't'}\right)}{\log\left(1 - \frac{\theta}{t'}\right)},$$

ou si, ce qui est pratiquement le cas, la quantité $\frac{\theta}{t'}$ est assez petite pour que son carré soit négligeable,

$$\frac{u_0}{v_0} = -\frac{\frac{b\theta}{b't'}}{\frac{\theta}{t'}} = -\frac{b}{b'}.$$

Donc les positions limites passent ici très sensiblement par le point divisant la distance du point $z = 0$ au point $\theta = 0$ dans le rapport de b à b'.

Ces deux points limites étant marqués sur les nomogrammes correspondants, si l'on tire au-dessous de chacun d'eux une parallèle aux axes, dite *barre d'arrêt*, et si l'on joint chacun d'eux au point $z = 0$ correspondant, par une ligne, en traits interrompus, dite du *terme complémentaire,* on voit que les conditions limitatives exprimées par les inégalités du n° **110** reviennent à dire que :

1° *On doit se servir du nomogramme de groupe, sur lequel la position de l'index répondant aux données ne rencontre pas la barre d'arrêt;*

2° *Si cette position de l'index rencontre la ligne du terme complémentaire, c'est que l'on est dans un cas mixte et que ce terme complémentaire doit intervenir.*

L'ensemble des nomogrammes ainsi constitués est représenté sur la figure 136.

B. — Résolution générale des triangles sphériques [1].

113. *Cas à considérer.* — Si l'on désigne, dans un triangle sphérique, les côtés par a, b, c et les angles opposés par A, B, C, ces six éléments étant exprimés en fractions (degrés ou grades) de la cir-

---

[1] Extrait de **O.59**.

conférence, les problèmes concernant la résolution des triangles sphériques, tels qu'ils se présentent en Astronomie, Géodésie et Navigation, sont ordinairement renfermés dans l'énoncé général que voici :

Étant donnés trois des six éléments a, b, c, A, B, C, *trouver un seul des autres, nettement spécifié.*

Il convient de noter que, contrairement à ce qui se rencontre dans les traités classiques, cet énoncé comporte la recherche d'*un seul* des éléments inconnus, et non des trois.

Cette distinction est essentielle au point de vue de la solution par les méthodes nomographiques. Ainsi qu'on le verra par la suite, l'énoncé ci-dessus exige que l'on dispose de trois nomogrammes distincts, tandis que, si l'on doit déterminer non pas un seul des éléments inconnus, mais les trois, dans un ordre, au reste, non imposé d'avance, un seul nomogramme suffit.

S'il ne s'agit d'obtenir qu'un seul des éléments inconnus, comme cela a lieu dans maintes applications à l'Astronomie, il convient de considérer la disposition du système de quatre éléments, constitué par les trois éléments donnés et celui qui est inconnu.

Cette disposition peut être l'une des trois suivantes :

1° Deux couples d'éléments contigus séparés l'un de l'autre par deux éléments non intervenants, tels que A, b et B, a. Une semblable disposition sera désignée par le symbole (**2, 2**).

2° Trois éléments contigus et le quatrième isolé de ce groupe, par conséquent opposé à celui des éléments qui se trouve au milieu du groupe, par exemple b, A, c et a. Une telle disposition sera désignée par le symbole (**3, 1**).

3° Quatre éléments contigus comme C, a, B, c. Une telle disposition sera désignée par le symbole (**4**).

A ces trois dispositions correspondent respectivement les formules

$$\sin A \sin b = \sin a \sin B, \tag{1}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \tag{2}$$

$$\cos a \cos C = \sin a \cot c - \sin B \cot C, \tag{3}$$

dans chacune desquelles l'un quelconque des quatre éléments peut être pris comme inconnue. Dans le cas (**3, 1**), si l'élément isolé est

un angle, au lieu d'un côté comme cela a lieu pour la formule (2), il est nécessaire d'appliquer la formule au triangle supplémentaire en remplaçant a, b, c, A par $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, $\pi - a$.

Il est aisé de voir que, si l'on se donne trois quelconques des six éléments d'un triangle, on peut toujours leur associer l'un des trois autres, de façon à obtenir une disposition (**3, 1**). Une fois ce premier élément déterminé par l'application de la formule (2), on peut encore constituer une disposition (**3, 1**) pour chacun des deux éléments restants en l'associant convenablement à trois autres pris parmi ceux qui sont déjà connus. Il en résulte qu'*au moyen de la seule formule* (2) *on peut obtenir la résolution* COMPLÈTE *du triangle* [1].

Mais si, en vue de certaines applications à l'Astronomie, on ne se propose de déterminer *directement qu'un seul* des trois éléments inconnus, sans avoir à passer par l'intermédiaire d'aucun des autres, on doit n'avoir recours qu'à la formule particulière qui correspond à la disposition constituée par les trois éléments donnés et l'élément inconnu. Donc, la résolution nomographique directe, dans tous les cas possibles, exige trois nomogrammes correspondant aux trois formules fondamentales ci-dessus données.

Avant de passer à la construction de ces trois nomogrammes, il convient de faire une remarque spéciale relative aux formules applicables au triangle rectangle. Supposons que deux des éléments (autres que l'angle droit) d'un tel triangle soient donnés. Pour en déduire un troisième, et un seul, nous n'avons qu'à considérer la disposition formée par ces trois éléments et l'angle droit, et à appliquer la formule appropriée à cette disposition dans le cas général.

Par exemple, si nous voulons connaître la relation entre l'hypoténuse a, l'un des côtés b et l'angle compris C, nous reconnaissons que la disposition formée par ces trois éléments et l'angle droit A est de celles désignées ci-dessus par (**4**). Une permutation circulaire de la formule (3), qui s'applique à cette disposition, donne

$$\cos b \cos C = \sin b \cot a - \sin C \cot A,$$

---

[1] Ainsi qu'on l'a vu au n° 103, on peut aussi — moyennant l'introduction, en certains cas, d'angles auxiliaires — effectuer cette résolution complète au moyen de la grille trigonométrique.

qui, lorsqu'on tient compte de $A = \frac{\pi}{2}$, devient

$$\cos b \cos C = \sin b \cot a$$

ou

$$\tang b = \tang a \cos C,$$

formule classique; et de même pour les autres cas.

Il est ainsi démontré que les trois nomogrammes appropriés aux formules (1), (2), (3) fournissent la solution complète de tous les problèmes en question. Il est vrai que d'autres formules, telles que les analogies de Neper, sont employées pour les calculs ordinaires; leur raison d'être est alors de permettre de recourir, dans tous les cas, à un calcul logarithmique; mais une telle considération n'intervient pas lorsque l'on fait usage des méthodes nomographiques.

114. *Nomogramme pour la disposition* (**2, 2**). — Pour obtenir un nomogramme de la formule (1) adaptée à la disposition (**2, 2**), il suffit de l'écrire sous la forme

$$(1)' \qquad \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

La construction du nomogramme rentre alors dans ce qui a été dit au n° 95; on peut d'ailleurs l'établir par la Géométrie la plus élémentaire.

Si, sur deux axes parallèles $A_0 u$ et $B_0 v$ [1], on porte, d'une part, les segments $A_0 A$ et $A_0 a$ proportionnels à $\sin A$ et $\sin a$, et, d'autre part, en sens contraire, $B_0 B$ et $B_0 b$ proportionnels à $\sin B$ et $\sin b$, l'équation précédente exprime que les droites AB et ab coupent la droite $A_0 B_0$ au même point P (*fig.* 137).

Cela suggère l'idée de construire deux échelles de sinus identiques, sur deux axes parallèles, avec les zéros en A_0 et B_0 et des graduations de sens contraire, en vue de faire en sorte que ce point P tombe entre A_0 et B_0. *Les deux droites* AB *et ab coupent alors* $A_0 B_0$ *en un même point* P.

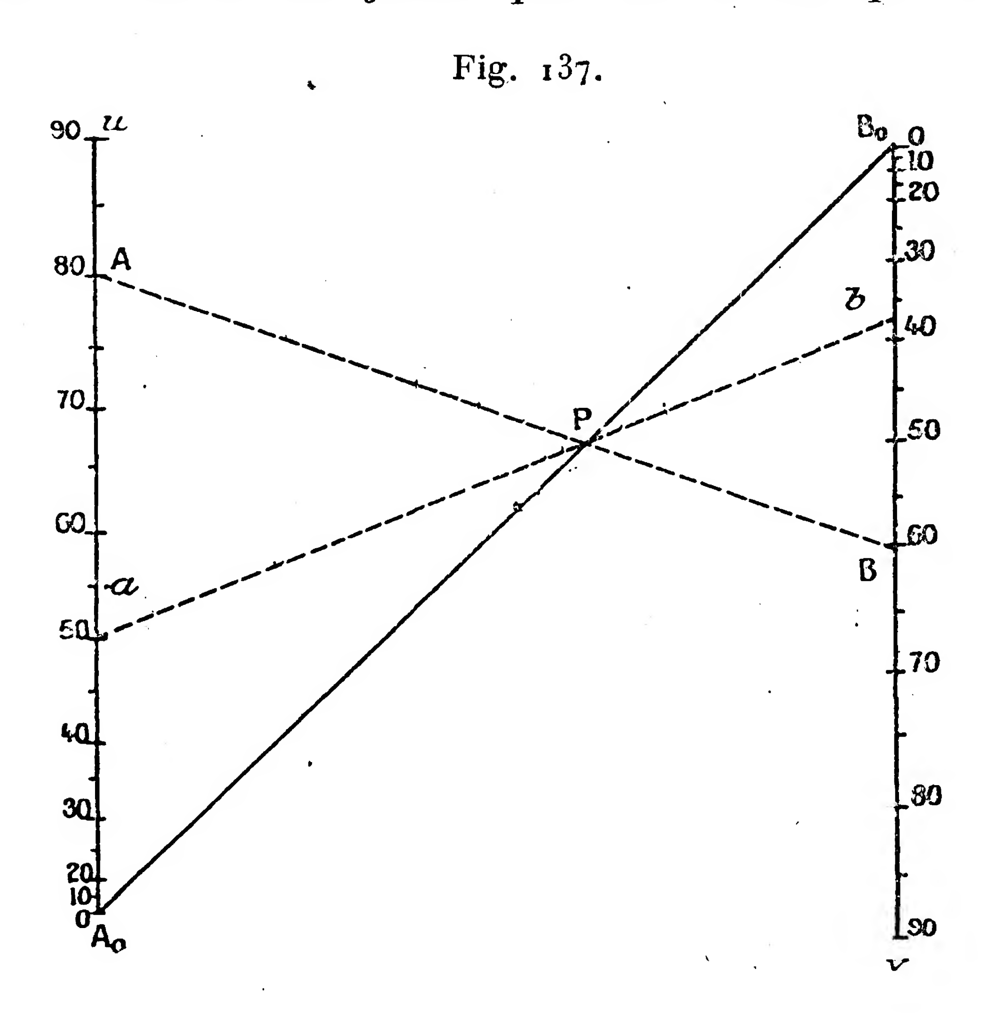
Supposons, par exemple, que A, B, a soient donnés et b à trouver.

---

(1) Afin d'éviter toute confusion, en représentant suivant l'usage par A et par B deux des angles du triangle sphérique, nous désignons ici respectivement par A_0 et B_0 les origines des axes des u et des v.

L'opération est la suivante : *Les points dont les cotes sont* A *et* B *sur les deux échelles sont joints par une droite qui coupe* A_0B_0

Fig. 137.



en un point P; *la droite joignant ce point* P *au point coté* a *sur la première échelle coupe la seconde en un point dont la cote est* b.

Nous avons tenu à montrer comment la Géométrie élémentaire permet d'exposer le principe de ce nomogramme, en raison de l'extrême simplicité du procédé; si l'on veut s'en tenir à la théorie générale, il suffit de procéder comme suit :

Appelant ζ la commune valeur des deux rapports ci-dessus, on a

$$\sin a = \zeta \sin b,$$

et si l'on pose

$$u = \mu \sin a, \quad v = -\mu \sin b,$$

il vient, pour l'équation du point (ζ),

$$u + v\zeta = 0,$$

et de même avec A et B. Or, cette dernière équation représente les points de l'axe A_0B_0 des origines; c'est donc cet axe qui sert de charnière.

115. *Nomogramme pour la disposition* (**3, 1**) [1]. — Mettons la formule qui convient à ce cas sous la forme

$$\cos a - \sin b \sin c \cos A = \cos b \cos c. \tag{3}$$

Pour obtenir sa représentation par un nomogramme à alignement, il suffit de poser, conformément à ce qui a été vu au n° **101** pour les équations du type (E),

$$u = \delta \cos a, \qquad v = - \delta \cos A \tag{4}$$

en prenant pour module le demi-écartement des axes $A_0 u$ et $B_0 v$ supposés ici perpendiculaires à $A_0 B_0$.

Ces équations définissent les graduations des axes $A_0 u$ et $B_0 v$ et donnent pour le réseau des points (b, c) l'équation

$$u + v \sin b \sin c = \delta \cos b \cos c. \tag{5}$$

La symétrie de cette équation en b et c montre que les courbes (b) et les courbes (c) du réseau (b, c) sont les mêmes. Ce sont les courbes de cette famille unique qui, en se recoupant elles-mêmes, engendrent ce réseau.

Proposons-nous d'abord de former l'équation des courbes du système obtenu par la variation de c. Nous avons à déterminer le lieu du point d'équation (5) lorsque c y est regardé comme variable. L'équation en u et v de ce lieu résulte de l'élimination de ce paramètre c entre l'équation (5) et sa dérivée prise par rapport à c, c'est-à-dire

$$v \sin b \cos c = - \delta \cos b \sin c. \tag{6}$$

Faisant la somme des équations (5) et (6), après avoir multiplié, d'une part, la première par $\sin c$ et la seconde par $\cos c$, et, d'autre part, la première par $\cos c$ et la seconde par $\sin c$, on a les équations

$$u \sin c = - v \sin b, \qquad u \cos c = \delta \cos b,$$

qui, élevées au carré et additionnées, donnent

$$u^2 = v^2 \sin^2 b + \delta^2 \cos^2 b, \tag{7}$$

qu'on peut écrire

$$u^2 - \delta^2 = \sin^2 b (v^2 - \delta^2). \tag{7'}$$

[1] Donné pour la première fois dans **O.12**.

Sous la forme (7), l'équation montre que *les courbes* (b) *sont des ellipses dont un axe est dirigé suivant la droite* A_0B_0 *joignant les origines des axes* A_0u *et* B_0v [1]. Sous la forme (7'), l'équation fait apparaître que *ces ellipses appartiennent à un faisceau tangentiel comprenant les coniques dégénérées* $u^2-\delta^2=0$, $v^2-\delta^2=0$ *qui consistent chacune en un couple de points réels* ($u=\pm\delta$, $v=\pm\delta$).

En d'autres termes, *les ellipses* (b) *sont toutes inscrites dans le quadrilatère formé par les quatre droites joignant chacun des points* $u=\pm\delta$ *à chacun des points* $v=\pm\delta$.

Si, comme c'est le cas sur la figure 138 [2], nous prenons comme module de chacune des échelles des cosinus la moitié de la distance entre les axes A_0u et B_0v, ces axes étant perpendiculaires à A_0B_0, les points $u=\pm\delta$, $v=\pm\delta$ forment un carré dont deux des côtés sont parallèles à A_0B_0. Ces deux côtés et les deux diagonales du carré constituent les quatre tangentes communes à toutes les ellipses (b).

Pour le tracé de ces ellipses, point par point, nous aurons recours aux coordonnées cartésiennes rapportées comme d'habitude aux axes Ox et Oy pour lesquels l'origine O est le milieu A_0B_0, le sens positif de Ox confondu avec OB_0, l'axe Oy parallèle aux axes A_0u et B_0v et de même sens.

Avec ces axes, les coordonnées du point (b, c) sont

$$(8)\qquad x=-\delta\frac{1-\sin b\sin c}{1+\sin b\sin c},\qquad y=\frac{\delta\cos b\cos c}{1+\sin b\sin c}.$$

Notons que, si b et c sont compris entre O et π,

$$-\delta<x<0$$

et que

$$0<y<\delta\qquad\text{ou}\qquad-\delta<y<0$$

suivant que b et c sont tous deux du même côté ou de côtés différents par rapport à $\frac{\pi}{2}$.

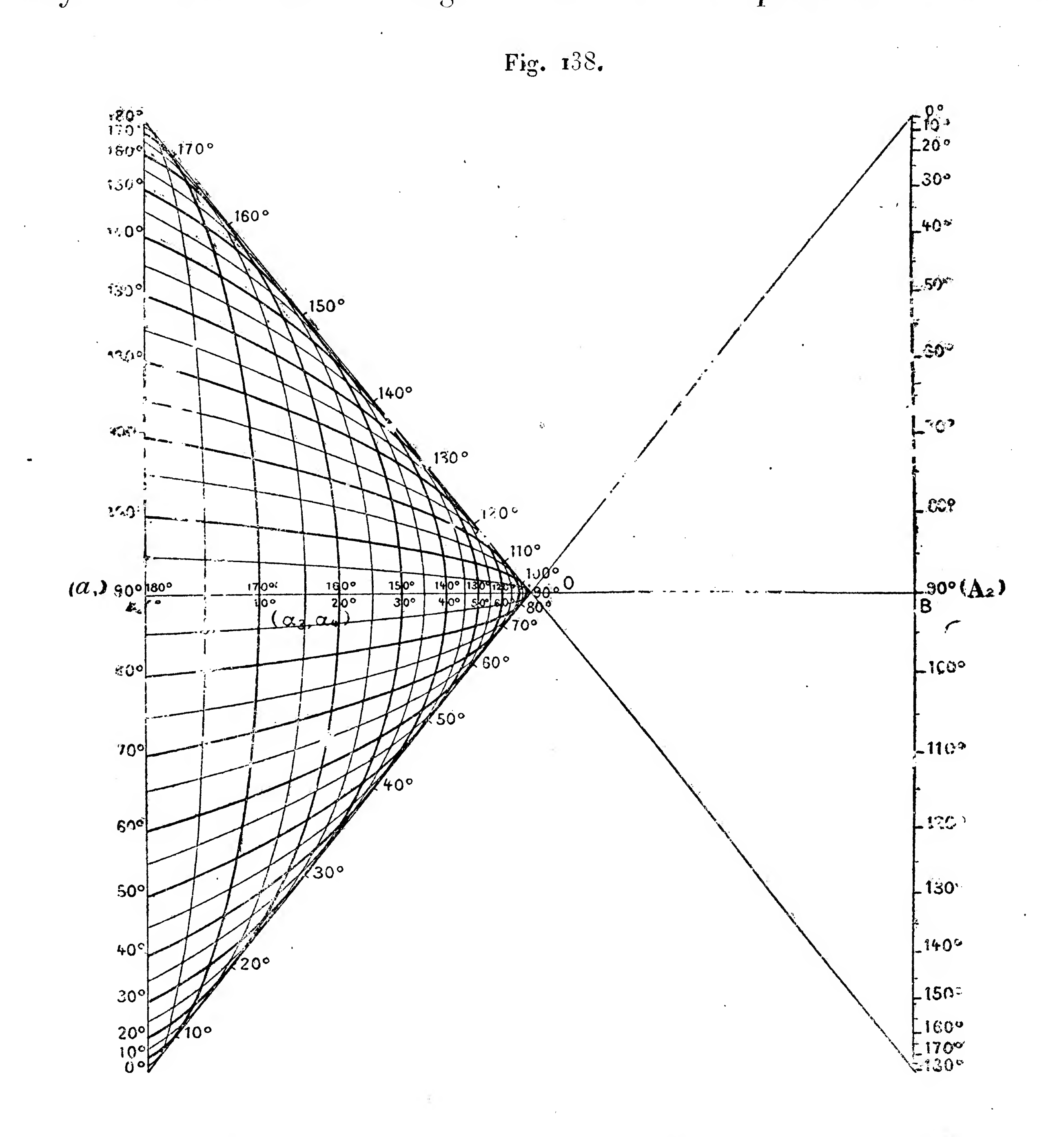
---

(1) *Voir*, pour une théorie complète des coniques en coordonnées parallèles, notre brochure : *Coordonnées parallèles et axiales*, Chap. IV (Paris, Gauthier-Villars; 1885).

(2) Il convient de remarquer que les graduations de cette figure supposent ici le sens positif de A_0u et B_0v, par suite aussi de Oy, pris de haut en bas.

Cette dernière remarque est importante en ce qu'elle donne le moyen d'éviter toute ambiguïté dans la correspondance entre les

Fig. 138.



couples de valeurs de b et c et les points du réseau (b, c). L'équation (7) montre que l'ellipse (b) ou (c) est la même pour deux valeurs supplémentaires de l'angle correspondant; en outre, les ellipses (b) et (c) ont deux points communs symétriques par rapport à Ox dans la partie utilisée du réseau; mais la remarque ci-dessus établit clairement que l'on doit prendre le point d'ordonnée positive ou négative suivant que b et c sont du même côté ou de côtés différents par rapport à $\frac{\pi}{2}$.

Supposons maintenant que b et c soient égaux ou supplémentaires,

de telle sorte que les ellipses correspondantes coïncident. Par passage à la limite, on voit que l'on doit prendre pour point (b, c) sur le nomogramme celui des points de contact de l'ellipse unique avec les tangentes communes issues de O, qui a une ordonnée soit positive, soit négative. Dans chaque cas, en vertu de ce qui précède, il n'y a pas la moindre hésitation à avoir dans le choix de ce point (b, c), non plus que dans la détermination de la valeur d'un de ces angles lorsqu'un tel point et la valeur de l'autre angle sont connus.

L'équation cartésienne de l'ellipse (b), dont (7) fait connaître l'équation en coordonnées parallèles, est facile à former. Des équations (8) on tire sans difficulté

$$\sin b \sin c = \frac{\delta + x}{\delta - x}, \qquad \cos b \cos c = \frac{2y}{\delta - x};$$

d'où, par élimination de c,

$$\frac{(\delta + x)^2}{\sin^2 b} + \frac{4y^2}{\cos^2 c} = (\delta - x)^2$$

ou

$$(9) \qquad (\delta + x)^2 \cos^2 b + 4y^2 \sin^2 b = (\delta - x)^2 \sin^2 b \cos^2 b.$$

De cette équation, on déduit immédiatement que, pour $x = -\delta$, on a $y = \pm \delta \cos b$, c'est-à-dire que l'ellipse (b) coupe l'échelle (a) portée sur $A_0 u$ aux points cotés b et $\pi - b$.

Il convient aussi de remarquer que si, dans (7), on fait $v = 0$, on a $u = \pm \delta \cos b$, ce qui signifie que les droites joignant les points cotés b et $\pi - b$ de l'échelle (a) au point B_0 sont tangentes à l'ellipse (b) en ces points.

Au moyen soit des formules (8), soit de l'équation (9), nous pouvons construire les ellipses (b) [avec lesquelles, ainsi que nous l'avons précédemment observé, coïncident les ellipses (c)] par les procédés ordinaires de la Géométrie analytique. Mais un mode de construction plus simple et plus expéditif est fourni par la considération de l'équation (2). En fait, d'après ce que nous avons vu, cette équation exprime l'alignement des points (a) de $A_0 u$, (A) de $B_0 v$ et (b, c). Deux tels alignements obtenus pour (b, c) par le calcul de deux couples simples de valeurs de a et A déterminent la position de ce point (b, c).

Or, la formule (2) montre que, pour $A = 0$, nous avons $a = b - c$,

et, pour $A = \pi$, $a = b + c$. Ces deux couples de valeurs de a et A déterminent des droites dont le point d'intersection coïncide avec le point (b, c).

De là, la construction suivante du système des ellipses (b) ou (c) : *Les axes* $A_0 u$ *et* $B_0 v$ *portant les échelles* (a) *et* (A) *définies par les formules* (4), *on joint chacun des points* $A = 0$ *et* $A = \pi$ *à tous les points de l'échelle* (a) *et l'on obtient ainsi deux faisceaux de droites dont les mutuelles intersections se trouvent sur les ellipses* (b). *Pour que deux droites de ces faisceaux se coupent en un point de l'ellipse* (b), *il est nécessaire et suffisant que la somme ou la différence des angles correspondant à ces deux droites soit égale à* $2b$.

C'est par ce moyen qu'a été construit le nomogramme de la figure 138. Son mode d'emploi résulte dans tous les cas de l'énoncé suivant :

Le point (b, c) *étant celui des points d'intersection des ellipses* (b) *et* (c) *qui est d'ordonnée positive ou négative suivant que* b *et* c *sont ou non du même côté par rapport à* $\frac{\pi}{2}$, *les points cotés* (a), (A) et (b, c) *sont en ligne droite.*

116. *Nomogramme pour la disposition* (**4**). — Écrivons la formule (3) relative à cette disposition sous la forme

$$\cot c \sin a - \cot C \sin B = \cos a \cos B \tag{3}$$

et posons, en prenant encore un module égal δ,

$$u = \delta \cot c, \qquad v = -\delta \cot C. \tag{10}$$

Ces formules définissent les échelles portées sur les axes $A_0 u$ et $B_0 v$ et donnent pour le réseau de points (a, B) l'équation

$$u \sin a + v \sin B = \delta \cos a \cos B. \tag{11}$$

Pour avoir l'équation en u et v de la courbe (a) résultant de la variation de B, il faut éliminer B entre cette équation et sa dérivée prise par rapport à B, c'est-à-dire

$$v \cos B = -\delta \cos a \sin B. \tag{12}$$

Si l'on fait la somme de ces équations après les avoir multipliées

respectivement d'abord par $\cos B$ et $-\sin B$, puis par $\sin B$ et $\cos B$, on obtient

$$u \sin a \cos B = \delta \cos a, \qquad u \sin a \sin B = -v,$$

équations qui, élevées au carré et additionnées, donnent l'équation cherchée

$$(13) \qquad u^2 \sin^2 a = v^2 + \delta^2 \cos^2 a$$

ou

$$(13') \qquad (u^2 + \delta^2) \sin^2 a = v^2 + \delta^2.$$

Sous la forme (12), l'équation montre que *les courbes* (a) *sont des hyperboles dont un des axes est situé sur* A_0B_0, et, d'après la forme (13'), il est évident que ces *hyperboles forment un faisceau tangentiel comprenant les coniques dégénérées* $u^2 + \delta^2 = 0$, $v^2 + \delta^2 = 0$, *qui consistent chacune en un couple de points imaginaires* ($u = \pm \delta i$ et $v = \pm \delta i$).

En d'autres termes, *les hyperboles* (a) *sont toutes inscrites dans le quadrilatère formé par les quatre droites joignant chacun des points* $u = \pm \delta i$ *à chacun des points* $v = \pm \delta i$.

Par rapport aux axes cartésiens que nous associons de façon permanente aux axes parallèles A_0u et B_0v, ces droites ont pour équations

$$y = \pm \delta i, \qquad y = \pm ix.$$

Les dernières sont les droites *isotropes* issues de l'origine O, ce qui prouve que *l'origine* O *est un foyer commun à toutes les hyperboles du faisceau* [1].

Si nous permutons a avec B, et u avec v, cela ne change rien à l'équation (11), de sorte que nous avons immédiatement pour l'équation des courbes (B)

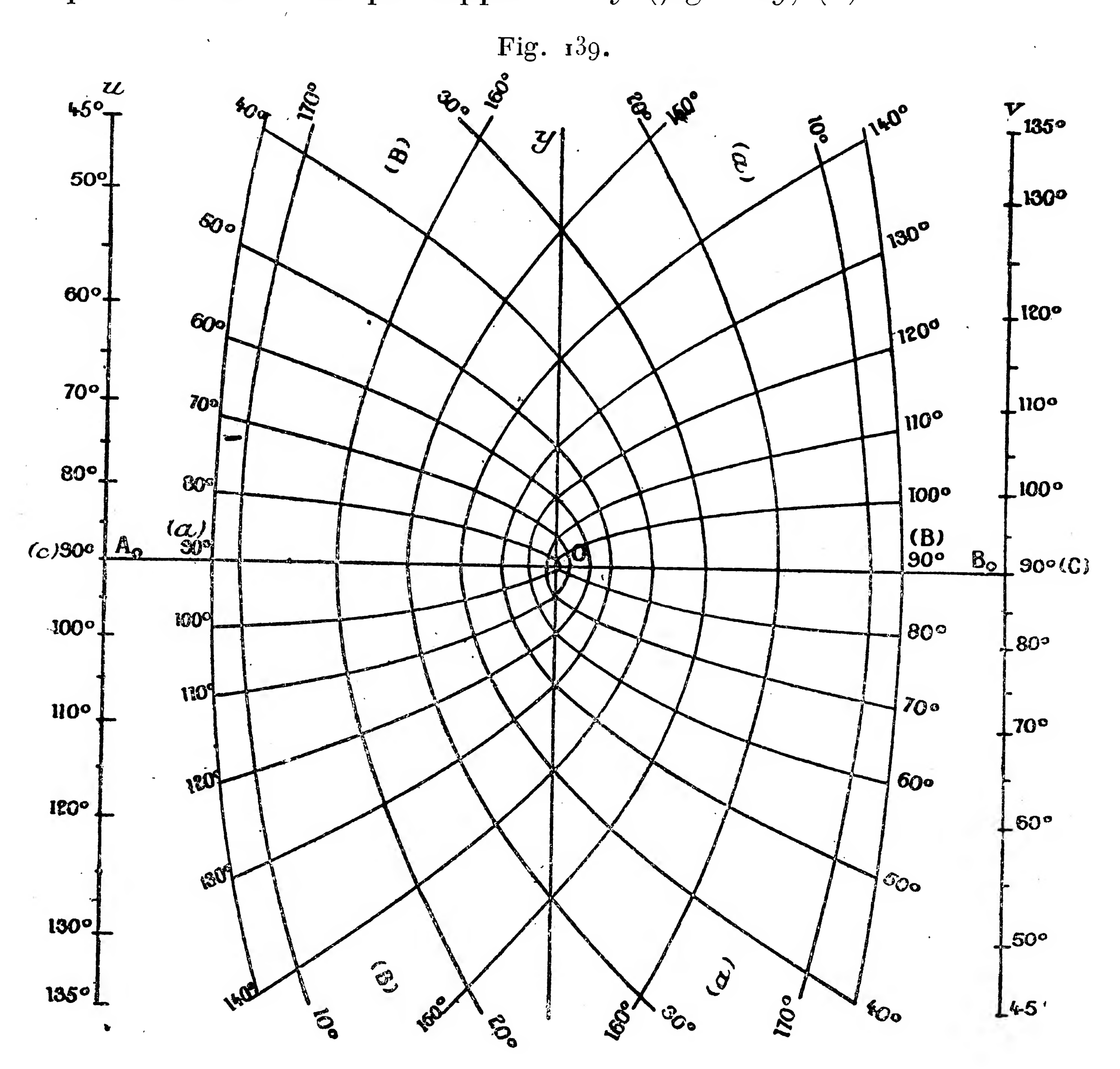
$$(14) \qquad u^2 + \delta^2 = (v^2 + \delta)^2 \sin^2 B,$$

qui définit un faisceau d'hyperboles, algébriquement identique au précédent. Seulement, les hyperboles (a), qui ont un foyer commun en O, ont leur concavité tournée du côté de A_0, tandis que les

[1] Il est à noter que ces hyperboles n'ont en commun qu'un seul foyer, et non deux, c'est-à-dire sont confocales et non homofocales, attendu que les deux autres côtés du quadrilatère dans lequel elles sont inscrites sont des parallèles imaginaires à Ox et non des droites isotropes.

hyperboles (B), qui ont aussi un foyer commun en O, ont leur concavité tournée du côté B_0. Ces deux faisceaux (a) et (B) sont symétriques l'un de l'autre par rapport à Oy (*fig.* 139) ([1]).

Fig. 139.



Comme dans le cas précédent, nous allons passer aux coordonnées cartésiennes, par rapport aux mêmes axes que ci-dessus, en vue de la construction des hyperboles point par point.

Les coordonnées du point (a, B) sont

$$(15) \qquad x = \delta \frac{\sin B - \sin a}{\sin B + \sin a}, \qquad y = \frac{\delta \cos a \cos B}{\sin a + \sin B}.$$

([1]) Ce nomogramme a été effectivement construit en vue de son application particulière à la détermination de l'azimut, pour le point à la mer, par M. le lieutenant de vaisseau (depuis lors, capitaine de frégate) Perret (*Association française pour l'Avancement des Sciences. Congrès de Cherbourg*, 1905).

Notons que si A et B sont compris entre o et π, nous avons toujours

$$-\delta < x < \delta,$$

et que

$$y > 0 \quad \text{ou} \quad y < 0,$$

suivant que a et B sont ou non du même côté par rapport à $\frac{\pi}{2}$. Cela donne le moyen de faire disparaître toute ambiguïté dans la détermination, sur la partie utile du nomogramme, du point correspondant à un couple de valeurs données de a et B.

Pour avoir l'équation cartésienne des hyperboles (a), nous n'avons qu'à tirer de (15)

$$\sin B = \frac{\delta + x}{\delta - x} \sin a, \qquad \cos B = \frac{2y}{\delta - x} \operatorname{tang} a,$$

et nous obtenons ainsi

$$(\delta + x)^2 \sin^2 a + 4y^2 \operatorname{tang}^2 a = (\delta - x)^2$$

ou

$$(16) \qquad (\delta - x)^2 \cos^2 a - 4y^2 \sin^2 a = (\delta + x)^2 \sin^2 a \cos^2 a.$$

Grâce à la remarque précédente concernant la permutation des axes $A_0 u$ et $B_0 v$ dont les équations cartésiennes sont respectivement $x + \delta = 0$ et $x - \delta = 0$, nous déduisons immédiatement de là l'équation des hyperboles (B) :

$$(17) \qquad (\delta + x)^2 \cos^2 B - 4y^2 \sin^2 B = (\delta - x)^2 \sin^2 B \cos^2 B.$$

De la comparaison de ces équations (16) et (17) avec l'équation (9) il ressort immédiatement que les deux faisceaux d'ellipses et d'hyperboles, ci-dessus rencontrés, se déduisent l'un de l'autre au moyen de la transformation homographique

$$x' = \mp x, \qquad y' = y i,$$

qui fait correspondre aux droites issues de l'origine et inclinées à 45° sur $A_0 B_0$ les droites isotropes semblablement issues de O.

Pour $x = -\delta$, l'équation (16) donne $y = \pm \delta \cot a$, ce qui montre que l'hyperbole (a) rencontre l'axe $A_0 u$ aux points cotés a et $\pi - a$ de l'échelle (c). De même, si l'on fait $x = \delta$ dans l'équation (17), on voit que l'hyperbole (B) coupe l'axe $B_0 v$ aux points cotés B et π de l'échelle (c).

D'ailleurs, si l'on fait $v = 0$ dans l'équation (13), ou $u = 0$ dans l'équation (14), on constate que les tangentes aux hyperboles (a) en leurs points d'intersection avec $A_0 u$ passent par B_0, et que les tangentes aux hyperboles (B) en leurs points d'intersection avec $B_0 v$ passent par A_0.

Contrairement à ce qui avait lieu pour le précédent nomogramme, dont la partie utile (lorsque les variables restent comprises entre 0 et π) est enfermée dans une aire limitée, ce nouveau nomogramme, pour les mêmes limites attribuées aux variables, s'étend de $-\infty$ à $+\infty$ dans la direction de Oy. Pratiquement, donc, il n'est possible de construire qu'une partie restreinte de ce nomogramme. Pour atteindre des valeurs des variables en dehors de ce domaine, il est nécessaire de recourir à certaines transformations homologiques qui seront étudiées à part dans une Note additionnelle (n° **118**).

117. *Nomogrammes particuliers.* — Dans certaines applications, l'un des quatre éléments intervenant dans l'un ou l'autre des nomogrammes précédents peut être regardé comme constant, et il devient avantageux, en un tel cas, de construire un nomogramme particulier à trois variables se déduisant d'un de ceux-ci par fixation, sur l'un des quatre systèmes cotés, d'un élément unique correspondant à la valeur constante donnée.

Supposons, par exemple, que le problème consiste à représenter la relation entre les trois côtés a, b, c d'un triangle sphérique rectangle en A. La relation en question, qui peut se déduire de (2) lorsqu'on y fait $A = \frac{\pi}{2}$, est

$$\cos a = \cos b \cos c. \tag{18}$$

Le nomogramme correspondant est celui de la figure 138 sur lequel on supprime la graduation (A) de l'axe $B_0 v$, *tous les alignements étant alors pris sur le point* B_0.

Une telle solution présente l'intérêt théorique d'être contenue dans le cas général. Mais il est clair qu'on peut lui substituer une solution beaucoup plus simple qui s'offre immédiatement à l'esprit. Posant

$$u = \mu \cos a, \qquad v = -\mu \cos b,$$

on a, pour c, l'échelle

$$u + v \cos c = 0$$

portée sur l'axe $A_0 B_0$.

Les échelles (a) et (b) sont obtenues par remplacement, sur la figure 137, des angles inscrits le long de $A_0 u$ et de $B_0 v$ par leurs compléments, et l'échelle (c) n'est autre que la projection de (a) sur $A_0 B_0$ à partir du point $b = 0$, puisque, pour cette valeur de b, la formule (18) donne $a = c$.

Pour prendre un autre exemple, proposons-nous de représenter la relation entre l'angle horaire $\mathcal{H}$, la déclinaison $\mathcal{D}$ et la distance zénithale z d'un astre quelconque pour une latitude constante φ. Cette relation est fournie par la formule (2) où l'on fait

$$a = z, \qquad b = \frac{\pi}{2} - \varphi, \qquad c = \frac{\pi}{2} - \mathcal{D}, \qquad A = \mathcal{H}.$$

Ici, φ est supposé constant. Il est dès lors suffisant de marquer sur l'ellipse (b), correspondant à cette valeur de φ, les points répondant aux diverses valeurs de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire les points où les diverses ellipses (c) rencontrent cette ellipse (b) (*fig.* 140).

D'ailleurs, $\mathcal{H}$ variant de 0° à 180° tandis que z varie seulement de 0° à 90°, on peut prendre pour cette échelle un module double de celui de la première, de façon à donner à ces échelles des longueurs égales. Cela revient à effectuer une certaine transformation homographique sur la partie qui vient d'être particularisée du nomogramme général de la disposition (**3, 1**).

Mais il n'est pas sans intérêt d'indiquer une construction directe simple de ce nomogramme particulier [1].

Si l'on pose, pour simplifier l'écriture,

$$h = \sin\varphi, \qquad k = \cos\varphi,$$

φ étant la latitude constante considérée, on voit que la formule (2) devient ici

$$\cos z = h \sin\mathcal{D} + k \cos\mathcal{D} \cos\mathcal{H}. \tag{19}$$

Posons

$$u = -\mu \cos\mathcal{H}, \qquad v = 2\mu \cos z; \tag{20}$$

cela donne pour les points $(\mathcal{D})$ l'équation

$$2k\cos\mathcal{D}\, u + v = 2\mu h \sin\mathcal{D}, \tag{21}$$

---

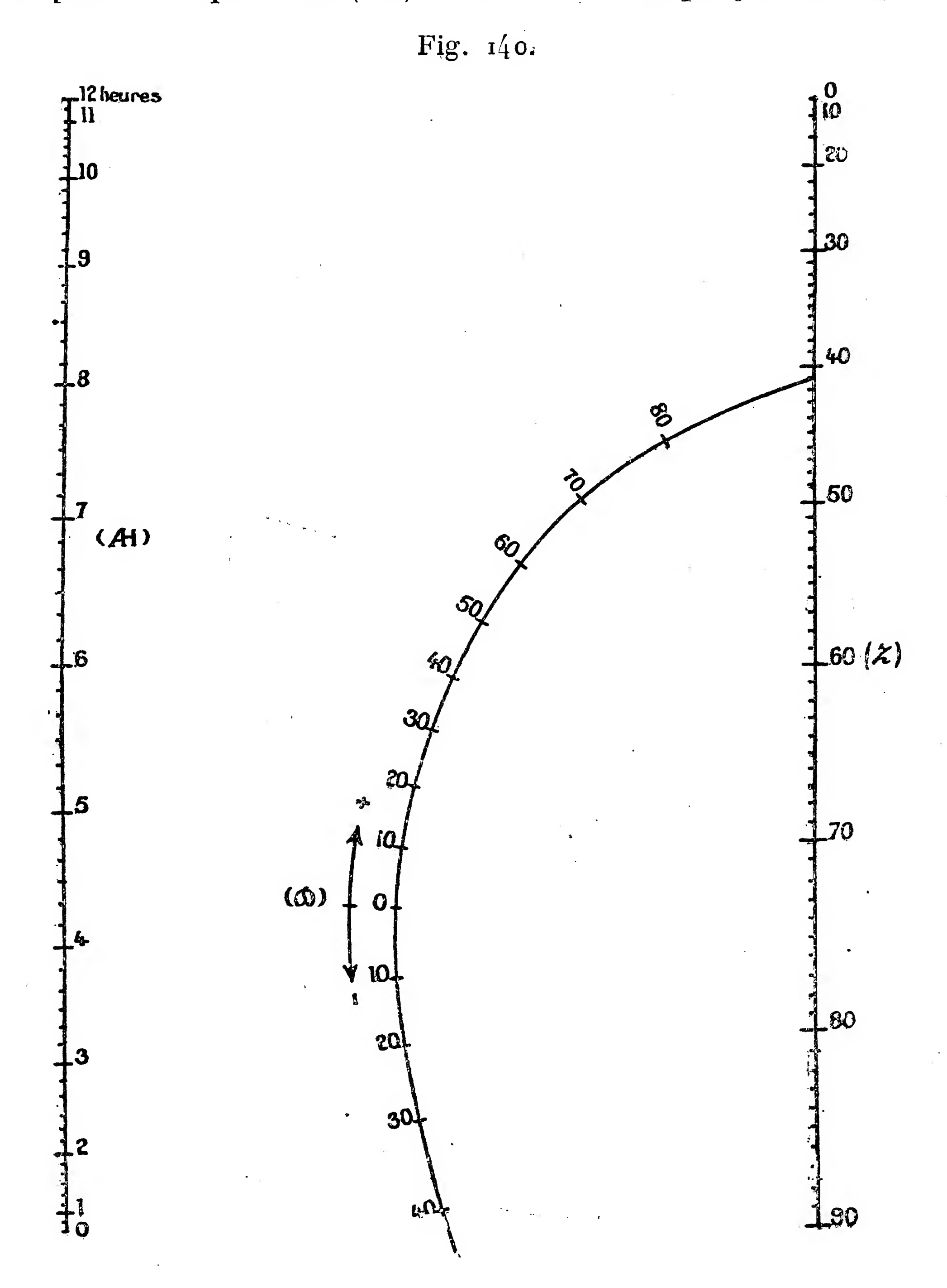
[1] Donnée dans **O.38**.

équivalente à

$$x = \delta \frac{1 - 2k \cos \mathcal{C}}{1 + 2k \cos \mathcal{C}}, \qquad y = \frac{2\mu h \sin \mathcal{C}}{1 + 2k \cos \mathcal{C}}.$$

Ayant, avec une valeur quelconque de μ, porté sur $B_0 v$ l'échelle (z), on a, d'après les équations (20), l'échelle $\mathcal{H}$ en projetant la première

Fig. 140.



sur $A_0 u$ à partir d'un centre de projection C_0 situé au tiers de $A_0 B_0$ à partir de A_0 (¹).

(¹) Sur la figure 140, A_0 coïncide avec le point $\mathcal{H} = 6^h$, et B_0 avec le point $z = 90°$.

Pour l'échelle $(\mathbb{D})$, l'expression de x montre que la projection de cette échelle faite sur $A_0 B_0$ parallèlement à Oy, c'est-à-dire aux axes $A_0 u$ et $B_0 v$, est l'échelle $(\mathbb{D})_1$ projective de celle de (z), et comme les points 90° de ces deux échelles coïncident avec B_0, on voit qu'elles sont effectivement projectives l'une de l'autre (nº 7) à partir d'un céntre C_1 obtenu par la rencontre des droites joignant deux couples de points de même cote, par exemple 0° et 60°, puisque les points 0° et 60° de l'échelle $(\mathbb{D})_1$ sont immédiatement donnés par leurs abscisses

$$x = \delta\frac{1-2k}{1+2k}, \qquad y = \delta\frac{1-k}{1+k}.$$

D'autre part, l'équation (21) où l'on fait $u = 0$ donnant

$$v = 2\mu h \sin D,$$

on voit que la projection $(\mathbb{D})_2$ de l'échelle $(\mathbb{D})$ faite à partir de A_0 sur Oy est définie par

$$y = \mu h \sin \mathbb{D},$$

que l'on peut écrire

$$y = 2\mu\frac{h}{2}\cos(90^\circ - \mathbb{D}).$$

Cette dernière formule, rapprochée de la seconde équation (20), montre que l'échelle $(\mathbb{D})_2$ se confond avec la projection de l'échelle (z) faite sur Oy à partir d'un centre C_2 situé sur $A_0 B_0$ et tel que

$$\frac{C_2 O}{C_2 B} = \frac{h}{2},$$

point dont l'abscisse est donnée par

$$x = -\delta\frac{h}{2-h},$$

à la condition de remplacer les cotes par leurs compléments à 90°.

Finalement, on voit qu'une fois l'échelle cosinusoïdale (z) portée sur $B_0 v$, la construction du nomogramme se réduit à ce qui suit, les centres de projection C_0, C_1, C_2 étant ceux ci-dessus définis :

1º Projeter l'échelle (z) sur $A_0 u$ à partir de C_0 et prolonger l'échelle $(\mathcal{H})$ ainsi obtenue jusqu'à 180° en prenant la partie de 90° à 180° symétrique de celle de 0° à 90° (pour des cotes supplémen-

taires), puis graduer cette échelle en heures (de 0^h à 12^h) au lieu de degrés (de $0°$ à $180°$);

2° Projeter l'échelle (z) sur A_0B_0 à partir de C_1, ce qui donne l'échelle $(\mathfrak{D})_1$;

3° Projeter l'échelle (z) sur Oy à partir de C_2, en remplaçant les cotes par leurs compléments, ce qui donne l'échelle $(\mathfrak{D})_2$;

4° Prendre les points de rencontre des rayons de même cote du faisceau projetant $(\mathfrak{D})_1$ parallèlement à Oy et du faisceau projetant $(\mathfrak{D})_2$ à partir de A_0; on a ainsi l'échelle $(\mathfrak{D})$.

C'est ainsi qu'a été construit, pour l'Observatoire de Paris, en vue de la préparation des observations à l'équatorial, le nomogramme dont la figure 140 est une réduction. On avait là

$$\varphi = 40°50'11''.$$

118. *Note additionnelle sur les alignements brisés.* — Considérons un nomogramme dont la partie utile est limitée par les axes Au et Bv, mais qui s'étend entre ces axes depuis $-\infty$ jusqu"à $+\infty$. Divisons ce nomogramme en trois, la partie moyenne étant construite directement au moyen des équations de disjonction, et d'ailleurs limitée à deux axes Δ' et Δ'' parallèles à l'axe AB des origines, et transformons homologiquement la partie située au-dessus de l'axe Δ' et s'étendant jusqu'à l'infini, en prenant Δ' comme axe de l'homologie, l'origine O comme pôle et le point I' de l'axe Oy comme correspondant du point à l'infini sur cet axe.

Pour construire les échelles sur cette partie transformée, nous allons chercher les coordonnées (x', y') du point M' correspondant au point M de coordonnées (x, y) de la figure primitive. Appelant l et h les distances respectives du point I' à l'origine O et à l'axe Δ', nous trouvons facilement pour ces expressions

$$x' = \frac{lx}{h+y}, \qquad y' = \frac{ly}{h+y}.$$

De là même façon transformons la partie située en dessous de Δ'', en nous donnant le point I'' correspondant du point à l'infini sur Oy.

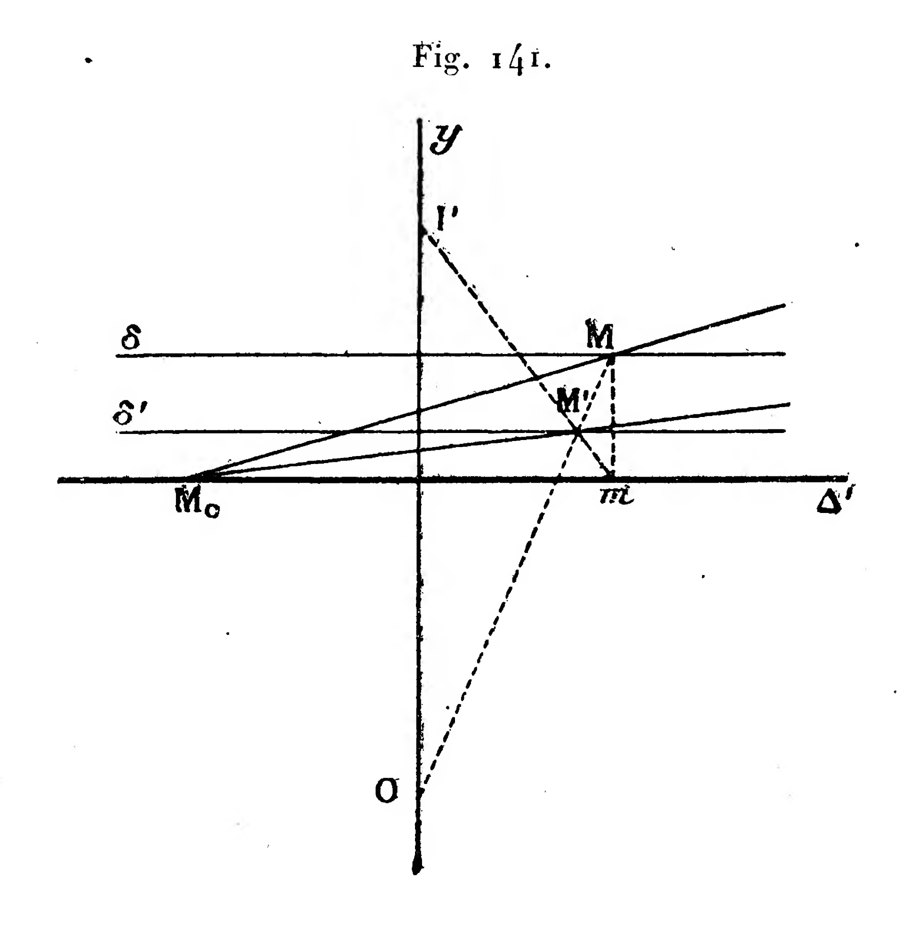
Il reste à faire voir comment se construit l'alignement brisé lorsqu'on passe de la partie inaltérée à la partie transformée du nomogramme.

Remarquons tout d'abord que l'alignement déterminé par des points pris sur deux des échelles (*points déterminatifs*) doit couper la troisième échelle (ou l'une des lignes du troisième réseau) en un point qui fait connaître la valeur de l'inconnue (*point solutif*).

De là, trois cas à examiner selon que les points déterminatifs appartiennent à la même partie du nomogramme (I), ou à deux parties contiguës (II), ou à deux parties non contiguës (III).

Cas I. — L'alignement est immédiatement déterminé sur une des parties du nomogramme par les deux points déterminatifs et le problème se borne à obtenir ce que devient l'alignement après la sorte de réfraction qu'il subit dans la partie contiguë contenant le point solutif. Ce problème revient tout simplement à celui bien connu qui consiste à trouver la droite correspondant à une droite donnée en vertu de l'homologie ci-dessus définie. La droite primitive et sa transformée se coupent en un point M_0 de l'axe d'homologie Δ' (*fig.* 141). En outre, si M et M' sont deux points correspondants

Fig. 141.



sur ces droites, M appartenant à la figure primitive et M' à sa transformée, la droite OM et la droite I'm joignant le point I' à la projection orthogonale m de M sur Δ' se coupent en M'.

Mais il est plus simple de tracer une fois pour toutes une paire de droites correspondantes δ et δ' parallèles à Δ', qui donnent immédiatement une paire de points correspondants M et M', alignés sur O, sur les deux parties de l'alignement brisé.

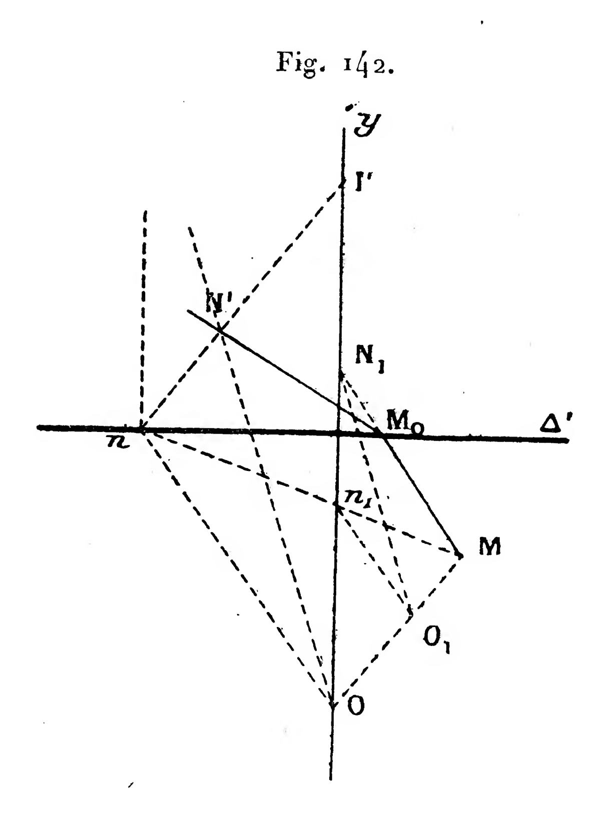
Avec cette construction, le mode de passage d'une région à l'autre résulte de l'énoncé suivant : *les deux parties de l'alignement brisé se rencontrent en un point de Δ' et coupent δ et δ' en des points qui sont alignés sur* O.

Cas II. — Les points déterminatifs sont un point M sur la première partie du nomogramme et un point N' sur la seconde. En vue de construire l'alignement brisé MM_0N' (*fig.* 142), nous avons à mener la droite MM_0 joignant le point M au point N qui correspond à N' sur la première partie de la figure. Si la droite I'N' coupe Δ' en n, le point N est à l'intersection de ON' et de la perpendiculaire élevée en n à Δ'.

Considérons la figure homothétique à celle qui est formée par ces deux

lignes, le centre de similitude étant en M et la droite OI′ étant prise comme correspondante de nN. Pour avoir la droite O_1N_1 correspondant à ON′, nous n'avons qu'à prendre le point d'intersection O_1 de MO et de la parallèle n_1O_1

Fig. 142.



à On et à mener la parallèle O_1N_1 à ON′. Dans ces conditions, la droite MN_1 prolongée passerait par N; elle fournit donc la première partie de l'alignement brisé dont la seconde est donnée par M_0N'.

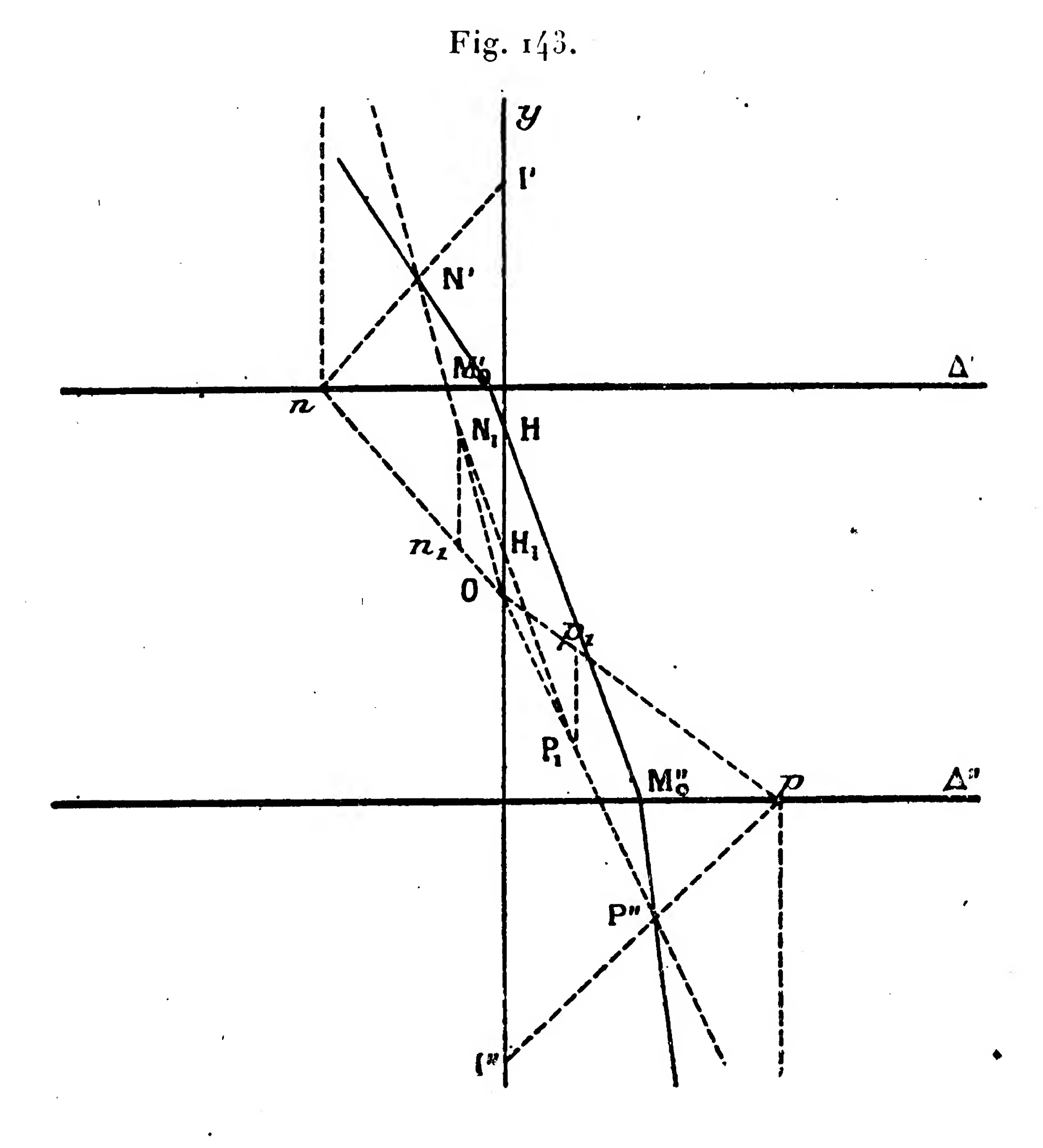
Cas III. — Les points déterminatifs N′ et P″ appartiennent à deux parties non contiguës obtenues par transformation homologique de la figure primitive. La partie moyenne est inaltérée et les parties transformées sont l'une au-dessus de Δ′, l'autre au-dessous de Δ″ (*fig.* 143).

I′ et I″ étant, pour ces deux parties, les points correspondant au point à l'infini sur Oy, on trace I′N′ et I″P″ qui coupent Δ′ et Δ″ respectivement en n et p. Les droites menées par n et p parallèlement à Oy coupent ON′ et OP″ aux points N et P qui déterminent l'alignement non brisé. Le problème consiste à obtenir la portion $M'_0M''_0$ de cet alignement compris entre les axes Δ′ et Δ″ et que complètent les droites M'_0N' et $M''P''$ pour constituer l'alignement doublement brisé $P''M''M'_0N'_0$.

Pour avoir la droite $M'_0M''_0$, il suffit de tracer une figure homothétique par rapport au point O pris comme centre de similitude. Prenons les points n_1 et p_1 divisant les segments On et Op dans le même rapport, tels, par conséquent, que les droites np et n_1p_1 (non tracées) soient parallèles. Menons ensuite par ces points des parallèles à Oy, qui coupent ON′ et OP″ en N_1 et P_1 respectivement. L'alignement cherché est l'homologue de la droite N_1P_1. Il est donc parallèle à N_1P_1 et se trouve entièrement déterminé lorsqu'on a

obtenu l'homologue d'un point quelconque de N_1P_1, par exemple de celui H_1

Fig. 143.



situé sur Oy, qui est le point H à l'intersection de OH_1 et de la parallèle à n_1H_1 menée par n.

C. — Préparation du tir de l'artillerie.

119. *Éléments initiaux du tir et corrections.* — La position relative du point de départ A et du point d'arrivée B d'un projectile est définie par la distance horizontale D qui sépare les points A et B et leur différence d'altitude Z (positive ou négative, le niveau d'origine étant celui de A), données lues sur la carte d'où se déduit l'*angle de site* ε, inclinaison de la droite AB sur l'horizon donnée par

$$\tan g\,\varepsilon = \frac{Z}{D}. \tag{1}$$

Pour atteindre l'objectif B au moyen d'un projectile donné, tiré de A avec une charge donnée, il faut déterminer l'*angle initial de tir* sous lequel l'axe de la pièce doit être fixé en A sur l'horizon.

Lorsque l'angle de site est nul et que l'atmosphère remplit certaines conditions particulières (poids du mètre cube d'air égal à 1208^g; vent nul), des tables spéciales font conaître cet angle initial dit alors *angle tabulaire*.

Mais les variations du poids du mètre cube d'air (avec la *température* et la *pression atmosphérique*) et l'action du vent (dont on détermine les composantes *longitudinale* et *transversale* de la vitesse, l'une dans la direction du tir, l'autre normale à cette direction) entraînent une modification de cet angle qui devient alors l'*angle tabulaire corrigé*.

D'autre part, la composante transversale du vent écartant le projectile du plan vertical dans lequel il a été tiré, il y a lieu, pour qu'ainsi dévié ce projectile atteigne néanmoins l'objectif B visé, qu'il soit lancé au départ en A dans un plan vertical faisant avec celui qui passe par AB un certain angle qu'on appelle la *dérive*.

Corrections atmosphériques de l'angle tabulaire et dérive sont données par des tables empiriques dressées par les commissions d'expériences de l'artillerie.

Enfin l'angle tabulaire corrigé α, qui, on vient de le voir, ne s'applique qu'au cas d'un tir dit *horizontal* (lorsque la droite AB est horizontale) doit, lorsque le tir est incliné, être modifié, suivant la valeur de l'angle de site ε, pour fournir l'angle initial de tir effectif φ, inclinaison de l'axe de la pièce sur l'horizon, ces trois angles étant liés par l'équation

$$(2) \qquad (1 + \cos 2\varphi) \operatorname{tang} \varepsilon = \sin 2\varphi - \sin 2\alpha.$$

Au point de vue nomographique, on voit dès lors quels sont les problèmes à résoudre :

1° Représenter l'équation (1) de l'angle de site;

2° Déterminer le poids du mètre cube d'air pour la température et la pression atmosphérique observées;

3° Obtenir nomographiquement la correction de l'angle tabulaire en fonction de la portée, du poids du mètre cube d'air et de la composante longitudinale de la vitesse du vent;

4° Et de même pour la dérive en fonction de la portée et de la composante transversale de la vitesse du vent;

5° Représenter l'équation (2) qui fait connaître l'angle initial de tir effectif.

Ces divers problèmes ont, avec beaucoup d'autres, été traités à la *Section de Nomographie de l'Armée* que nous avons eu, au cours de la guerre, la charge d'organiser et de diriger. Nous allons en résumer ici les solutions [1].

120. *Angle de site.* — Reprenons l'équation (1) du numéro précédent

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{Z}{D},$$

dans laquelle Z représente la différence d'altitude D la portée, exprimées l'une et l'autre en mètres. On peut les représenter en posant

$$u = -\mu_1 Z, \qquad v = \mu_2 D,$$

échelles métriques portées sur Au et Bv, ce qui donne, pour Z, l'échelle définie sur AB, *entre* les origines A et B, par

$$\mu_2 u + \mu_1 \operatorname{tang} \varepsilon . v = 0$$

ou, avec les axes cartésiens liés à Au et Bv,

$$x = \delta \frac{\mu_1 \operatorname{tang} \varepsilon - \mu_2}{\mu_1 \operatorname{tang} \varepsilon + \mu_2}.$$

Pour construire cette échelle par projection d'une échelle des tangentes, il suffit d'en marquer trois points (n° 7); par exemple, pour $\varepsilon = 0$, on a

$$x = -\delta \qquad \text{(origine A)};$$

---

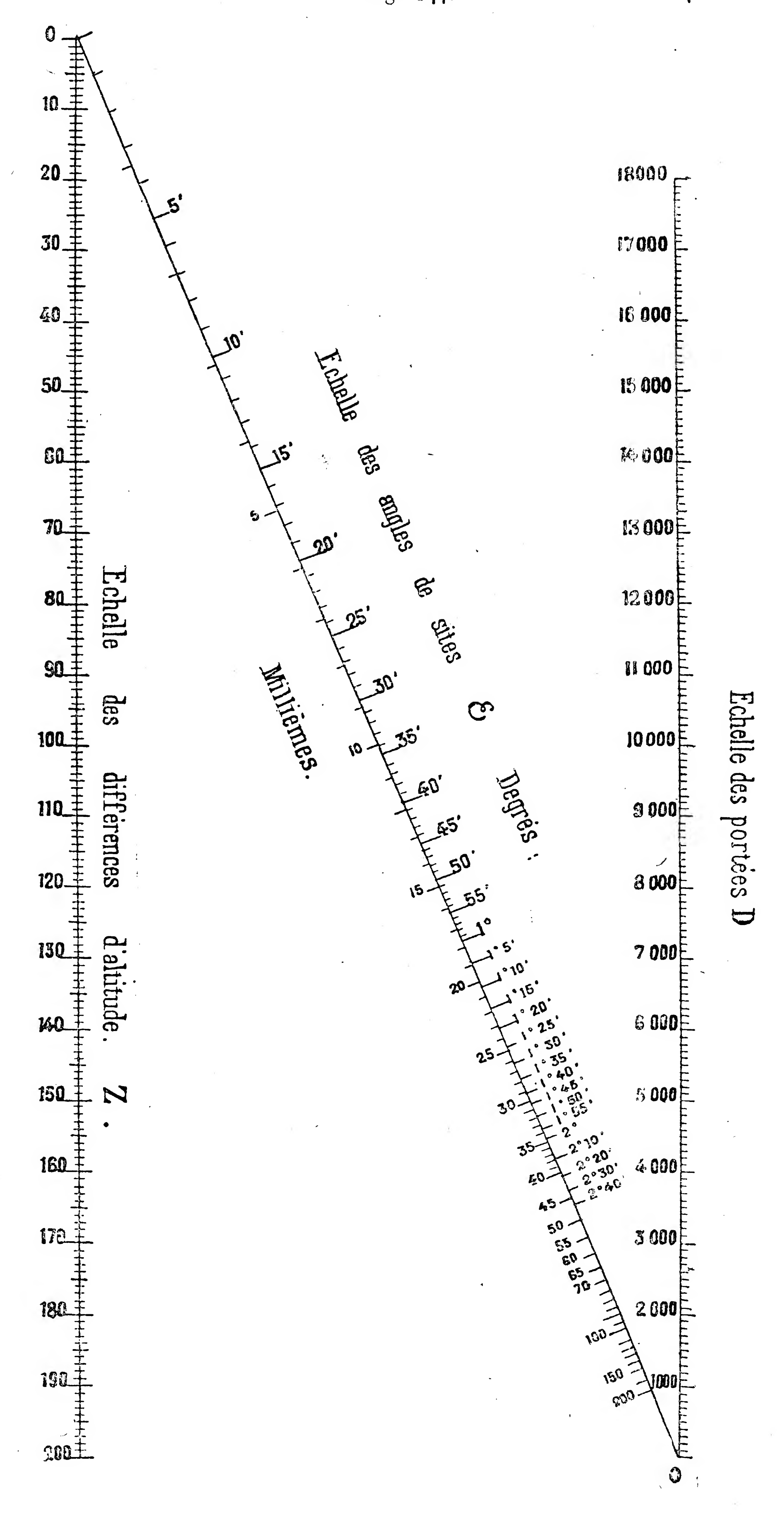
[1] Extraites de **O.60**.

Nous sommes heureux de pouvoir ici rendre hommage au précieux concours que nous ont apporté les jeunes officiers appelés successivement à collaborer aux travaux de la S. N. : l'enseigne de vaisseau Goybet, les capitaines Michel, de l'artillerie, et Desquaires, de l'infanterie, les lieutenants d'artillerie de Branges de Bourcia, de Gaillard de Lavaldène, Noël, Aubert, Giraudet de Boudemange.

C'est d'ailleurs l'enseigne (depuis lors lieutenant de vaisseau) Goybet qui nous a apporté l'idée de construire les nomogrammes des corrections atmosphériques (n° 122) et qui a, sous notre direction, exécuté les premiers d'entre eux.

Les tables ici décrites, ainsi que d'autres intéressant aussi le tir de l'artillerie (détermination des composantes de la vitesse du vent; corrections dues aux variations de vitesse initiale et de poids du projectile, etc.), ont été réunies dans des albums relatifs à chacun des calibres usuels de l'artillerie qui ont, pendant les deux dernières années de la guerre, été répandus sur le front à plusieurs milliers d'exemplaires.

Fig. 144.



Echelle des différences d'altitude. Z.
Echelle des angles de sites ε
Degrés :
Millièmes.
Echelle des portées D

pour $\varepsilon = 90°$, on a
$$x = \delta \quad \text{(origine B)};$$
pour $\tan g\varepsilon = \frac{\mu_2}{\mu_1}$, on a
$$x = 0 \quad \text{(origine O, milieu de AB)}.$$

Si l'on fait varier Z de 0^m à 200^m (par mètre) et D de 0^m à 12000^m (par 100^m), on obtient une bonne disposition en prenant
$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 0{,}01,$$
ce qui donne, pour la cote du point confondu avec O,
$$\varepsilon = 0°34'20''.$$

C'est ainsi qu'a été construit, avec $\mu_1 = 0^{mm},96$, le nomogramme inséré dans les tables graphiques de tir, dont la figure 144 est une réduction.

121. *Poids du mètre cube d'air.* — Si h est la pression atmosphérique (en millimètres), t la température (en degrés centigrades), le poids Δ du mètre cube d'air est exprimé (en grammes) par la formule
$$\Delta = \frac{1293\,h}{760(1+\alpha t)} \quad (\text{où } \alpha = 0{,}00366).$$

Pour représenter cette formule, on posera
$$u = \mu_1 h, \qquad v = \mu_2 \Delta \quad \text{(échelles métriques)};$$
d'où, pour t, l'échelle
$$1293\,\mu_2 u - 7600(1+\alpha t)\mu_1 v = 0$$
portée sur l'axe AB des origines, mais en dehors de l'intervalle des origines [en vue de placer l'échelle (Δ) entre les échelles des données], et projective de l'échelle métrique (t). Mais ici une particularité se présente, sur laquelle il y a lieu de fixer l'attention.

h étant supposé varier de 680 à 800, par millimètre, Δ de 1000 à 1398, par gramme, on est amené, pour donner aux portions utiles de ces deux échelles des longueurs sensiblement équivalentes, à prendre
$$\mu_2 = 0{,}3\,\mu_1,$$

ce qui transforme l'équation de l'échelle (Δ) en

$$3879\,u - 7600(1 + \alpha t)v = 0.$$

Mais les origines A et B sont alors rejetées loin en dehors des limites du nomogramme, et il convient de recourir à la construction résultant de la formule (2 *bis*) du n° 58.

On trouve, par exemple, au moyen de la formule à représenter, que pour $t = 40^\circ$ et $\Delta = 1815^g$, on a

$$h = 683^{mm},8.$$

Si donc on joint par une droite les points ($\Delta = 1015$) ou B_0, et ($h = 683,8$) ou A_0, lus sur les échelles (Δ) et (h) d'abord construites, le point ($t = 40^\circ$) se trouvera sur cette droite A_0B_0, et son abscisse rapportée au milieu O_0 de A_0B_0 sera donnée, en vertu de la première formule (2 *bis*) du n° 58, si l'on pose, comme à cet endroit, $O_0B_0 = \delta_0$, par

$$x = 2,6\,\delta_0.$$

Cela définit entièrement le point ($t = 40^\circ$).

De même, pour $t = 0^\circ$ et $\Delta = 1320^g$, on a

$$h = 775^{mm},8 \quad \text{et} \quad x = 3,08\,\delta_0,$$

ce qui permet de marquer le point ($t = 0^\circ$).

Sur la droite qui joint les deux points ainsi obtenus, on peut encore marquer le point ($t = 20^\circ$) en remarquant que, pour $t = 20^\circ$ et $\Delta = 1158^g$, on a

$$h = 725^{mm},4.$$

Ayant les trois points 0°, 20° et 40° de l'échelle (t), on n'a plus qu'à construire cette échelle comme projective d'une échelle métrique (1). Ainsi a été obtenu le nomogramme qui se trouve, en réduction, sur la partie de gauche de la figure 145, et qui fournit, sur les nomogrammes des corrections atmosphériques, insérés dans les tables graphiques de tir, l'axe Δ servant pour l'une des entrées du second alignement (2).

(1) Il va sans dire que si, avec le centre de projection d'abord choisi, les projetantes rencontrent le support, dans une de ses parties, sous un angle trop petit, on n'a qu'à passer, pour cette partie, à un autre centre de projection (et, par suite, aussi, à une autre position de l'échelle projetée).

(2) Par suite de la disposition adoptée pour les échelles de ce nomogramme, il est à remarquer que le sens positif de Au et Bv y a été pris de haut en bas.

122. *Angle tabulaire corrigé et dérive.* — Pour un projectile donné, des tables empiriques font connaître, pour chaque portée, la variation de cette portée due à la fois à des valeurs données du poids Δ du mètre cube d'air et de la composante longitudinale V de la vitesse du vent. Ces deux variables étant prises comme abscisse et ordonnée cartésiennes, si l'on inscrit en chaque point correspondant du plan la valeur de la variation p de la portée P, donnée par les tables empiriques, et que l'on traite l'ensemble des points cotés ainsi obtenus comme ceux de la surface du sol, sur un plan topographique, en vue de tracer les lignes de niveau, on remarque que, pour une valeur donnée de P, ces lignes de même cote p apparaissent comme des droites parallèles.

Il suit de là que la relation qui lie la variation de portée à Δ et V est représentable par un abaque à parallèles (n° **24**) et peut, par suite, se traduire, moyennant la transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées parallèles (n° **60**), en un nomogramme à points alignés, à trois échelles parallèles (n° **67**).

Mais alors que les abaques correspondant aux diverses valeurs de P ne sauraient exister sur une même feuille et devraient, en conséquence, pour chaque projectile et pour chaque charge d'un calibre donné, former un atlas dont les pages seraient numérotées par les valeurs de P (ce qui, comme on l'a déjà dit au n° **49**, aurait, en outre, l'inconvénient de ne pas permettre les interpolations à vue entre les valeurs de P), tous les nomogrammes à points alignés se prêtant à la même détermination pourront être établis sur une seule feuille ([1]).

On voit qu'en adoptant les échelles métriques (Δ) et (V) portées respectivement sur Au et Bv, on aura, pour P et p, un réseau constitué par des parallèles aux axes pour P (puisque, pour les abaques cartésiens initiaux, les droites obtenues étaient parallèles) et par des

---

([1]) On saisit là sur le vif un des avantages précédemment signalés de la méthode des points alignés. Par exemple, la figure 146 où interviennent 26 valeurs de la portée équivaut à un atlas de 26 feuilles portant chacune un abaque cartésien, et, de plus, on se rend compte, du premier coup d'œil, de la facilité de l'interpolation à vue sur ce nomogramme. Or, un tel nomogramme ayant été dressé pour chaque projectile de chaque calibre, avec une charge donnée, et certains d'entre eux comportant même une variation bien plus grande de la portée, on est à même de juger par là que la méthode des points alignés a, en l'occurrence, rendu très aisé l'établissement de tables graphiques, qui eût été absolument impraticable dans le système des abaques cartésiens.

lignes empiriquement tracées, d'après les tables, pour p. Les échelles déterminées sur chacune des droites correspondant à la portée sont, au reste, métriques.

Mais, si l'on se livre à un premier essai de construction dans les conditions strictes qui viennent d'être définies, c'est-à-dire avec une échelle (V) unique, on s'aperçoit que les droites (P) sont rapprochées de telle sorte que le tracé des lignes (p) devient à peu près illusoire. On est donc ici dans le cas d'appliquer la remarque II du n° **101** : pour chaque valeur de P (cette variable n'étant jamais prise ici comme inconnue) on choisira un axe des v distincts pour y porter l'échelle (V). Ces diverses échelles (V) toutes identiques entre elles et déduites, peut-on dire, de la première d'entre elles par une simple translation perpendiculaire à leur direction commune, engendrent dès lors un réseau (V, P) constitué par deux systèmes de droites parallèles (V) et (P), rectangulaires entre eux.

On aboutit, en définitive, au dispositif suivant dont la figure 145 fournit, en réduction, un spécimen (mortier de 220, tir plongeant; O. A. mod. 1915 D; charge S_1) : une échelle (Δ), un réseau (P, V), un réseau (P, p); *si l'on joint, au moyen de l'index servant à la lecture, le point* (Δ) *au point* (P, V), *cet index coupe, dans le réseau du milieu, la droite* (P) *en un certain point; la cote de la ligne* (p) *passant par ce point fait connaître la valeur de p cherchée* [1].

D'ailleurs l'axe (Δ) dont on se sert est celui même qui a été défini au n° **121** et sur lequel un premier alignement joignant la valeur t de la température à celle h de la pression atmosphérique fait connaître Δ.

Finalement, la valeur de Δ n'ayant pas besoin d'être lue (sinon pour repérer la position du pivot sur l'axe correspondant qui joue ici le rôle de la charnière), on reconnaît en un tel nomogramme une combinaison du principe du double alignement avec celui des points à deux cotes.

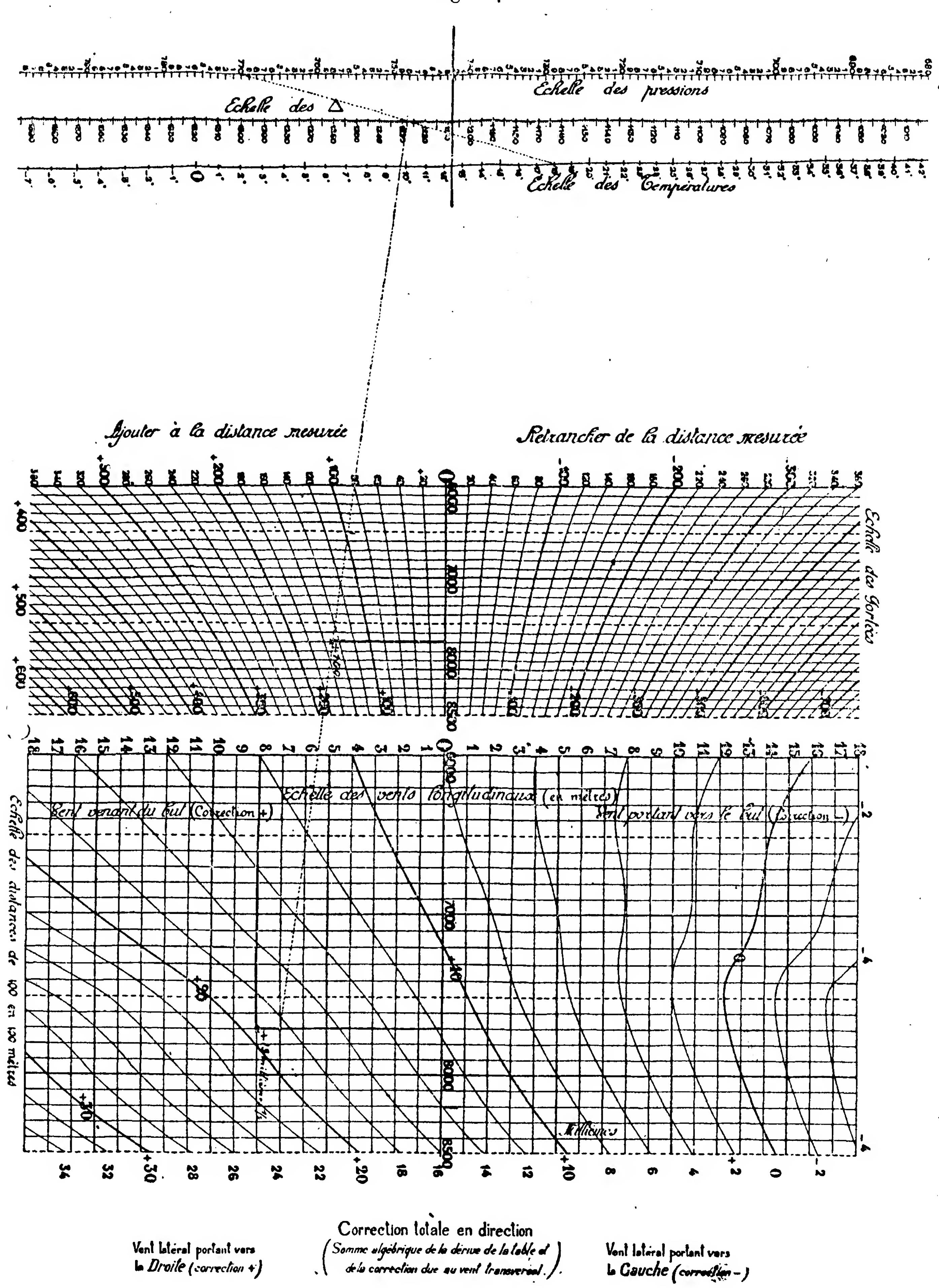
Quant à la dérive déterminée empiriquement en fonction de la composante transversale V′ de la vitesse du vent et de la portée P,

---

[1] En réalité les cotes inscrites sont les valeurs de *p changées de signe;* l'angle tabulaire dont on doit se servir étant, en effet, celui qui correspond à $P-p$, on a jugé plus normal d'inscrire la cote qui, *ajoutée algébriquement* à P, fait connaître la portée fictive à laquelle correspond l'angle corrigé, lu dans la table correspondante, dont on doit faire usage.

elle peut être représentée par des courbes d'égale cote (tracées encore

Fig. 145.



à la manière des lignes de niveau d'un plan topographique) sur le réseau (P, V) précédent lorsqu'on fait, cette fois, correspondre

l'échelle des vitesses à V'. Ce sont ces courbes d'égale dérive qui sont tracées sur le réseau (P, V) de la figure 145.

Il n'est sans doute pas sans intérêt de rappeler que l'emploi de ces nomogrammes a réduit environ d'un quart d'heure à moins de trois minutes le temps nécessité par l'obtention des éléments initiaux du tir de l'artillerie.

123. *Angle initial de tir.* — Si α est l'angle tabulaire de tir, corrigé des conditions atmosphériques (n° **122**), ε l'angle de site (n° **121**), φ l'angle initial de tir effectif, celui-ci se déduit des deux précédents par l'équation (2) du n° **120**, c'est-à-dire

$$(1 + \cos 2\varphi) \operatorname{tang} \varepsilon = \sin 2\varphi - \sin 2\alpha,$$

dans laquelle, pratiquement, ε varie de -5° à 5°, α et φ de 0° à 45°.

Pour obtenir la représentation en points alignés de cette équation, il suffit de poser

$$u = \mu_1 \operatorname{tang} \varepsilon, \qquad v = \mu_2 \sin 2\alpha,$$

échelles immédiatement construites sur les axes quand on dispose d'un étalon des tangentes et d'un étalon des sinus. Cela donne pour l'échelle (φ) l'équation

$$\mu_2(1 + \cos 2\varphi) u + \mu_1 v = \mu_1 \mu_2 \sin 2\varphi.$$

Suivant que l'on fait, dans cette équation, $u = 0$ ou $v = 0$, on obtient

$$v = \mu_2 \sin 2\varphi \qquad \text{ou} \qquad u = \mu_1 \operatorname{tang} \varphi,$$

formules qui, comparées aux deux précédentes, montrent que les projections de l'échelle (φ) faites, à partir de A et de B, respectivement sur Bv et sur Au, se confondent avec les échelles (α) et (ε) déjà construites.

De là, pour la construction de l'échelle (φ), le procédé le plus simple possible. Malheureusement, vu les limites entre lesquelles les variables restent comprises, cette construction ne serait utilisable qu'entre 0° et 5°. Par ailleurs, le grand écart entre les limitations de ε et α conduit, d'une part, à construire deux nomogrammes distincts, l'un pour les ε positifs, l'autre pour les ε négatifs, et, d'autre part, à fractionner sur chacun d'eux l'échelle (α), et par suite aussi l'échelle (φ), en quatre tronçons; la construction ci-dessus ne sau-

rait convenir qu'à celui d'entre eux qui comprend à la fois les portions des échelles (ε) et (α) s'étendant de 0° à 5°; pour les autres, l'origine B s'éloigne de plus en plus des limites de la feuille.

Mais, en usant de la formule (2 *bis*) du n° 58, on peut, pour chacun des nomogrammes partiels, déterminer individuellement un certain nombre de points (φ) de cote ronde, puis, au moyen de ces points, construire le support de l'échelle, et projeter enfin, sur ce support, les points de l'échelle (α), à partir du point $A(\varepsilon = 0)$. C'est ainsi qu'a été construit, pour les valeurs négatives de ε (but moins élevé que la pièce), le nomogramme reproduit sur la figure 146. La graduation de ε en degrés y a d'ailleurs été doublée par une graduation en millièmes, celle de α en degrés par une graduation en vingtièmes de hausse.

Un second nomogramme a été construit de même pour les valeurs positives de ε (but plus élevé que la pièce) ([1]).

Il est, au reste, intéressant de se rendre compte de la nature du support de l'échelle (φ). Si, en effet, on exprime $\sin 2\varphi$ et $\cos 2\varphi$ en fonction de $\text{tang}\,\varphi$, on voit que l'équation ci-dessus de cette échelle peut s'écrire

$$\mu_1 \,\text{tang}^2 \varphi . v - 2\mu_1\mu_2 \,\text{tang}\,\varphi + 2\mu_2 u + \mu_1 v = 0,$$

dont, ainsi qu'on l'a vu au n° 65, le support a pour équation en u et v

$$\mu_1\mu_2^2 - v(2\mu_2 u + \mu_1 v) = 0,$$

ellipse passant par les points $v = 0$ (ou B) et $2\mu_2 u + \mu_1 v = 0$ $\left(\text{qui divise AB dans le rapport } -\frac{\mu_1}{2\mu_1}\right)$ et dont les tangentes en ces points sont parallèles aux axes.

Le nomogramme de la figure 146 a été construit avec

$$\mu_1 = 5\mu_2.$$

([1]) Dans chaque album, ces deux nomogrammes figurent sur la même feuille.

CHAPITRE VI.

REPRÉSENTATION AU MOYEN D'ÉLÉMENTS MOBILES.

I. — Index mobiles divers.

124. *Index mobiles en général.* — Pratiquement, nous l'avons dit, on se sert le plus ordinairement comme index, pour prendre les alignements que comporte la méthode de représentation étudiée dans les Chapitres IV et V, d'un fil fin tendu; mais on peut tout aussi bien se servir d'un trait rectiligne fin tracé sur un transparent. Dans le procédé des abaques hexagonaux (Chap. II, section III), on a de même recours, pour faire les lectures, à un transparent à trois index rectilignes concourants.

Cela conduit tout naturellement à l'idée d'utiliser des index d'autre nature, marqués sur un transparent que l'on peut déplacer sur la partie considérée comme fixe du nomogramme. Cette idée a été pour la première fois envisagée d'une façon systématique par M. Goedseels, alors professeur à l'École de guerre de Bruxelles, dans un important Mémoire (¹) où il s'est spécialement étendu sur le cas des index en équerre (nº **128**). Mais certains procédés particuliers imaginés par divers auteurs en vue d'applications particulières, antérieurement ou postérieurement à ce Mémoire, viennent tout naturellement se rattacher à ce sujet pris dans son ensemble.

125. *Index parallèles.* — En premier lieu, si le transparent porte, au lieu d'un seul index, un faisceau d'index parallèles, également espacés, et suffisamment rapprochés pour que l'interpolation à vue permette d'insérer entre eux les droites de ce faisceau de parallèles non effectivement tracées, on obtient un mode de représentation

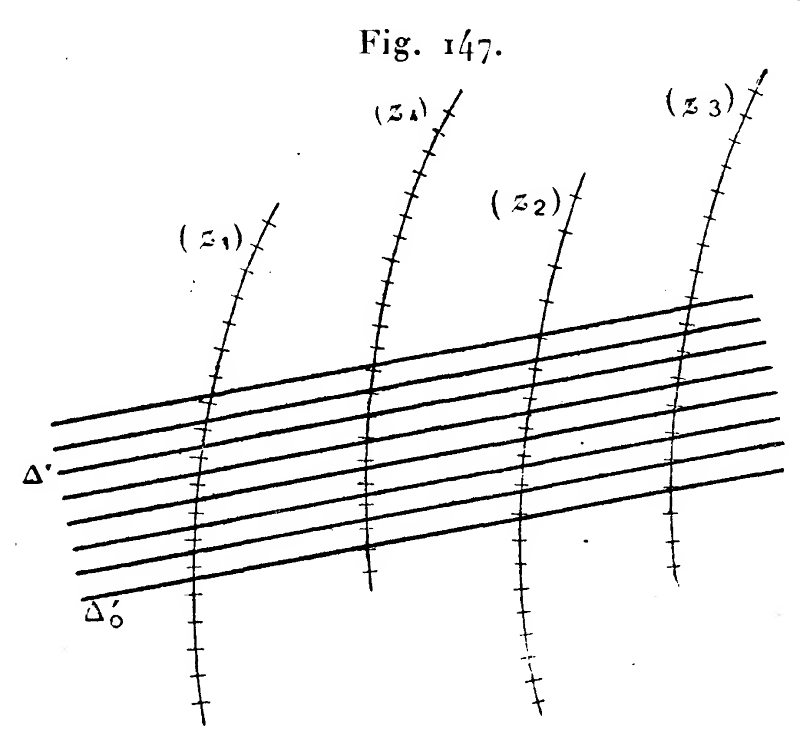
---

(¹) *Les procédés pour simplifier les calculs ramenés à l'emploi de deux transversales qui se rencontrent au sein d'une graduation* (Bruxelles, 1898).

applicable à des équations à quatre variables, qui a été proposé par M. M. Beghin [1].

Sur le nomogramme portant quatre échelles curvilignes (z_1), (z_2), (z_3) *et* (z_4), *on applique le transparent portant les index équidistants* (*fig.* 147), *de façon que l'un d'eux*, Δ'_0, *passe par les*

Fig. 147.



points cotés z_1 *et* z_2. *Celui*, Δ', *qui passe alors par le point coté* z_3, *rencontre alors la quatrième échelle en un point dont la cote est* z_4.

Il suffit d'exprimer, au moyen des coordonnées cartésiennes

$$x = \frac{f_i}{h_i}, \qquad y = \frac{g_i}{h_i},$$

le parallélisme des droites définies, d'une part par les points (z_1) et (z_2), de l'autre par les points (z_3) et (z_4), pour avoir la forme de l'équation représentée

$$\text{(E)} \qquad (f_1 h_2 - f_2 h_1)(g_3 h_4 - g_4 h_3) - (g_1 h_2 - g_2 h_1)(f_3 h_4 - f_4 h_3) = 0.$$

Si l'on fait $z_4 \equiv z_1$, on tombe sur un mode de représentation d'une équation à trois variables dans lequel, à la variable z_1, correspondent deux échelles distinctes (z_1) et (z'_1).

Rappelons, comme nous avons déjà eu l'occasion de le dire, que cela suppose qu'avec un tel nomogramme on n'aura jamais à prendre z_1 pour inconnue.

Il faut observer d'ailleurs que, dans la plupart des formules usitées

---

[1] *Génie civil*, t. XXII, p. 124 (1892).

en pratique, il y a une ou plusieurs variables (souvent même toutes les variables, moins une) pour lesquelles cette condition a lieu.

Le bénéfice que l'on pourra avoir à retirer de ce procédé sera de pouvoir, dans certains cas, substituer à un nomogramme comportant des *lignes cotées* un autre nomogramme sur lequel ne figurent que des *points cotés*, dont la supériorité, tant au point de vue de la facilité de la construction que de la commodité et de la précision de la lecture, a déjà été signalée (n° **29**).

Exemple (¹) : *Mur de soutènement pour des terres profilées suivant leur talus naturel.* — Reprenons l'équation du n° **46**

$$k^2 + kp\sin\varphi\cos\varphi - \frac{p}{3}\cos^2\varphi = 0.$$

Nous avons vu qu'elle est représentée par le concours d'un système de cercles et de deux systèmes de droites; en revanche, elle ne l'est pas au moyen de trois systèmes de droites concourantes, ni, par conséquent, non plus, corrélativement, par points alignés.

Le procédé des index parallèles permet néanmoins, comme on va voir, de représenter cette équation uniquement au moyen de systèmes de points cotés; c'est même à l'occasion de cette application que M. Beghin a fait connaître le principe de la méthode.

L'équation peut s'écrire, λ, μ, ν étant des paramètres actuellement indéterminés,

$$-\frac{\mu}{\sin\varphi\cos\varphi}\,\frac{\lambda\nu}{\mu}k^2 - \lambda p\left(\nu k - \frac{\nu\cot\varphi}{3}\right) = 0.$$

Elle rentre alors dans le type général ci-dessus, moyennant les identifications (²) $h_1 \equiv h_2 \equiv h_3 \equiv h_4 \equiv 1$, puis

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv \frac{\mu}{\sin\varphi\cos\varphi} \equiv \frac{2\mu}{\sin 2\varphi}, & g_1 &\equiv 0,\\ f_3 &\equiv \frac{\nu\cot\varphi}{3}, & g_3 &\equiv 0,\\ f_2 &\equiv 0, & g_2 &\equiv \lambda p,\\ f_4 &\equiv \nu k, & g_4 &\equiv \frac{\lambda\nu}{\mu}k^2. \end{aligned}$$

(¹) La modification du profilomètre Siégler, que nous avions proposée naguère (*Annales des Ponts et Chaussées*, avril 1883, p. 402), peut être rattachée à titre d'exemple à ce procédé. Mais ce cas particulier ne saurait pas plus être regardé comme le point de départ de la méthode que le nomogramme de Möbius pour les points alignés à une cote, ou celui de Kutter et Ganguillet pour les points à deux cotes.

(²) On peut ici, bien évidemment, faire correspondre deux échelles à la variable φ, attendu que cet angle, qui représente l'inclinaison naturelle des terres employées, sur l'horizon, n'a, en aucun cas, à être pris comme inconnue.

Les échelles (φ), (φ'), (p) et (k) seront dès lors définies par les formules

$$(\varphi) \qquad x = \frac{2\mu}{\sin 2\varphi}, \qquad y = 0,$$

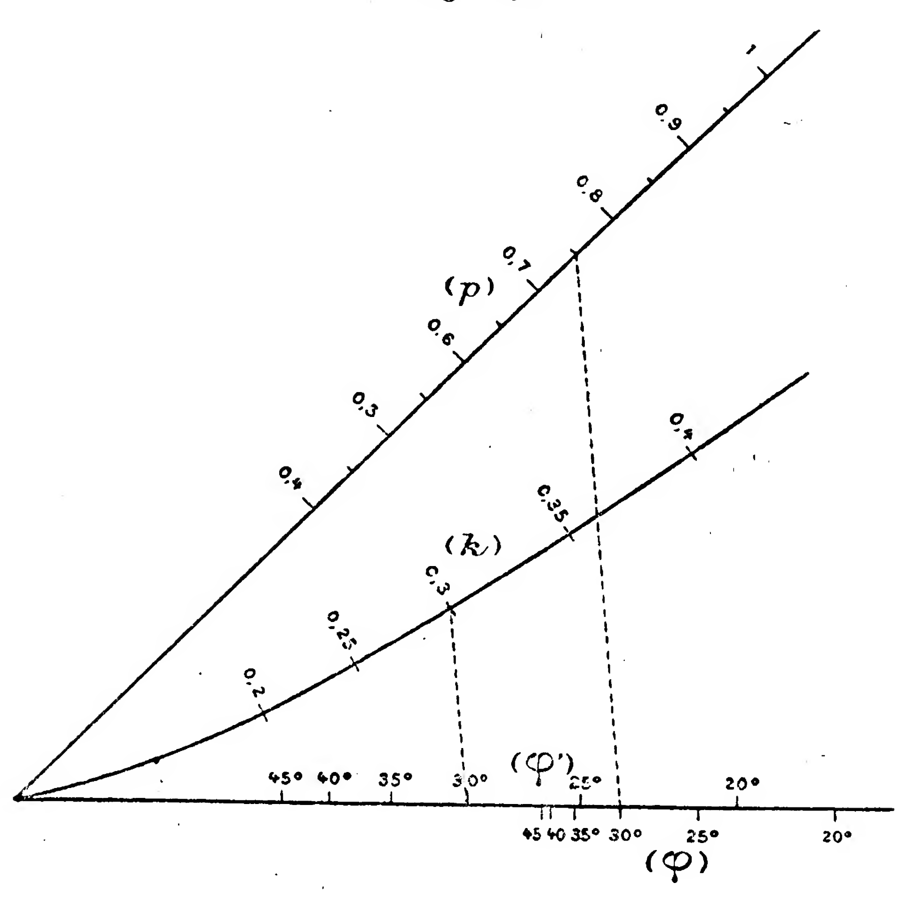
$$(\varphi') \qquad x = \frac{\nu \cot \varphi}{3}, \qquad y = 0,$$

$$(p) \qquad x = 0, \qquad y = \lambda p,$$

$$(k) \qquad x = \nu k, \qquad y = \frac{\lambda \nu}{\mu} k^2.$$

Les deux premières auront pour support l'axe Ox, de part et d'autre duquel

Fig. 148.



elles seront marquées, la troisième l'axe Oy, la quatrième la parabole dont l'équation est

$$y = \frac{\lambda x^2}{\mu \nu}.$$

Si l'on prend $\lambda = 8^{cm}$, $\mu = 2^{cm}$, $\nu = 6^{cm}$, on a

$$(\varphi) \qquad x = \frac{4^{c}}{\sin 2\varphi}, \qquad y = 0,$$

$$(\varphi') \qquad x = 2^{cm}.\cot \varphi, \qquad y = 0,$$

$$(p) \qquad x = 0, \qquad y = p.8^{cm},$$

$$(k) \qquad x = k.6^{Cm}, \qquad y = k^2.24^{am}.$$

Pour les mêmes limites des variables qu'au n° **46**, et si l'on prend les axes

Ox et Oy inclinés à 45° l'un sur l'autre, on obtient le nomogramme de la figure 148. On a, sur cette figure, tracé en pointillé les positions des parallèles correspondant à l'exemple numérique du n° 46, savoir :

$$\varphi = 30°, \qquad p = 0,75.$$

Le nomogramme donne bien encore

$$k = 0,3.$$

126. *Rattachement au principe du double alignement.* — Si l'on se reporte au n° **91**, on voit qu'un nomogramme à double alignement, dans le cas de la charnière rectiligne, provient de la représentation simultanée, avec un axe Au commun, des deux équations [1]

$$\begin{vmatrix} \zeta & -1 & 0 \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \zeta & -1 & 0 \\ f_3 & g_3 & h_3 \\ f_4 & g_4 & h_4 \end{vmatrix} = 0,$$

lorsqu'on fait correspondre la première colonne au terme constant, la seconde au terme en u, la troisième au terme en v, de façon que l'équation de chacun des systèmes (z_i) s'écrive

$$f_i + ug_i + vh_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

On voit que le résultat de l'élimination de ζ entre les deux équations ci-dessus coïncide précisément avec l'équation (E) du numéro précédent, qui exprime le parallélisme entre les alignements (z_1, z_2) et (z_3, z_4) pour les points définis par

$$x = \frac{f_i}{h_i}, \qquad y = \frac{g_i}{h_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

en coordonnées cartésiennes.

De là un moyen des plus simples de transformer tout nomogramme à double alignement, dans le cas d'une charnière rectiligne, en nomogramme à index parallèles.

Exemple : Vitesse d'écoulement de l'eau dans les tuyaux découverts.—

---

(1) On remarquera une variante entre les notations ici employées et celles du n° 91. Ce changement n'a d'autre but que d'identifier l'équation ici représentée par double alignement avec l'équation (E) du n° 125 pour laquelle les présentes notations semblent plus naturelles.

Dans cet exemple, traité par le double alignement au n° 96, la dissociation est effectuée au moyen des équations

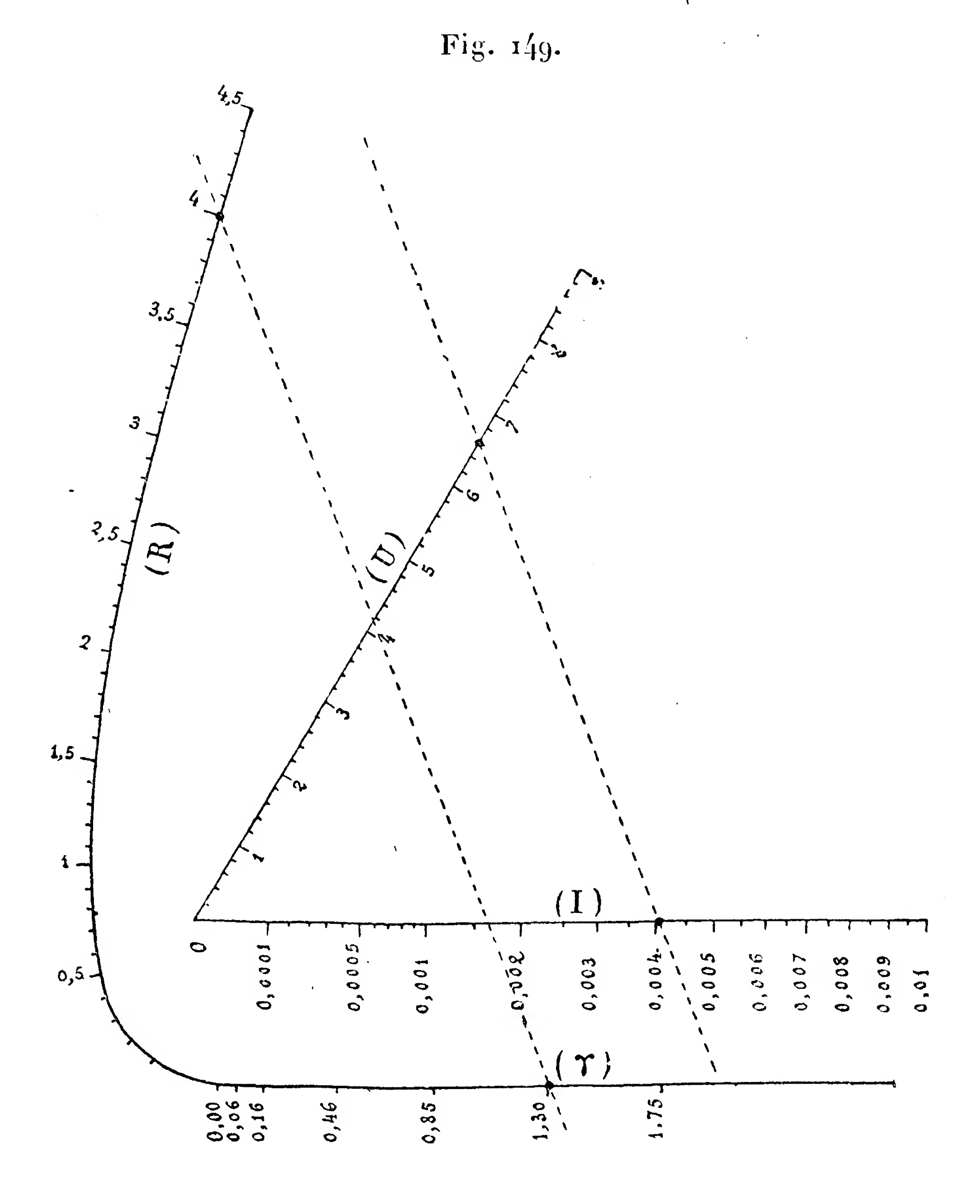
$$\begin{vmatrix} f & -1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \\ -\sqrt{R} & R & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} f & -1 & 0 \\ 87\sqrt{I} & 0 & 1 \\ 0 & U & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On aura donc un nomogramme à index parallèles en construisant les échelles

$$(x = \gamma, \quad y = 0), \qquad (x = 87\sqrt{I}, \ y = 0),$$
$$(x = -\sqrt{R}, \ y = R), \qquad (x = 0, \quad y = U).$$

Le nomogramme correspondant, sur lequel on a donné au système Oxy pour (I) et (U) une translation par rapport au système Oxy pour (γ) et (R)

Fig. 149.



(une telle translation n'altérant pas le parallélisme des index correspondants), est représenté par la figure 149, sur laquelle on a tracé en pointillé les index

parallèles pour l'exemple

$$\gamma = 1,3, \qquad R = 4, \qquad I = 0,004;$$

d'où

$$U = 6,6.$$

M. Soreau qui a, le premier, indiqué ce mode de transformation des doubles alignements en index parallèles ([1]), en faisant remarquer qu'il se réduisait à une transformation homographique rejetant à l'infini la charnière rectiligne du double alignement, en a donné une expression analytique des plus simples en utilisant la mise sous forme de déterminant par lui obtenue pour l'équation représentée [(1 *bis*) du n° 91]. Récrivons cette équation en tenant compte du changement de notation ici adopté

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} f_1 & h_1 & 0 & g_1 \\ f_2 & h_2 & 0 & g_2 \\ f_3 & 0 & h_3 & g_3 \\ f_4 & 0 & h_4 & g_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Si on l'interprète directement en coordonnées cartésiennes (n° 62), elle exprime que les quatre points

$$(z_1)_1 \qquad x = \frac{f_1}{g_t}, \qquad y = \frac{h_1}{g_1}, \qquad z = 0,$$

$$(z_2)_1 \qquad x = \frac{f_2}{g_2}, \qquad y = \frac{h_2}{g_2}, \qquad z = 0,$$

$$(z_3)_1 \qquad x = \frac{f_3}{g_3}, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{h_3}{g_3},$$

$$(z_4)_1 \qquad x = \frac{f_4}{g_4}, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{h_4}{g_4}$$

sont dans un même plan. Par suite, la droite qui joint les points (z_1) et (z_2) situés dans le plan Oxy, et celle qui joint les points (z_3) et (z_4) situés dans le plan Oxz, se coupent sur Ox. Rabattant le plan Oxz sur Oxy autour de Ox (comme on le fait du plan vertical sur le plan horizontal en Géométrie descriptive), on obtient le nomogramme à double alignement de l'équation (1), Or, une propriété fondamentale des déterminants permet de transformer immédiatement cette

([1]) *Contribution...*, n° 138.

équation en

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 0 & h_1 \\ f_2 & g_2 & 0 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 & h_3 \\ f_4 & g_4 & h_4 & h_4 \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime cette fois que les quatre points

$$(z_1)_2 \qquad x = \frac{f_1}{h_1}, \qquad y = \frac{g_1}{h_1}, \qquad z = 0,$$

$$(z_2)_2 \qquad x = \frac{f_2}{h_2}, \qquad y = \frac{g_2}{h_2}, \qquad z = 0,$$

$$(z_3)_2 \qquad x = \frac{f_3}{h_3}, \qquad y = \frac{g_3}{h_3}, \qquad z = 1,$$

$$(z_4)_2 \qquad x = \frac{f_4}{h_4}, \qquad y = \frac{g_4}{h_4}, \qquad z = 1,$$

sont dans un même plan. Mais ici les droites (z_1, z_2) et (z_3, z_4) sont dans les plans parallèles $z = 0$ et $z = 1$; elles sont donc parallèles entre elles, et il en est de même de leurs projections sur Oxy. Il suffit donc de projeter l'ensemble ci-dessus sur ce plan, en y construisant les échelles définies par les valeurs de x et y pour obtenir le nomogramme à index parallèles demandé.

127. *Couples successifs d'index parallèles. Cas des échelles circulaires concentriques.* — On peut évidemment, grâce à une dissociation convenable de certains types d'équation, les représenter au moyen de couples successifs d'index parallèles, de même que l'on a précédemment envisagé la multiplicité des alignements (n° **100**). En voici un exemple remarquable : pour représenter l'équation

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = 0,$$

M. Soreau a eu l'idée de recourir à la disposition suivante [1] : sur deux cercles de centre O (*fig.* 150) (que l'on pourrait théoriquement prendre coïncidents, ce qui aurait pratiquement l'inconvénient d'amener de la confusion entre les échelles dont il va être parlé), portons, à partir des origines A et A′, situées sur un même

---

[1] *Nouveaux types...*, p. 44.

diamètre, les échelles définies par

$$\text{arc A M}_1 = r f_1, \qquad \text{arc A M}_2 = r f_2,$$
$$\text{arc A}' \text{M}_3 = r' f_3, \qquad \text{arc A}' \text{M}_4 = r' f_4,$$

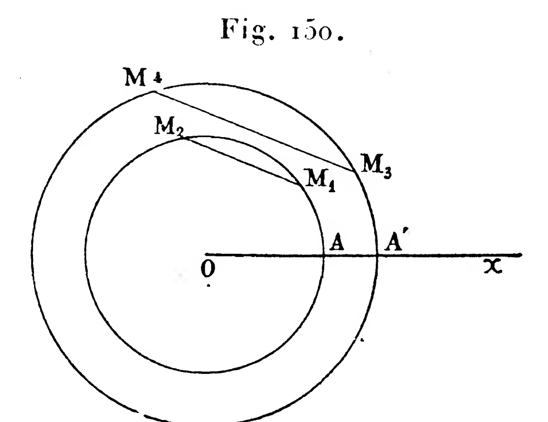
r et r' étant les rayons OA et OA'.

Si les fonctions f_i sont telles que

$$f_1 + f_2 = f_3 + f_4,$$

les milieux des arcs M_1M_2 et M_3M_4 sont sur un même diamètre, et par suite *les cordes* M_1M_2 et M_3M_4 *sont parallèles.*

Fig. 150.



Il suffit donc de disposer deux index suivant les alignements parallèles (z_1, z_2), (z_3, z_4) pour représenter, au moyen des échelles circulaires qui viennent d'être construites, l'équation à quatre variables considérée.

Pour représenter l'équation à n variables ci-dessus, il suffit de l'envisager comme le résultat de l'élimination des variables auxiliaires $\zeta_4, \zeta_5, \ldots$ entre les équations

$$f_1 + f_2 = -f_3 + \zeta_4,$$
$$\zeta_4 + f_4 = -f_5 + \zeta_5,$$
$$\zeta_5 + f_6 = -f_7 + \zeta_6,$$

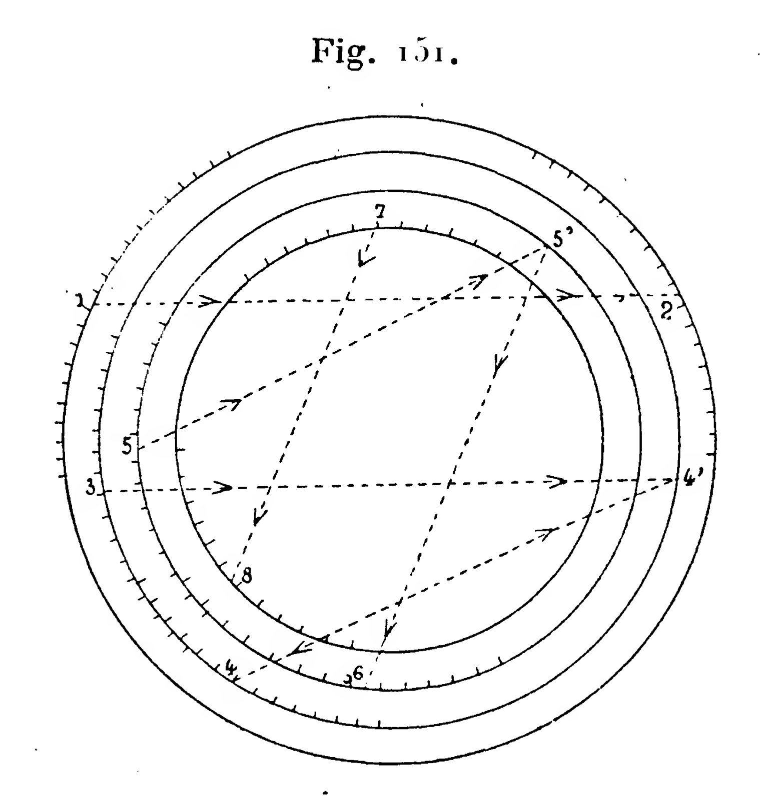
la dernière étant

$$\zeta_{p+1} + f_{2p-2} = -f_{2p-1} - f_{2p} \qquad (\text{si } n = 2p),$$
$$\zeta_{p+2} + f_{2p} \quad = -f_{2p+1} \qquad (\text{si } n = 2p+1).$$

Chacune des équations étant représentée par deux cercles concentriques (tels que, pour deux consécutives de ces équations, un de ces cercles soit commun), on voit que le nomogramme se composera de cercles concentriques **c**, **c**', **c**'', ... portant le premier les échelles (z_1)

et (z_2), le second (z_3) et (z_4), le troisième (z_5) et (z_6), et ainsi de suite, ce qui conduit à un nombre de cercles concentriques égal au plus grand entier contenu dans $n+1$. En outre, les échelles fictives (ζ_4), (ζ_5), ... seraient portées respectivement par les cercles **c**, **c**$''$, ... Somme toute, si, pour simplifier, nous représentons chaque point coté (z_i) par i, et chaque point (ζ_i) (déterminé par la rencontre d'un certain alignement avec le cercle **c** correspondant) par i', le mode d'emploi du nomogramme général se réduira à ceci (*fig.* 151) :

Fig. 151.



Un des index du transparent mobile étant mis en coïncidence avec la droite qui joint les points 1 et 2 de **c**, on considère l'index parallèle passant par le point 3; il coupe **c**$'$ en un point 4$'$ autour duquel on le fait pivoter pour l'amener à passer par le point 4 du même cercle; on prend alors l'index parallèle qui passe par le point 5 de **c**$''$; il coupe ce cercle en 5$'$; on le fait pivoter autour de ce point, et ainsi de suite.

Il n'y a d'ailleurs jamais de confusion entre les divers cercles quand il s'agit d'y prendre un pivot, le pivot intervenant entre les points cotés (z_{2i-1}) et (z_{2i}) étant toujours situé sur le cercle **c** qui porte à la fois ces deux échelles.

Ce mode de représentation pourra être utilisé pour les équations de la forme

$$f_1 f_2 \ldots f_n = 1$$

ou

$$\log f_1 + \log f_2 + \ldots + \log f_n = 0,$$

quand on se sera procuré un étalon logarithmique circulaire. M. Soreau en a fait une intéressante application [1] à la formule de Sarrau donnant la vitesse initiale d'un projectile, formule qui rentre dans le type précédent avec $n = 8$.

128. *Index en équerre.* — Si les index portés par le transparent sont deux droites rectangulaires, c'est-à-dire forment une équerre, on tombe sur un mode de représentation envisagé pour la première fois par M. Goedseels [2], mais que M. Soreau a depuis lors rattaché à celui par index parallèles en faisant remarquer qu'une rotation de 90° de l'ensemble de deux des systèmes (z_3) et (z_4) par rapport à l'ensemble des deux autres (z_1) et (z_2) suffit pour passer des index parallèles aux index en équerre [3].

Il suit de là que le type d'équation représentable par index à équerre est encore le type (E) du n° **125**, c'est-à-dire

$$(E) \qquad (f_1 h_2 - f_2 h_1)(g_3 h_4 - g_4 h_3) - (g_1 h_2 - g_2 h_1)(f_3 h_4 - f_4 h_3) = 0.$$

Seulement ici les points (z_1) et (z_2) restant définis par

$$x = \frac{f_1}{h_1}, \qquad y = \frac{g_1}{h_1},$$
$$x = \frac{f_2}{h_2}, \qquad y = \frac{g_2}{h_2},$$

les points (z_3) et (z_4) le seront par

$$x = \frac{g_3}{h_3}, \qquad y = -\frac{f_3}{h_3},$$
$$x = \frac{g_4}{h_4}, \qquad y = -\frac{f_4}{h_4}.$$

Exemple : Coordonnées rectangulaires dans les levers tachéométriques. — C'est à M. Goedseels que nous empruntons cet exemple.

Soient l la lecture stadimétrique, z la distance zénithale, α l'azimut donnés pour un point par le tachéomètre, X, Y, Z les coordonnées rectangulaires de

---

(1) *Nouveaux types...*, p. 46.

(2) *Loc. cit.*, au renvoi de la page 365.

(3) Une telle modification, introduite dans les nomogrammes à échelles circulaires concentriques du numéro précédent, apporterait à leur mode d'emploi une incontestable simplification.

ce point. On a, en représentant par C une constante instrumentale,

$$(1)\qquad X = l(C\sin z + \cos z)\sin z\cos\alpha,$$

$$(2)\qquad Y = l(C\sin z + \cos z)\sin z\sin\alpha,$$

$$(3)\qquad Z = l(C\sin z + \cos z)\cos z,$$

ou, en supprimant le terme $l\cos^2 z$, pratiquement négligeable,

$$(3')\qquad Z = \frac{l}{2}C\sin 2z.$$

On voit que les formules (1), (2) et (3′) se ramènent à une seule équation

$$(4)\qquad z_4 = z_2(C\sin z_3 + \cos z_3)\sin z_3\cos z_1,$$

grâce aux identifications

$$(1)_1\qquad z_1 \equiv \alpha,\qquad z_2 \equiv l,\qquad z_3 \equiv z,\qquad z_4 \equiv X,$$

$$(2)_1\qquad z_1 \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha,\qquad z_2 \equiv l,\qquad z_3 \equiv z,\qquad z_4 \equiv Y,$$

$$(3)_1\qquad z_1 \equiv \frac{\pi}{2} - 2z,\qquad z_2 \equiv \frac{l}{2},\qquad z_3 \equiv \frac{\pi}{2},\qquad z_4 \equiv Z.$$

Bornons-nous donc à représenter l'équation (4). Or, elle peut s'écrire, m, n, p étant trois paramètres arbitraires dont on disposera par la suite,

$$(-p\cos z_1)\left[n\left(\sin^2 z_3 + \frac{1}{C}\sin z_3\cos z_3\right)\right] + \left(-\frac{mnp}{z_2}\right)\left(-\frac{z_4}{mC}\right) = 0.$$

Sous cette forme, elle rentre immédiatement dans le type général (E) ci-dessus, où l'on a fait $h_1 \equiv h_2 \equiv h_3 \equiv h_4 \equiv 1$, grâce aux identifications

$$f_1 \equiv 0,\qquad g_1 \equiv p\cos z_1,$$

$$f_2 \equiv \frac{mnp}{z^2},\qquad g_2 \equiv 0,$$

$$g_3 \equiv 0,\qquad f_3 \equiv -n\left(\sin^2 z_3 + \frac{1}{C}\sin z_3\cos z_3\right),$$

$$g_4 \equiv \frac{z_4}{mC},\qquad f_4 \equiv 0.$$

Les points (z_1) et (z_3) sont donc distribués sur Oy, de part et d'autre de l'origine, les points (z_2) et (z_4) sur la partié positive de Ox; on distinguera d'ailleurs ces derniers les uns des autres en plaçant les graduations correspondantes de part et d'autre de Ox.

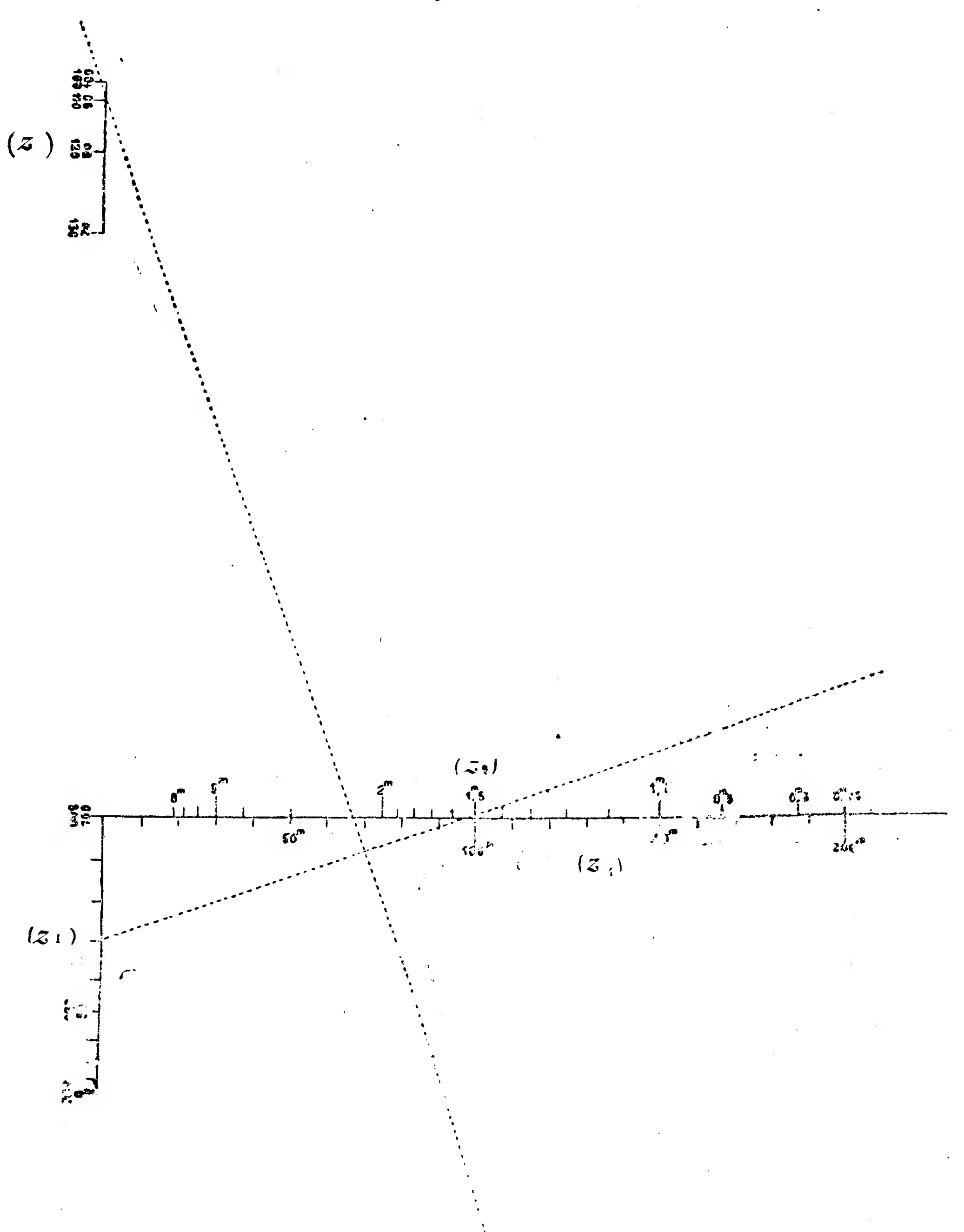
Pour un tachéomètre dont la constante C est égale à 100, ce qui est le cas ordinaire, et en donnant aux paramètres m, n, p les valeurs

$$m = 15,\qquad n = \frac{1}{7,5},\qquad p = \frac{1}{20},$$

M. Goedseels a obtenu le nomogramme dont la figure 152 est la réduction à la moitié.

Les graduations angulaires y sont faites en grades (¹).

Fig. 152.



Prenons l'exemple numérique pour lequel les données sont

$$l = 1,54, \qquad a = 70^{g}, \qquad z = 93^{g},$$

(¹) Suivant le conseil donné par le colonel Goulier, pour la graduation des mires, les chiffraisons de (z_1) et de (z_2) ont été inscrites de façon que le sens croissant de la graduation soit dirigé vers la droite du chiffre lu normalement. Ce conseil n'a pas été suivi en ce qui concerne la chiffraison de (z_2), parce que, le nomogramme étant tenu comme l'indique la figure, les chiffres seraient lus à l'envers.

d'où l'on déduit immédiatement

$$\frac{l}{2} = 0,77, \qquad \frac{\pi}{2} - a = 30^g, \qquad \frac{\pi}{2} - 2z = 314^g,$$

ce dernier angle, pour être compris entre 0 et $2\pi = 400^g$, ayant été augmenté de 2π.

Les trois positions de l'équerre, dont la première seule a été marquée en pointillé sur la figure, donnent successivement :

Pour $z_1 = 70$, $z_2 = 1,54$, $z_3 = 93$,

$$X = z_4 = 66^m;$$

Pour $z_1 = 30$, $z_2 = 1,54$, $z_3 = 93$,

$$Y = z_4 = 134^m;$$

Pour $z_1 = 314$, $z_2 = 0,77$, $z_3 = 100$,

$$Z = z_4 = 8^m.$$

129. *Index en équerre à pivot fixe ou à sommet guidé.* — Pour approprier les index en équerre à la représentation d'une équation à trois variables seulement, il faut soit remplacer une des quatre variables du type précédent par une constante, soit rendre identiques deux de ses quatre échelles ponctuelles. Dans le premier cas, l'une des branches de l'équerre se trouve pivoter autour d'un point fixe. En voici un exemple, dû à M. Soreau [1] :

Exemple d'index en équerre à pivot fixe : Vitesse de l'écoulement de l'eau par un orifice rectangulaire noyé. — La formule à représenter, où V est la vitesse d'écoulement (en m. par sec.), h_1 et h_2 les cotes (en m.) des bords horizontaux de l'orifice par rapport à la surface libre en amont est

$$V = 2,953 \frac{h_1^{\frac{3}{2}} - h_2^{\frac{3}{2}}}{h_1 - h_2},$$

qui peut s'écrire

$$0,338\,V = \frac{h_1^{\frac{3}{2}} - h_2^{\frac{3}{2}}}{h_1 - h_2}.$$

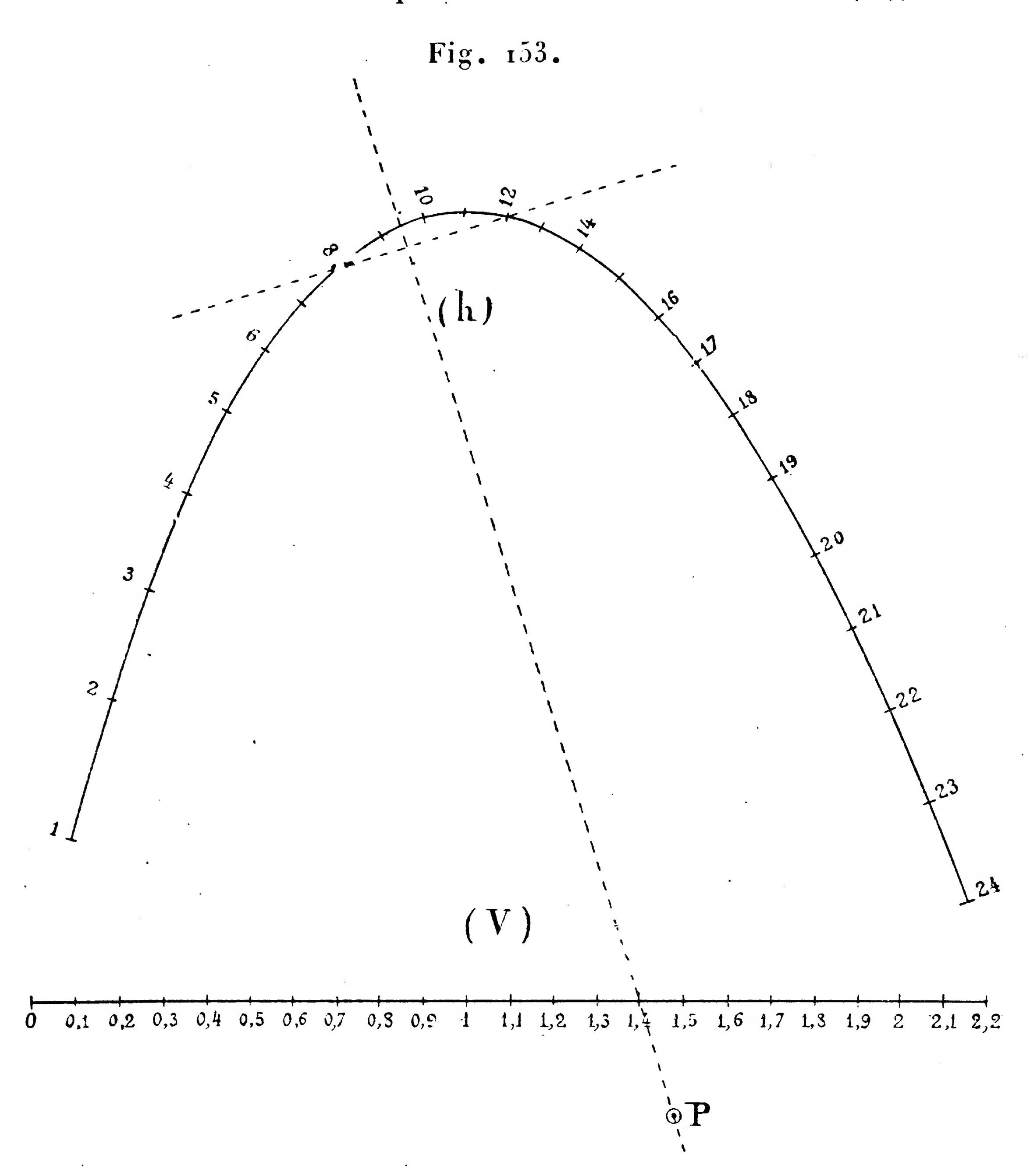
(1) *Contribution...*, p. 385.

Mise sous la forme (2) du n° **126**, cette équation devient

$$\begin{vmatrix} 0,338\,V & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ h_1^{\frac{3}{2}} & h_1 & 1 & 1 \\ h_2^{\frac{3}{2}} & h_2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Afin d'obtenir une courbure plus accentuée de l'échelle (h), M. Soreau a

Fig. 153.



retranché des éléments de la première colonne multipliés par 4 ceux de la seconde, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} 1,352\,V & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4h_1^{\frac{3}{2}} - h_1 & h_1 & 1 & 1 \\ 4h_2^{\frac{3}{2}} - h_2 & h_2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où les échelles

(V)	$x = 1,352\,V,$	$y = 0,$
(h_1) et (h_2)	$x = h,$	$y = h - 4h^{\frac{3}{2}},$

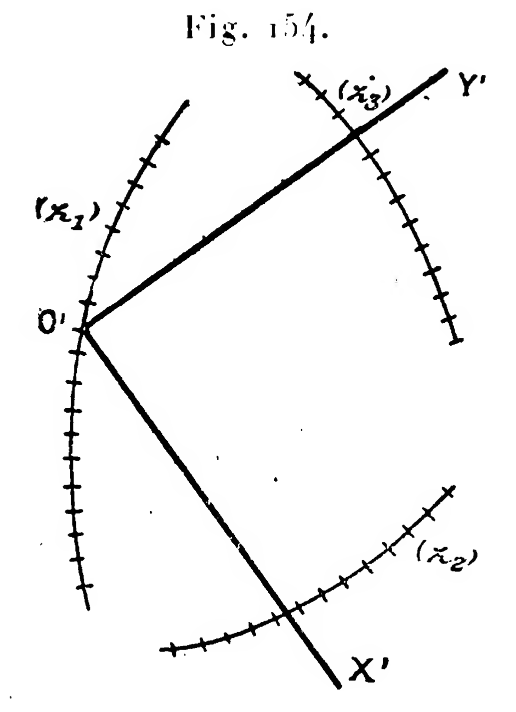
et le point fixe

(P)	$x = 1,$	$y = -1.$

Adoptant pour x et y sur la figure formée par les (h_1) et (h_2) et, par suite, pour y et x sur la figure formée par (V) et par le point P respectivement les modules $18\,\mu$ et $100\,\mu$, M. Soreau a obtenu le nomogramme de la figure 153, sur lequel, pour $h_1 = 12$, $h_2 = 8$, on lit $V = 1,4$.

Plaçons-nous maintenant dans la seconde hypothèse en supposant que ce soient les échelles (z_1) et (z_4) qui se réduisent à une seule. Le type du nomogramme correspondant est celui que représente schématiquement la figure 154. Le sommet O' de l'équerre mobile

Fig. 154.



O'X'Y', étant placé en un point de cote donnée de l'échelle (z_1) et l'un de ses index O'X' amené à passer par un point de cote donnée de l'échelle (z_2), l'autre index fait connaître la valeur de la troisième variable sur l'échelle (z_3).

Si l'on se reporte au type (E) du n° 128, on voit que toutes les fonctions $\frac{f}{h}$ et $\frac{g}{h}$ pourvues des indices d'un même groupe (1 et 2, ou 3 et 4) peuvent être multipliées par une constante. Il suffit donc, pour que les échelles (z_1) et (z_4) puissent être rendues identiques, suivant une remarque de M. Soreau [1], que les échelles (z_1) et (z_4) soient

[1] *Nouveaux types...*, p. 48.

réductibles l'une à l'autre par le produit d'une similitude et d'une translation, c'est-à-dire que, si l'on fait $z_4 \equiv z_1$, on ait

$$\frac{g_4}{h_4} \equiv a\frac{f_1}{h_1} + b, \qquad -\frac{f_4}{h_4} \equiv a\frac{g_1}{h_1} + c,$$

a, b, c étant des constantes.

Il convient d'ailleurs de remarquer que, lorsque l'inconnue est la variable qui correspond au sommet (ainsi que c'est le cas dans l'exemple suivant), la lecture ne laisse pas d'être un peu délicate. Il faut, en effet, en faisant passer les deux index de l'équerre par les points donnés, amener son sommet à tomber sur l'échelle correspondante. Une remarque analogue peut être faite à propos de tout mode de représentation applicable à $n - 1$ variables, dérivé d'un mode applicable à n variables par coïncidence de deux échelles d'abord distinctes.

Exemples d'index en équerre à sommet guidé : 1° *Mur de soutènement pour des terres profilées suivant leur talus naturel.* — Reprenant l'équation déjà représentée aux nos 46 et 125, d'une part, par droites et cercles concourants, d'autre part, par index parallèles

$$k^2(1 + \tang^2\varphi) + p\left(k \tang\varphi - \frac{1}{3}\right) = 0,$$

M. Soreau ([1]), après avoir remarqué qu'elle pouvait s'écrire

$$\frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{k}} = \frac{3\tang\varphi - \frac{1}{k}}{-3(1 + \tang^2\varphi)},$$

l'a traduite en un nomogramme à index en équerre à sommet guidé, en faisant, dans les expressions des x et des y du n° 128,

$$h_1 \equiv h_2 \equiv h_3 \equiv h_4 \equiv 1,$$

$$f_1 \equiv 0, \qquad f_2 \equiv \frac{1}{p}, \qquad f_3 \equiv -3\tang\varphi, \qquad f_4 \equiv \frac{-1}{k},$$

$$g_1 \equiv \frac{1}{k}, \qquad g_2 \equiv 0, \qquad g_3 \equiv 3(\tang^2\varphi + 1), \qquad g_4 \equiv 0,$$

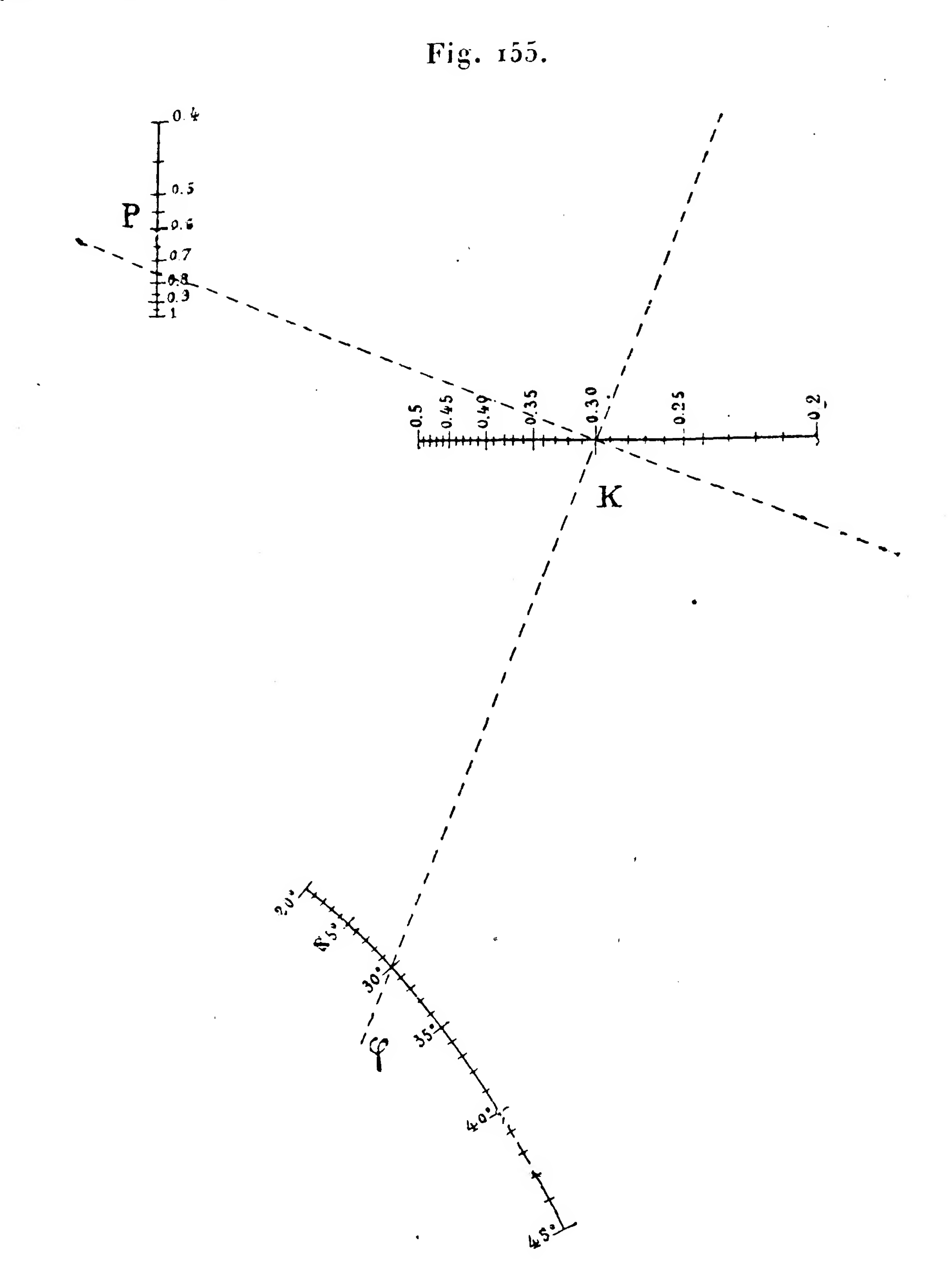
ce qui donne les trois échelles

(k)	$x = 0,$	$y = \frac{1}{k},$
(p)	$x = -\frac{1}{p},$	$y = 0,$
(φ)	$x = 3(1 + \tang^2\varphi),$	$y = 3\tang\varphi.$

([1]) *Nouveaux types...*, p. 49.

Le nomogramme correspondant est celui de la figure 155. Il offre cet intérêt que l'équation ainsi représentée n'est pas réductible au type des points alignés

Fig. 155.



et qu'elle se trouve néanmoins ainsi ramenée au seul emploi de points cotés sans qu'il y intervienne plus d'une échelle par variable ([1]).

([1]) Quoique moins élégant que celui décrit ci-dessus, le nomogramme à index parallèles du n° 125 est pratiquement plus avantageux, parce que d'une lecture plus précise, l'opération qui, avec le nomogramme à index en équerre, consiste à amener le sommet de l'équerre sur l'échelle (k) pendant que ses deux côtés passent par des points donnés sur les échelles (p) et (φ) étant un peu délicate.

Pour effectuer cette détermination d'une façon rigoureuse, il suffirait, après avoir joint par une droite les points (p) et (φ), de placer l'une des pointes d'un compas au milieu de l'intervalle de ces points, et, avec une ouverture de compas égale à la

La position de l'équerre marquée en pointillé correspond à l'exemple $p = 0,75$, $\varphi = 30°$, pour lesquels on a $k = 0,3$.

2° *Profilomètre Siégler.* — L'équation (3) du n° 110 peut s'écrire

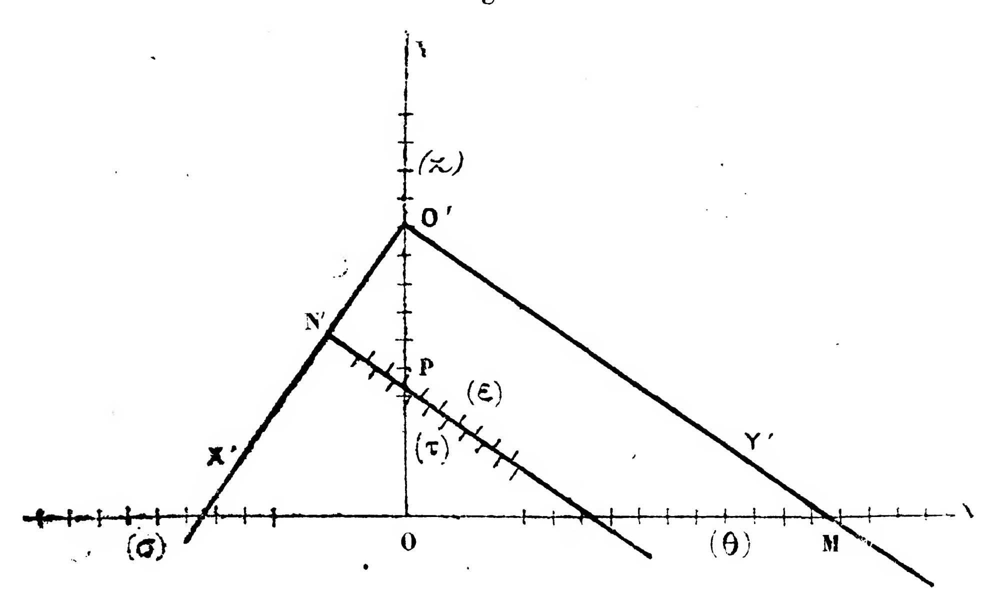
$$(a - z)^2 = 2(t + \theta)(\sigma + c).$$

Sous cette forme, on voit immédiatement qu'elle peut être représentée au moyen d'index en équerre à sommet guidé.

Il suffira de porter sur l'axe des x (*fig.* 156) les échelles

$$x = \mu_1(t + \theta),$$
$$x = -2\mu_2(\sigma + c).$$

Fig. 156.



et sur l'axe des y l'échelle

$$y = \mu_3(a - z),$$

μ_1, μ_2 μ_3 étant des modules liés par la relation $\mu_3^2 = \mu_1\mu_2$.

Plaçant alors le sommet O' de l'équerre au point coté z et faisant passer le côté O'Y' par le point coté 0, on lit à la rencontre du côté O'X' et de la troisième échelle la valeur de σ.

Tel est le principe de l'instrument construit par M. Siégler sous le nom de ***profilomètre*** (¹).

Pour le calcul de ε et, par suite, de λ obtenu, comme nous l'avons vu

---

moitié de cet intervalle, de reporter la seconde pointe de ce compas sur l'échelle (k) où elle marquerait le point dont il y aurait à lire la cote. La variante ainsi obtenue pourrait être rattachée au type de nomogramme étudié au n° 132.

(¹) *A. P. C.*, p. 98; 1881, 1er semestre. Dans le profilomètre tel que l'a réalisé M. Siégler, l'équerre, théoriquement réduite à deux axes rectangulaires dessinés sur un transparent, est matérialisée sous la forme des bords d'une équerre métallique.

(n° 111), par accolement d'une seconde graduation à celle de ε, l'auteur a eu recours à l'ingénieux dispositif que voici :

Fixons à l'équerre un axe NP parallèle à $O'y'$ et portons sur cet axe l'échelle

$$y' = \mu_4 \varepsilon,$$

le module μ_4 étant tel que, si d est la distance du point O′ au point N, on ait

$$\frac{\mu_4}{d} = \frac{\mu_3}{\mu_1}.$$

La similitude des triangles NPO′ et OO′M donne

$$\frac{\mu_4 \varepsilon}{d} = \frac{\mu_3(a - z)}{\mu_1(t + \theta)}$$

ou, en vertu de l'égalité précédente,

$$\varepsilon = \frac{a - z}{t + \theta},$$

qui est bien la formule (1) du n° 110.

Ce mode de représentation graphique de l'équation liant ε à z et θ ne rentre dans aucun des types de nomogramme envisagés jusqu'ici. On verra plus loin (n° 148) comment il dérive de la théorie générale englobant tous les types possibles de nomogramme.

Il va sans dire que, dans les nomogrammes à index en équerre comme dans tous ceux qui ne reposent que sur l'emploi de points cotés, on peut remplacer les échelles simples par des réseaux de points à deux cotes (n° 101). M. Soreau en a donné un exemple intéressant (1).

Le mode suivant de résolution nomographique des équations des troisième et quatrième degrés peut être rattaché à cette extension de l'emploi des index en équerre.

130. *Nomogrammes à index en équerre pour la résolution des équations complètes du troisième et du quatrième degré.* — Ayant, aux n°s 104 et 105, décrit des nomogrammes pour la résolution des équations complètes du troisième et du quatrième degré, nous signalerons ici un ingénieux emploi des index en équerre imaginé par M. Massau (2), en vue du même problème, et que nous avons nous-même simplifié.

---

(1) SOREAU, *Nouveaux types...*, p. 59.

(2) *Mémoire sur l'intégration graphique*, Livre III, Chap. III, n° 185.

Ce procédé, déduit par son auteur de considérations de Géométrie dans l'espace, interprétées par la Géométrie descriptive, consiste en ceci :

Étant tracées sur un quadrillage régulier de module μ les droites (z) définies par l'équation

$$\mu z^2 + zx + y = 0,$$

on déplace une équerre dont le premier côté passe constamment par le point $(n - q,\ p)$ du quadrillage, c'est-à-dire par le point

$$x = \mu(n - q), \qquad y = \mu p,$$

et dont le sommet décrit la verticale cotée n ou

$$x = \mu n,$$

jusqu'à ce que le second côté de cette équerre coïncide avec une des droites (z). La cote de celle-ci est alors une racine de l'équation

$$z^3 + nz^2 + pz + q = 0.$$

En effet, appelant η l'y du sommet de l'équerre, on voit que l'on a d'abord

$$\mu z^2 + z\mu n + \eta = 0;$$

puis, la droite cotée z étant perpendiculaire à celle qui joint le point $x = \mu(n - q)$, $y = \mu p$ au point $x = \mu n$, $y = \eta$, on a aussi

$$\frac{\eta - \mu p}{\mu q} z = 1.$$

L'élimination de η entre ces deux équations donne bien l'équation complète du troisième degré ci-dessus, ce qui justifie le procédé.

Les simplifications dont ce procédé est susceptible sont les suivantes :

1° Si l'on prend les points d'intersection des droites (z) avec Ox, on obtient les points

$$x = -\mu z,$$

c'est-à-dire que *la cote d'une droite z est celle du point où elle rencontre l'échelle régulière portée sur Ox, changée de signe.*

2° L'enveloppe des droites (z) étant la parabole

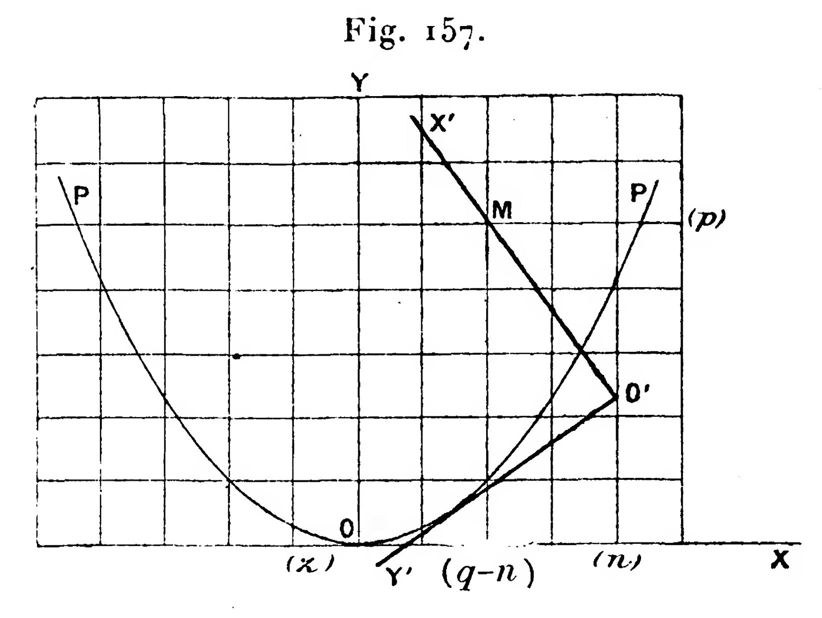
$$x^2 - 2\mu y = 0,$$

il suffit de tracer cette parabole P (*fig.* 157) pour n'avoir pas à tracer les droites (z).

Le nomogramme se réduit alors à un quadrillage régulier dont les axes Ox et Oy sont gradués et sur lequel est tracée la parabole P. Son usage se réduit à ceci : *On déplace une équerre dont le sommet décrit la verticale cotée n* (le long de laquelle on peut placer une règle) *et dont un côté passe*

par le point $(n - q, p)$ (où l'on peut planter dans la feuille une pointe fine) *jusqu'à ce que son second côté soit tangent à la parabole* P. *La cote changée de signe du point où ce côté coupe* Ox *est une racine de l'équation proposée.*

Fig. 157.



On voit qu'il suffit, dans l'équation du système des droites (z), de remplacer z^2 par $z^3 + mz^2$, pour avoir un nomogramme de l'équation complète du quatrième degré

$$z^4 + mz^3 + nz^2 + pz + q = 0.$$

A chaque valeur de m correspond, bien entendu, une courbe enveloppe $\mathcal{C}_m$ analogue à P. Il n'y a qu'à tracer le système de ces courbes sur le quadrillage régulier pour que le nomogramme se trouve construit.

Seulement ici les valeurs de z ne devront plus être inscrites sur l'axe Ox, puisque les cotes des points où cet axe est coupé par la droite

$$l(z^3 + mz^2) + zx + y = 0$$

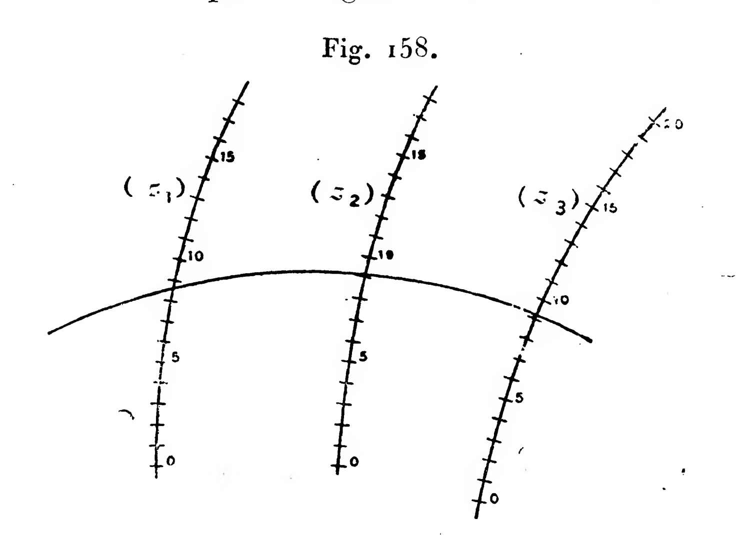
ne sont pas les mêmes suivant la valeur de m. Ces valeurs de z pourraient être données par le coefficient angulaire de la droite correspondante changé de signe. On pourrait aussi recourir à l'emploi des trajectoires de contact $\mathfrak{T}_z$ (n° 108). En effet, le lieu des points de contact des enveloppes $\mathcal{C}_m$ avec les droites correspondant à une même valeur de z est une courbe dont l'équation s'obtiendra, comme on l'a vu au n° 108, en éliminant m entre l'équation ci-dessus et sa dérivée, prise par rapport à z. Ici, l'équation et sa dérivée étant linéaires en m, x et y, on voit que ces trajectoires $\mathfrak{T}_z$ seront des droites.

On trouvera plus loin (n° 141, 2°) un autre type de nomogramme pour l'équation complète du quatrième degré.

131. *Index circulaire.* — La seule courbe, *invariable de forme*, qui partage avec la ligne droite la propriété d'être déterminée de position par deux points, est un cercle de rayon constant. De même, en effet, qu'une droite définie par deux points peut glisser sur elle-

même par une translation, un cercle de rayon donné, défini par deux points, peut glisser sur lui-même par une rotation. Il en résulte qu'un index circulaire pourra, comme un index rectiligne, servir à établir une liaison entre trois échelles ponctuelles. Le type de nomogramme correspondant est donné par la figure 158.

Fig. 158.



La considération des index circulaires ne présente guère qu'un intérêt théorique. Nous nous y arrêterons toutefois un instant pour faire voir que la marche que nous avons suivie au n° 46 permet de mettre sous forme symétrique (¹) le type général d'équation correspondant.

L'équation du cercle de rayon r servant d'index, rapporté à deux axes rectangulaires fixes, mais d'ailleurs quelconques, du plan est

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=r^2,$$

ξ et η étant les coordonnées variables de son centre. Exprimant que ce cercle passe par les trois points cotés (z_1), (z_2), (z_3), dont les coordonnées sont définies respectivement par

$$(z_i) \qquad x=f_i, \qquad y=g_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

on a les trois équations

$$\xi^2+\eta^2-2f_i\xi-2g_i\eta+f_i^2+g_i^2-r^2=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

Le problème qui consiste à éliminer ξ et η entre ces trois équations est algébriquement le même que celui qui a été résolu au n° 46,

(¹) Alors que cette forme symétrique ne se rencontre pas dans le Mémoire de M. Goedseels, où la possibilité de l'emploi de ce genre d'index se trouve signalée.

lorsqu'on remplace

$$
\begin{array}{lll}
\varphi_i & \text{par} & 1, \\
x & \text{»} & \xi, \\
y & \text{»} & \eta, \\
f_i & \text{»} & -2f_i, \\
g_i & \text{»} & -2g_i, \\
h_i & \text{»} & f_i^2+g_i^2-r^2.
\end{array}
$$

Nous pouvons donc écrire immédiatement le résultat. Convenant d'abord, pour simplifier l'écriture, de poser d'une manière générale

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = |\, a_i b_i c_i \,|,$$

et remarquant que

$$|\,1 \quad a_i \quad f_i^2+g_i^2-r^2\,| = |\,1 \quad a_i \quad f_i^2+g_i^2\,|,$$

nous avons pour l'équation cherchée

$$\overline{|\,1 \quad g_i \quad f_i^2+g_i^2\,|}^{\,2} + \overline{|\,f_i \quad 1 \quad f_i^2+g_i^2\,|}^{\,2}$$
$$+4\,|\,f_i \quad g_i \quad 1\,|\,(|\,f_i \quad g_i \quad f_i^2+g_i^2\,| - r^2\,|\,f_i \quad g_i \quad 1\,|) = 0.$$

Si l'on pose

$$f_i^2+g_i^2 = l_i,$$

on voit qu'avec la notation abrégée du n° 46 l'équation précédente peut s'écrire

$$D_f^2+D_g^2+4\,D_l(D-r^2\,D_l) = 0.$$

En particulier, si les points (z_1) et (z_2) sont distribués sur Ox, les points (z_3) sur Oy, cette équation, toutes réductions faites, prend la forme simple

$$g_3^2[(f_1+f_2)^2-4r^2] + (g_3^2-f_1f_2)^2 = 0.$$

132. *Index concentriques. Points équidistants.* — On peut généraliser le principe des index parallèles (n° 125) en traçant sur le transparent, au lieu de droites parallèles, des cercles concentriques.

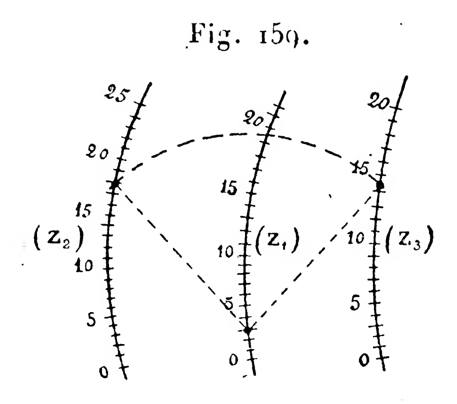
Il convient toutefois de remarquer que, dans ce cas, le cercle, dit *primitif*, à faire passer par les deux premiers points (z_1) et (z_4) doit être un cercle déterminé du système (à distinguer par un signe spé-

cial). Une fois ce cercle amené à passer par les points voulus, l'un des cercles concentriques passe par le point (z_2), et le point (z_3) qui se trouve sur ce second cercle fait connaître la valeur de l'inconnue.

Pris dans sa généralité, le procédé, lorsqu'on suppose les échelles simples, s'applique donc à des équations à quatre variables. On le réduit au cas de trois variables en supposant deux des échelles (z_1) et (z_4) coïncidentes et réduisant le cercle primitif à un point, centre commun de tous les index concentriques.

Le nomogramme comprend alors (*fig.* 159) trois échelles (z_1),

Fig. 159.



(z_2), (z_3), entre lesquelles le mode de liaison se réduit à ceci : *le cercle de centre* (z_1) *passant par le point* (z_2) *passe aussi par le point* (z_3).

On peut, au lieu du transparent à index circulaires concentriques dont nous venons de parler, se servir ici d'un compas pour la lecture du nomogramme : *l'une des pointes du compas étant mise au point coté* z_1, *l'autre en* z_2, *on fait tourner le compas autour de la pointe* z_1 *jusqu'à ce que l'autre pointe tombe sur l'échelle* (z_3); *la cote du point ainsi marqué est le nombre cherché.*

C'est en raison de cette façon de rattacher les points (z_2) et (z_3) à (z_1) que l'auteur de cette nouvelle classe de nomogrammes, M. N. Gercevanoff, leur a donné le nom de *nomogrammes à points équidistants* [1].

Afin de rappeler le rôle spécial joué dans ce mode de liaison par le point z_1, on peut l'appeler le *point central*, et l'échelle (z_1), l'*échelle centrale*.

---

(1) *Les principes du calcul nomographique*, publiés en russe, à Saint-Pétersbourg, en 1906, au paragraphe 10.

Il est très facile de former le type d'équation correspondant.

Si, en effet, l'échelle (z_i) (pour $i = 1, 2, 3$) est définie par

$$(z_i) \qquad x = f_i, \qquad y = g_i,$$

il suffit, en supposant les axes rectangulaires et les modules suivant Ox et Oy égaux, d'écrire l'égalité des distances des points (z_2) et (z_3) au point (z_1) pour avoir

$$(f_2 - f_1)^2 + (g_2 - g_1)^2 = (f_3 - f_1)^2 + (g_3 - g_1)^2$$

ou

$$(1) \qquad f_2^2 + g_2^2 - f_3^2 - g_3^2 - 2f_1(f_2 - f_3) - 2g_1(g_2 - g_3) = 0,$$

qui, d'après la remarque même de M. Gercevanoff, peut se mettre sous la forme

$$(1') \qquad \begin{vmatrix} f_2 - f_3 & 0 & -g_2 + g_3 \\ g_2 + g_3 & 1 & f_2 + f_3 \\ 2g_1 & 1 & 2f_1 \end{vmatrix} = 0,$$

et comprend comme cas particulier certaines équations déjà représentables en points alignés avec deux échelles rectilignes. En effet, si l'on fait

$$f_2 = 0, \qquad g_1 = 0,$$

l'équation (1) se réduit à

$$g_2^2 - f_3^2 - g_3^2 + 2f_1 f_3 = 0,$$

et il suffit de poser

$$2f_1 = F_1, \qquad g_2^2 = F_2,$$

$$f_3 = \frac{G_3}{H_3}, \qquad -(f_3^2 + g_3^2) = \frac{F_3}{H_3},$$

pour qu'elle s'écrive

$$(2) \qquad F_1 G_3 + F_2 H_3 + F_3 = 0,$$

forme identique au type (E) du n° 78. Si en outre $f_3 \equiv 1$, elle se réduit à

$$(2) \qquad F_1 + F_2 + F_3 = 0,$$

type (E) du n° 67.

On obtient encore une équation de ce dernier type dans l'hypothèse $g_1 \equiv g_2 \equiv g_3 \equiv 0$, car l'équation (1) se réduit alors à

$$(3') \qquad (f_2 - f_3)(f_2 + f_3 - 2f_1) = 0,$$

équation qui, au facteur parasite près, est de la forme (3) ci-dessus.

L'hypothèse faite pour obtenir le type (2) montre que les échelles (z_1) et (z_2) sont disposées respectivement sur Ox et Oy, l'échelle (z_3) étant quelconque. Cette dernière devient à son tour rectiligne et parallèle à Oy lorsque s'ajoute l'hypothèse qui a conduit au type (3).

Pour le type (3′), les trois échelles étant portées le long de Ox (ce qui ne peut se réaliser pratiquement que si deux au moins d'entre elles sont identiques), outre que la traduction géométrique de l'équation représentée est alors évidente, on s'explique la présence du facteur parasite par le fait que le cercle de centre (z_1) coupe le support commun en deux points, en chacun desquels deux cotes z_2 et z_3 sont confondues. Les cotes à associer pour la résolution de l'équation sont celles qui se rapportent à deux points distincts.

On peut d'ailleurs se proposer de rechercher la forme la plus générale de l'équation représentable par un nomogramme à points équidistants ne comprenant que des échelles rectilignes, semblables à celles de certaines fonctions φ_1 φ_2, φ_3. Il suffit, pour cela, que

$$f_i = a\varphi_i + b_i, \qquad g_i = c_i\varphi_i + d_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

On trouve alors que l'équation (1) prend la forme

$$(4) \quad A_2\varphi_2^2 - A_3\varphi_3^2 + \varphi_1(B_2\varphi_2 + B_3\varphi_3) + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3 + D = 0,$$

où A_2 *et* A_3, *nécessairement de même signe*, peuvent toujours être pris positifs.

Les huit coefficients de l'équation (4) s'expriment en fonction des douze coefficients a_i, b_i, c_i, d_i; on voit, lorsque les premiers sont donnés, qu'on dispose de quatre conditions arbitraires pour la détermination des seconds. On ne saurait toutefois, dans le cas général, choisir ces conditions supplémentaires de façon qu'il en résulte des sujétions particulières pour les échelles. Par exemple, on ne saurait, en général, faire $c_2 = d_2 = c_3 = d_3 = 0$, parce que les supports des échelles (z_2) et (z_3) seraient alors coïncidents, ce qui exige une relation particulière entre les coefficients de l'équation donnée.

La parité de signe de A_2 et A_3 introduit une sujétion dont on peut s'affranchir, lorsque l'un des coefficients B_2 ou B_3 est nul, grâce à un artifice signalé par M. Gercevanoff [1].

---

[1] *Loc. cit.*, p. 29.

Supposons donc A_3 négatif, en posant $A_3 = -A'_3$, et, de plus, $B_3 = 0$. L'équation s'écrit alors

$$A_2\varphi_2^2 + A'_3\varphi_3^2 + B_2\varphi_1\varphi_2 + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_2\varphi_3 + D = 0.$$

Définissons alors la fonction ψ_3 par la relation

$$A'_3\varphi_3^2 + C_2\varphi_3 = -\alpha_3\psi_3^2 + \gamma_3\psi_3 + k,$$

les coefficients du second membre étant arbitraires (ce qui permettra d'en disposer de façon que ψ_3 reste réelle dans le sens considéré) et $\alpha_3 > 0$.

L'équation devient alors

$$A_2\varphi_2^2 - \alpha_3\psi_3^2 + B_2\varphi_1\varphi_2 + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \gamma_3\psi_3 + D + k = 0.$$

Elle rentre ainsi dans le type (4).

Exemple : Résolution de l'équation du second degré. — Soit l'équation du second degré, où le terme constant est supposé négatif,

$$z^2 + pz - q = 0.$$

Elle rentre dans le type (2) ci-dessus lorsqu'on prend

$$z_1 \equiv p, \qquad z_2 \equiv q, \qquad z_3 \equiv z,$$

avec

$$\varphi_1 \equiv p, \qquad \varphi_2 \equiv q, \qquad \varphi_2 \equiv z^2, \qquad \psi_3 \equiv z, \qquad \chi_3 \equiv -1,$$

d'où l'on tire

$$f_1 \equiv \frac{p}{2}, \qquad g_1 \equiv 0,$$
$$f_2 \equiv 0, \qquad g_2 \equiv \sqrt{q},$$
$$f_3 \equiv -z, \qquad g_3 \equiv 0.$$

La valeur trouvée pour g_2 montre pourquoi on doit supposer le terme constant négatif [1].

Les échelles obtenues sont donc définies par

(p)	$x = \frac{p}{2}$,	$y = 0$ (échelle centrale),
(q)	$x = 0$,	$y = \sqrt{q}$,
(z)	$x = -z$,	$y = 0$.

[1] Des restrictions de ce genre existent chaque fois qu'on a recours à un mode de représentation quadratique, et c'est une des principales raisons de la supériorité des modes de représentation purement projectifs. Toutefois la représentation quadratique permettra parfois (et c'est ici le cas) de substituer des échelles rectilignes, faciles à graduer, à certaines échelles curvilignes.

L'échelle centrale (p) et l'échelle (z) se réduisent à des échelles métriques portées sur Ox, à partir de O, l'une dans un sens, l'autre dans l'autre, la cote de la seconde étant, en valeur absolue, moitié de celle de la première au même point.

Quant à l'échelle (q), elle est bien facile à reporter au compas sur Oy. Il suffit de remarquer que, pour $z = q$, on tire de l'équation donnée $p = 1 - q$. Donc, prenant comme point central le point coté $1 - q$ de l'échelle (p), il suffit d'amener la seconde pointe du compas sur le point coté q de l'échelle (z), puis de la reporter sur Oy pour avoir le point de même cote de l'échelle (q). C'est ainsi que M. Gercevanoff a construit le nomogramme que reproduit la

Fig. 160.

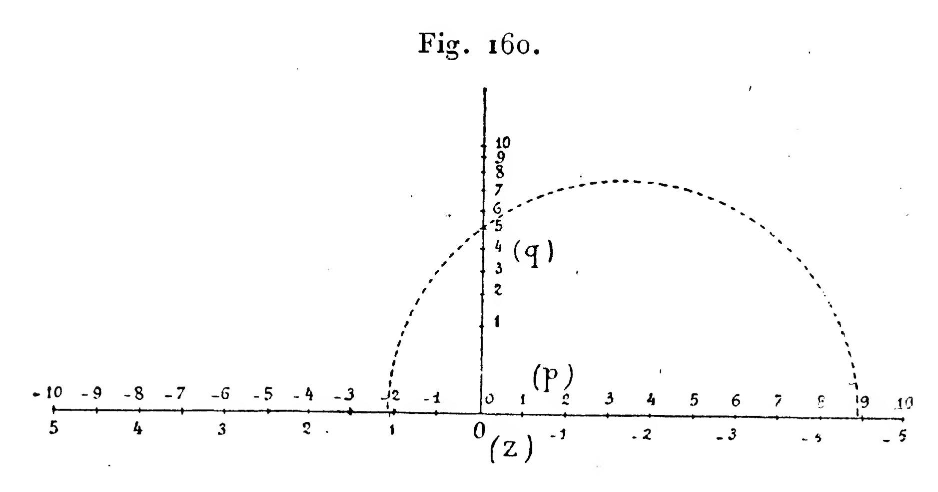


figure 160, où le cercle marqué en pointillé correspond à l'équation

$$z^2 + 3,2z - 5 = 0,$$

dont les racines sont

$$z' = 1,15 \qquad \text{et} \qquad z'' = -4,35.$$

II. — Systèmes cotés mobiles.

133. *Généralités. Plans superposés. Éléments mixtes.* — Dans ce qui précède, les éléments mobiles étaient des éléments dépourvus de cote, compris sous le terme générique d'index, qui servaient à établir certains modes de liaison entre des éléments appartenant à des systèmes cotés figurant de façon invariable sur la partie fixe du nomogramme. Rien n'empêche de supposer que la partie mobile, généralement réalisée sous forme d'un transparent, porte elle-même certains éléments cotés qui, une fois mis en place, interviennent dans la lecture du nomogramme au même titre que les systèmes fixes.

Les déplacements les plus généraux du plan mobile π' sur le plan fixe π sont à trois degrés de liberté. Pour fixer la position de π' sur π on pourra donc disposer des valeurs de trois paramètres; on pourra,

par exemple, en supposant le plan π pourvu de trois échelles respectivement graduées au moyen des valeurs de ces paramètres, faire passer des index marqués sur π' par les points ayant pour cotes sur ces échelles les valeurs qu'on se sera données pour ces paramètres. Les éléments cotés de π' dépendront donc, une fois mis en place, de trois variables de plus qu'il n'y en a pour les coter sur π'. Par exemple, les points d'une échelle ponctuelle de π', une fois mis en place, dépendent sur π de quatre variables; ceux d'un réseau de points à deux cotes, de cinq variables, etc. Cela fait entrevoir les ressources que l'on pourra tirer de l'emploi de systèmes cotés mobiles en vue de représenter des équations à un plus grand nombre de variables, d'autant plus que l'on peut supposer les divers systèmes cotés, à fixer sur π, tracés sur des plans indépendants les uns des autres π', π'', ..., tous mobiles par rapport à π.

Il va sans dire que ces plans π', π'', ... pourront n'avoir sur π que des déplacements à un ou à deux degrés de liberté. Les déplacements à un degré de liberté les plus simples seront évidemment les translations parallèles à une direction fixe et les rotations autour d'un point fixe (dont les précédents peuvent n'être regardés que comme un cas particulier); ceux à deux degrés de liberté les plus simples seront les translations générales.

D'autre part, les déplacements du plan π' sur le plan π sont encore aptes à définir ce qu'on peut appeler des *éléments mixtes*, c'est-à-dire des éléments qui se trouvent cotés, ou même engendrés, du fait de la position relative des deux plans : par exemple, une ligne non cotée de π' qui emprunte la cote d'un point de π par où elle passe; ou un point d'un support situé sur π qui, par l'intermédiaire d'une ligne tracée sur π', emprunte la cote d'un autre point de π; ou même un point provenant de la rencontre d'une ligne cotée sur π et d'une ligne cotée sur π', ...

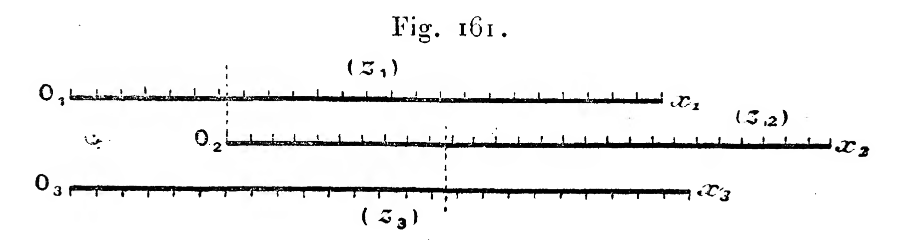
Nous allons, dans ce qui suit, en nous bornant à des cas simples, intéressant plus directement la pratique, étudier quelques exemples de ces diverses façons d'utiliser les systèmes mobiles.

A. — Systèmes mobiles a un degré de liberté.

134. *Systèmes à translation. Échelles glissantes. Règles à un tiroir.* — Considérons trois axes parallèles O_1x_1, O_2x_2, O_3x_3 tels

que celui du milieu puisse glisser entre les deux autres (*fig.* 161). Si l'origine O_2 est amenée en face du point d'abscisse x_1 et si le

Fig. 161.



point d'abscisse x_2 vient alors en face du point d'abscisse x_3, on a

$$x_1 + x_2 = x_3.$$

Si les trois axes portent respectivement les échelles définies par

$$x_1 = \mu f_1,$$
$$x_2 = \mu f_2,$$
$$x_3 = \mu f_3,$$

on aura donc

$$f_1 + f_2 = f_3.$$

De là un mode de représentation nouveau pour les équations de cette forme, au moyen d'échelles glissantes.

On pourra réaliser matériellement le nomogramme correspondant en gravant les échelles (z_1) et (z_3) sur la face supérieure d'une règle dans laquelle on engagera un tiroir à glissière portant l'échelle (z_2). On retrouve ainsi le type d'instrument connu sous le nom de *règle à calcul*.

La plus simple de toutes est celle qui permet d'effectuer la multiplication en traduisant l'équation de cette opération mise sous la forme

$$\log z_3 = \log z_1 + \log z_2.$$

Comme ici les échelles (z_1) et (z_3) sont identiques, on peut les supposer confondues. La règle à calcul ainsi obtenue, qui se trouve aujourd'hui entre les mains de tous les techniciens, est d'un usage trop courant pour que nous croyions devoir nous y arrêter davantage [1]; il nous a suffi de faire voir comment elle peut être rattachée à la théorie générale des nomogrammes.

---

[1] Pour plus de détails, *voir* notre *Instruction sur l'usage de la règle à calcul* dont une 2e édition a paru en 1921 chez Gauthier-Villars. Nous rappellerons simple-

Parmi les équations du type voulu, on peut encore citer celles qui se rencontrent dans le calcul des profils de remblai et de déblai lorsqu'on les a mises sous la forme logarithmique (n° **110**).

Une règle pour ce genre d'application a été construite par M. Toulon ([1]), une autre par M. Paulin ([2]).

Tous les calculs usuels que comporte l'étude d'un ouvrage en béton armé ont été réduits, par le professeur J. Rieger, de l'École Polytechnique de Brünn, à l'usage d'une règle unique, fort bien étudiée, dont le tiroir est muni d'un assez grand nombre d'échelles que l'index du curseur permet de mettre en liaison avec les échelles portées par la règle elle-même.

De même qu'on l'a vu à propos d'autres types de nomogramme, les échelles d'une règle à calcul pourront, le cas échéant, être fractionnées. En voici un exemple bien simple :

Supposons que la partie utile O_1x_1 de l'échelle (z_1) déborde la partie utile de l'échelle (z_3) (*fig.* 162). A partir de la perpendiculaire à O_1x_1 menée par O_3, reportons en $O'_1A'_1$ la portion O_1A_1 de l'échelle (z_1), et fixons au tiroir un index O'_2 dont la distance au trait origine O_2 de l'échelle (z_2) soit précisément égale à O_1A_1. Il est bien clair que lorsque le trait O_2 marquera sur O_1A_1 le point

---

ment que le principe de la règle à calcul fut proposé par Wingate dès l'époque où Gunter imagina la construction des échelles logarithmiques, soit dès le début du XVIIe siècle. L'usage de la glissière, introduit par Seth Partridge (1671), fut réinventé par Leadbetter (1750). C'est vers 1815 que les frères John, de Soho, firent de la règle à calcul l'objet d'une fabrication courante. Introduite en France par Jomard en 1821, cette règle y fut construite par Lenoir, qui la perfectionna dans ses détails, ainsi que ses successeurs, Gravet-Lenoir et Tavernier-Gravet. De nombreuses variantes en ont été imaginées depuis lors, offrant certains avantages spéciaux. On trouvera à ce sujet quelques détails dans la brochure **O.8** (p. 52 à 66) et dans l'article *Calculs numériques* de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (t. I, vol. 4, fasc. 3, p. 410 de l'édition française). Nous mentionnerons, en outre, le nouveau type de règle proposé par M. Wargniez qui, par l'introduction, sur le tiroir, de la courbe exponentielle qui équivaut (suivant ce qui a été vu au n° 12) à une échelle logarithmique, est parvenu, sous des dimensions très restreintes, à accroître sensiblement l'approximation fournie par la règle.

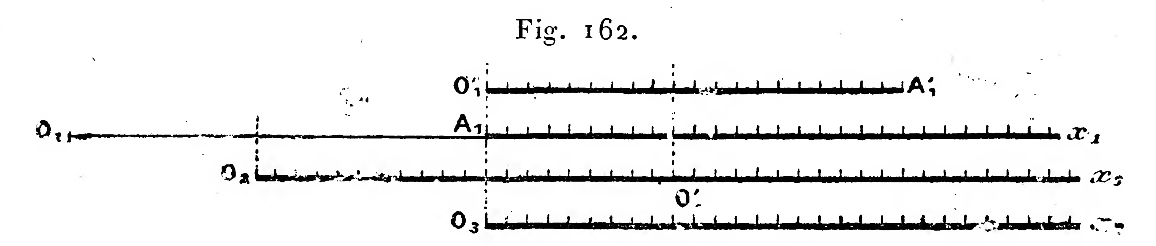
Il convient aussi d'observer que le même principe théorique peut encore être appliqué au moyen de la rotation relative de cercles concentriques munis des mêmes graduations que les règles et leurs tiroirs. Ce dispositif, adopté dès 1632 par Oughtred, se retrouve dans divers instruments modernes, comme ceux de M. John Fuller (*Computing telegraph*) et de M. Boucher (*Cercle à calcul*).

([1]) *Voir* le *Cours de Routes* de M. Durand-Claye (2e édition, p. 561).

([2]) *Portefeuille des conducteurs des Ponts et Chaussées*, t. XXI, 1889; p. 133.

affecté d'une certaine cote z_1, l'index O'_2 marquera sur $O'_1 A'_1$ le trait affecté de la même cote. On pourra donc supprimer la portion $O_1 A_1$ de l'échelle (z_1) en la remplaçant par $O'_1 A'_1$ de façon à limiter les deux échelles (z_1) et (z_3), portées par la règle, à une même perpendiculaire à la direction de cette règle.

Fig. 162.



Lorsque le trait O_2 se trouvera engagé entre les échelles de la règle, on se servira de ce trait pour prendre le point z_1 sur la portion $A_1 x_1$ de l'échelle correspondante. Lorsque le trait O_2 se trouvera en dehors des échelles de la règle, c'est avec l'index O'_2 qu'on prendra le point z_1 sur le segment $O'_1 A'_1$.

Il est bon d'ailleurs d'observer que, dans beaucoup de cas, les traits de la portion $O_1 A_1$ prolongeront exactement ceux de la portion $A_1 x_1$ qui pourront dès lors servir à définir la seconde partie de l'échelle, pourvu qu'ils soient munis d'une seconde chiffraison ([1]).

On peut, bien évidemment, remplacer les trois échelles simples (z_1), (z_2) et (z_3) du numéro précédent par des échelles binaires (z_1, z_4), (z_2, z_5), (z_3, z_6). On a ainsi, au moyen d'une règle portant les échelles (z_1, z_4), (z_3, z_6) et munie d'un tiroir portant l'échelle (z_2, z_5), la représentation de l'équation

$$f_{14} + f_{25} = f_{36}.$$

Pour mettre en correspondance les points de l'une à l'autre échelle, on peut avoir recours soit à une équerre dont un bord est mis en

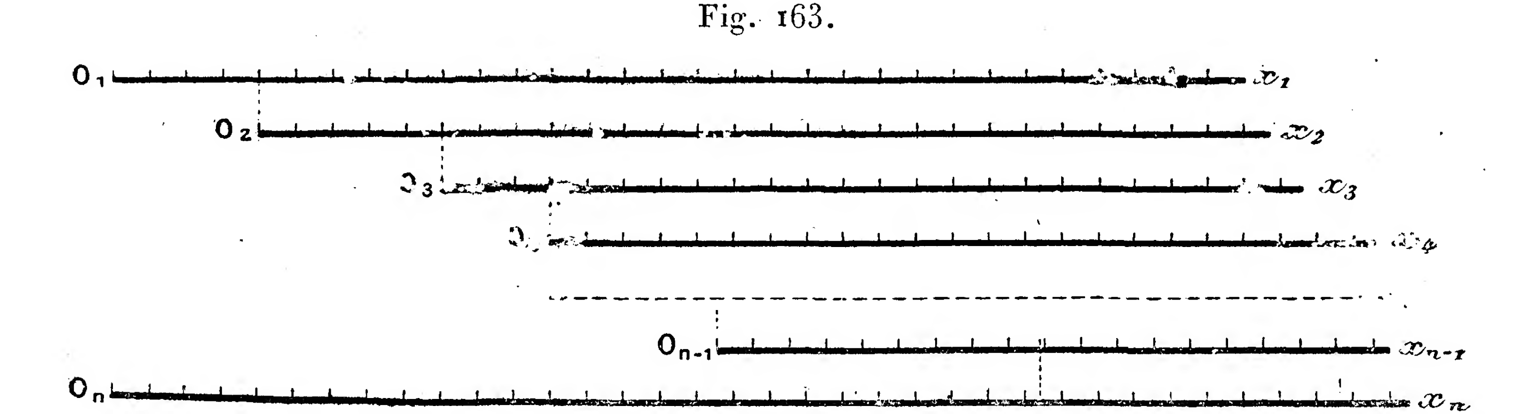
---

([1]) La règle à calcul fractionnée, imaginée et réalisée dès 1851 par le lieutenant Mannheim (depuis lors colonel), a, dans la suite, été renouvelée, sous des formes diverses, par plusieurs auteurs, notamment par MM. Everett (*Universal proportion Table*), Scherer (*Rechentafel*), Derivry (*Carte à calculs*), Thacker et Billeter (*Cylindres à calcul*). Afin de donner à un tel instrument de calcul un grand développement sans avoir recours au fractionnement, le professeur Georges Fuller, de Belfast, en a enroulé les échelles le long d'hélices tracées sur un cylindre de révolution (*Spiral slide rule; voir* **O.8**, p. 60). Les trois derniers instruments cités réalisent des sortes de nomogrammes à trois dimensions. D'après M. Favaro, la première échelle hélicoïdale aurait, dès 1650, été construite par Milburne.

coïncidence avec un bord de la règle, soit à un curseur portant un index perpendiculaire à la direction de la règle et qui se déplace le long de cette règle.

135. *Règles à plusieurs tiroirs.* — Au lieu d'un seul tiroir, on peut munir la règle de plusieurs tiroirs glissant les uns contre les

Fig. 163.



autres (*fig.* 163). Si la règle porte les échelles (z_1) et (z_n) définies par

$$x_1 = \mu f_1,$$
$$x_n = \mu f_n,$$

et si les divers tiroirs portent les échelles

$$x_2 = \mu f_2,$$
$$x^3 = \mu f_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$x_{n-1} = \mu f_{n-1},$$

on voit que si l'on arrête l'origine O_2 en face du point z_1, O_3 en face du point z_2, ..., O_{n-1} en face du point z_{n-2}, et si le point z_{n-1} se trouve alors en face du point z_n, on a

$$f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} = f_n.$$

On obtient donc ainsi un nouveau mode de représentation des équations de ce type.

On pourra, bien évidemment aussi, comme dans le cas précédent, remplacer une ou plusieurs de ces échelles simples par des échelles binaires.

Exemple : Règle à calcul pour la traction d'une locomotive. — Si v représente la vitesse en kilomètres par heure, q le poids en tonnes de chaque véhicule remorqué, α l'inclinaison de la voie sur l'horizon, le nombre n des

véhicules que peut remorquer une locomotive de type connu est donné, d'après M. A. Frank, par la formule

$$n = \frac{\frac{A}{\sqrt{v}} + Bv^2 + C - D\sin\alpha}{Eq + Fv^2 - 1000\,q\sin\alpha},$$

où A, B, C, D, E, F sont des constantes numériques dépendant de la locomotive considérée.

Cette formule a été représentée par M. F.-J. Vaes, au moyen d'une règle à trois tiroirs de la manière suivante [1] :

Si l'on pose

$$\frac{A}{\sqrt{v}} + Bv^2 + C = f_1(v)$$

et

$$1 - \frac{D\sin\alpha}{f_1(v)} = f_2(v, \alpha),$$

$$Eq + Fv^2 = f_3(v, q),$$

$$1 - \frac{1000\,q\sin\alpha}{f_3(v, q)} = f_4(v, q, \alpha),$$

on voit que la formule considérée peut s'écrire

$$n = \frac{f_1(v) f_2(v, \alpha)}{f_3(v, q) f_4(v, q, \alpha)}$$

ou

$$\log n = \log f_1(v) + \log f_2(v, \alpha) - \log f_3(v, q) - \log f_4(v, q, \alpha).$$

Sous cette forme, on reconnaît qu'elle rentre dans le type général ci-dessus. On pourra donc la représenter au moyen d'une règle portant les échelles parallèles

$$x_0 = \mu \log n,$$

$$x_1 = \mu \log f_1(v)$$

(μ étant un module quelconque), entre lesquelles on fera glisser des tiroirs munis des échelles multiples définies par

$$x_2 = \mu \log f_2(v, \alpha),$$

$$x_3 = -\mu \log f_3(v, q),$$

$$x_4 = -\mu \log f_4(v, q, \alpha).$$

Les deux premières sont des échelles binaires; leur exécution n'offre donc aucune difficulté. On pourra d'ailleurs, pour l'une comme pour l'autre, prendre pour lignes cotées (v) des parallèles à l'axe des x.

---

(1) *Studies over trekkracht van Locomotieven en weerstand van treinen* (*De Ingénieur*, avril 1987).

La dernière est une échelle ternaire; mais rien n'empêchera de construire sur différents tiroirs interchangeables les échelles binaires obtenues en attribuant à α différentes valeurs fixes si celles-ci ne sont pas trop nombreuses. On se servira, dans chaque cas, du tiroir portant l'échelle (v, q) correspondant à la valeur de α considérée. Si, d'ailleurs, les échelles (v, q) correspondant à plusieurs valeurs de α n'empiètent pas les unes sur les autres, on pourra les tracer sur le même tiroir, ce qui est le cas pour l'exemple numérique auquel se rapporte la figure 164. Cette figure reproduit un fragment de la règle construite par M. Vaes avec les données

$$\begin{aligned} A &= \quad 14596, & D &= 63000, \\ B &= \quad 0{,}0775, & E &= 2{,}5, \\ C &= -232{,}6 & F &= 0{,}0047. \end{aligned}$$

La règle même porte les échelles I et V relatives l'une à v, l'autre à n. Cette dernière a d'ailleurs été fractionnée ainsi qu'on l'a expliqué à la fin du numéro précédent.

Les tiroirs II et III portent des échelles binaires (v, α) et (v, q) pour chacune desquelles les lignes (v) sont des parallèles aux bords de la règle.

Le tiroir IV porte trois échelles binaires (v, q) correspondant respectivement à $\alpha = \frac{1}{100}$, $\alpha = \frac{1}{400}$ et $\alpha = \frac{1}{1000}$, échelles pour chacune desquelles les lignes v, toujours parallèles aux bords de la règle, sont les mêmes.

L'usage de la règle peut se résumer ainsi : *On fait correspondre le point* (v, α) *de l'échelle II au point* v *de l'échelle I, puis le point* (v, q) *de l'échelle III à l'origine de l'échelle II, puis le point* (v, q) *du groupe* α *de l'échelle IV à l'origine de l'échelle III ou à l'index terminal, marqué sur cette échelle non loin de son extrémité si son origine est trop éloignée* (ce qui est le cas sur la *figure* 164). *On n'a plus qu'à lire la cote du trait de l'échelle V qui se trouve en face de l'origine de l'échelle IV, cette lecture se faisant le long du bord extérieur ou du bord intérieur suivant que, pour mettre en place l'échelle IV, on s'est servi de l'origine ou de l'index terminal de l'échelle III.*

Il va d'ailleurs sans dire que, puisqu'il s'agit ici d'un nombre de véhicules, on prendra pour n la valeur entière la plus voisine de celle qui serait exactement donnée par l'origine de l'échelle IV.

Par exemple, sur la figure 164, la disposition des tiroirs, qui correspond aux données

$$v = 60^{\text{km}}, \qquad q = 15^{\text{T}},5, \qquad \alpha = \frac{1}{400},$$

montre que l'on a

$$n = 12.$$

136. *Systèmes à rotation. Échelles tournantes.* — Après les systèmes à translation, les systèmes mobiles les plus usuels sont ceux à rotation.

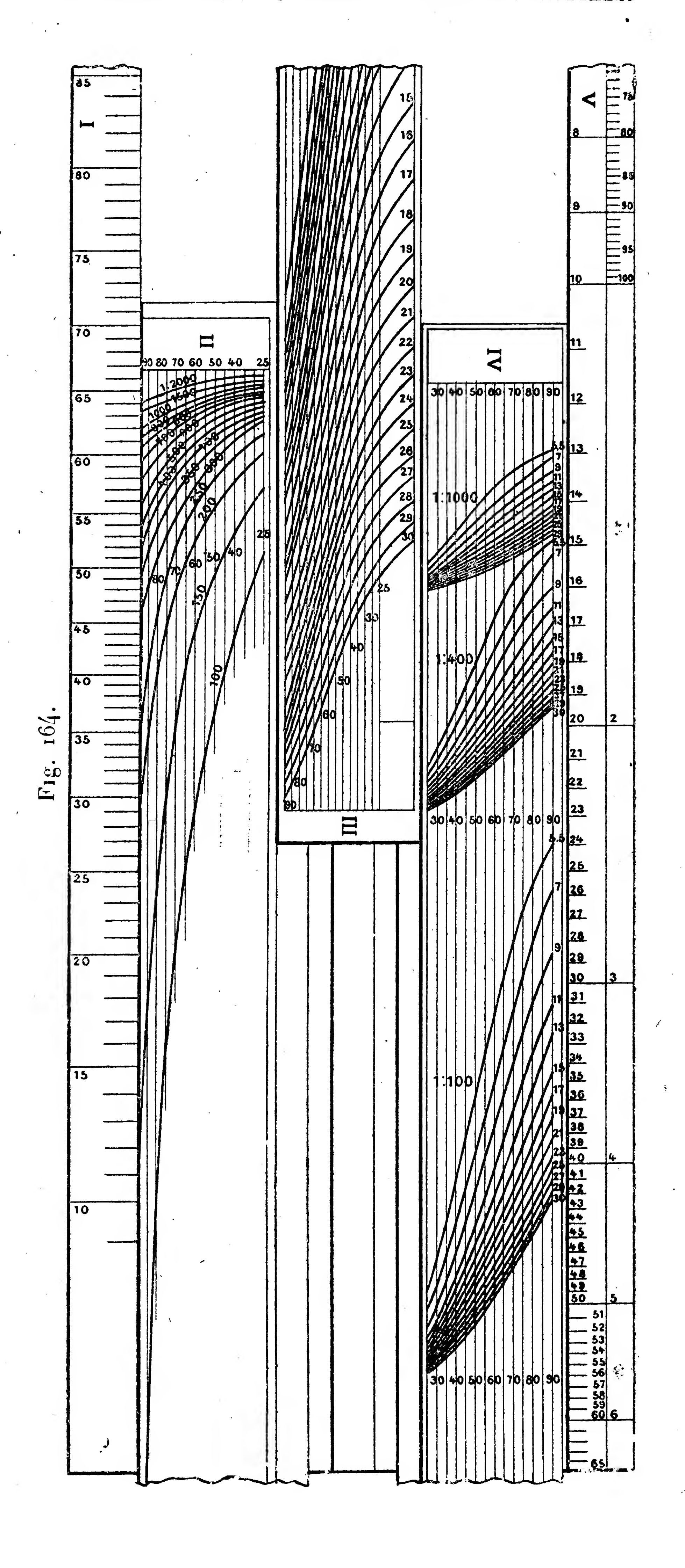

I
85
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
II
III
IV
V
1:1000
1:400
1:100

Fig. 164.

Pour commencer par l'exemple le plus simple, prenons une échelle (z_1) pivotant autour d'un de ses points sur le système supposé fixe des droites parallèles menées perpendiculairement à sa direction primitive Ox [1] (*fig.* 165).

Si l'échelle (z_1) est définie par

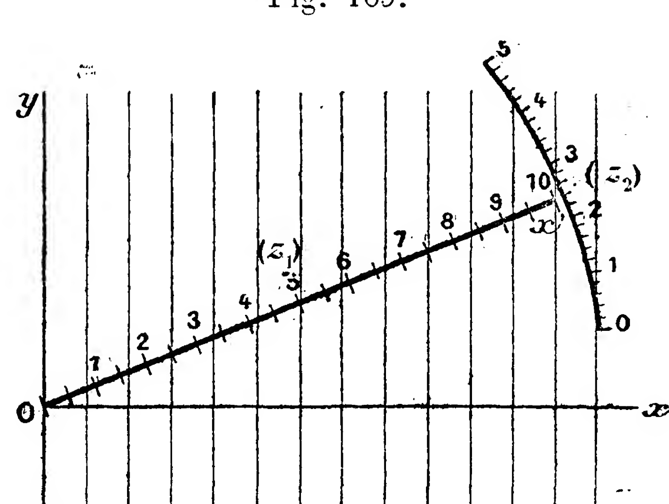
$$x' = \mu f_1,$$

la perpendiculaire à Ox passant par le point z_1 a pour équation

$$x = \mu f_1 \cos \omega,$$

ω étant l'angle que Ox' fait avec Ox.

Fig. 165.



Supposons tracée sur le plan du nomogramme une courbe portant une graduation quelconque (z_2). L'angle ω est évidemment fonction de la cote z_2 du point par lequel passe le support Ox' de l'échelle (z_1), ou un index quelconque invariablement lié à ce support. On peut donc poser

$$\cos \omega = f_2$$

et, par suite,

$$x = \mu f_1 f_2.$$

L'ensemble de l'échelle mobile (z_1) et de l'échelle fixe (z_2), qui peut être dite *échelle de repérage*, équivaut donc à une échelle binaire représentative de la fonction $f_1 f_2$ le long de Ox.

Nous n'avons fait aucune hypothèse sur la nature du support de

(1) Une telle échelle peut être considérée comme dérivant du type général des nomogrammes polaires (n° 48) lorsque les courbes cotées de celui-ci deviennent des droites perpendiculaires à l'axe Ox.

l'échelle curviligne (z_2). Il va de soi que, dans la plupart des cas, le mieux sera d'adopter un cercle de centre O. Quel que soit d'ailleurs ce support, la graduation s'en fera bien aisément au moyen de la relation écrite ci-dessus, qui lie z_2 à ω. Dans le cas d'un support circulaire, la graduation (z_2) est bien évidemment telle que sa projection sur Ox soit l'échelle même de la fonction f_2, construite avec un module égal au rayon du cercle.

En vue de représenter au moyen d'une échelle tournante les fonctions de la forme $f_1 f_2 + g_1$, M. Lallemand, à propos de l'application donnée ci-dessous, a eu l'idée de décrire, sur le plan de l'échelle mobile (z_1), de chaque point z_1 de cette échelle comme centre, un cercle de rayon μg_1. La perpendiculaire à Ox, tangente à ce cercle coté z_1, est alors

$$x = \mu(f_1 f_2 \pm g_1),$$

le signe entre parenthèses étant + ou — suivant qu'il s'agit de la tangente à la partie du cercle concave ou convexe vers Oy.

En accolant à l'axe Ox deux échelles telles que celle-ci, on voit qu'on aura la représentation d'une équation de la forme

$$f_1 f_2 + g_1 = f_3 f_4 + g_4,$$

pour laquelle une autre méthode a été exposée au n° 97.

Remarque. — Il suffit de remplacer l'échelle (z_1) par une échelle binaire (z_1, z_3), et l'échelle (z_2) par un réseau de points à deux cotes (z_2, z_4), pour avoir, par les perpendiculaires à Ox, l'échelle de la fonction $f_{13} f_{24}$.

Exemple : Correction des mires du nivellement. — La correction E d'une hauteur de mire est donnée par la formule

$$E = \left(\frac{\mu - \mu_d}{10}\right) H + f(H),$$

où H représente la hauteur lue, exprimée en décimètres, μ l'indice de compensation au moment de la lecture, μ_d l'indice de compensation au départ, c'est-à-dire une constante, $f(H)$ une fonction définie graphiquement par la traduction en diagramme des résultats de l'étalonnage.

L'équation précédente définit donc la correction E en fonction de H et de μ.

Une correction analogue étant afférente à chacune des deux mires, la diffé-

rence de niveau $H'' - H'$ devra être corrigée de la quantité

$$\varepsilon = \left(\frac{\mu'' - \mu''_d}{10}\right) H'' + f_2(H'') - \left[\left(\frac{\mu' - \mu'_d}{10}\right) H' + f_1(H')\right].$$

Cette équation rentre dans le type envisagé à la fin du n° 134. On peut donc la représenter au moyen d'une échelle simple à translation (ε) glissant le long de deux échelles binaires fixes (μ', H') et (μ'', H'').

Le o de l'échelle (ε) étant amené en face du point (μ', H'), le point de l'échelle (ε) qui se trouvera en face du point (μ'', H'') fera connaître la correction cherchée.

Or, les fonctions représentées par les échelles binaires (μ', H') et (μ'', H'') sont du type considéré en second lieu au numéro précédent lorsqu'on fait correspondre respectivement les lettres H et μ aux lettres z_1 et z_2 et que l'on définit les fonctions f_1, f_2, g_1 par

$$f_1 = H,$$
$$f_2 = \frac{\mu - \mu_d}{10},$$
$$g_1 = f(H).$$

Chacune de ces fonctions pourra donc être représentée par une échelle tournante portant des cercles de rayon $f(H)$ pour H, et une échelle de repérage pour μ.

Il suffira de disposer ces deux échelles sur un même plan, de façon que leurs origines O′ et O″ soient sur une même perpendiculaire à la direction de la translation de l'échelle (ε) pour constituer le nomogramme demandé.

C'est ainsi que M. Lallemand a construit celui que représente la figure 166 [1], et qui est en usage au Service du Nivellement général de la France.

Chacune des échelles (H') et (H'') est dessinée sur un secteur mobile respectivement autour de O′ ou de O″, et qui tourne devant l'échelle (μ') ou (μ'') correspondante.

L'index i' ou i'' de ce secteur mobile est amené en face de la valeur de μ' ou μ'' se rapportant à l'opération dont on veut corriger le résultat, valeur qui est donnée en centimillimètres. Comme cette valeur ne varie pas sensiblement dans le courant d'une journée, pour effectuer la correction des lectures faites dans cette journée, on fixe d'une manière invariable les secteurs, sur la planchette qui porte le nomogramme, au moyen de punaises P′ et P″.

L'échelle de la correction (ε), graduée en décimillimètres et gravée sur une plaque de celluloïd, est indiquée en pointillé sur la figure [2]. Ses déplace-

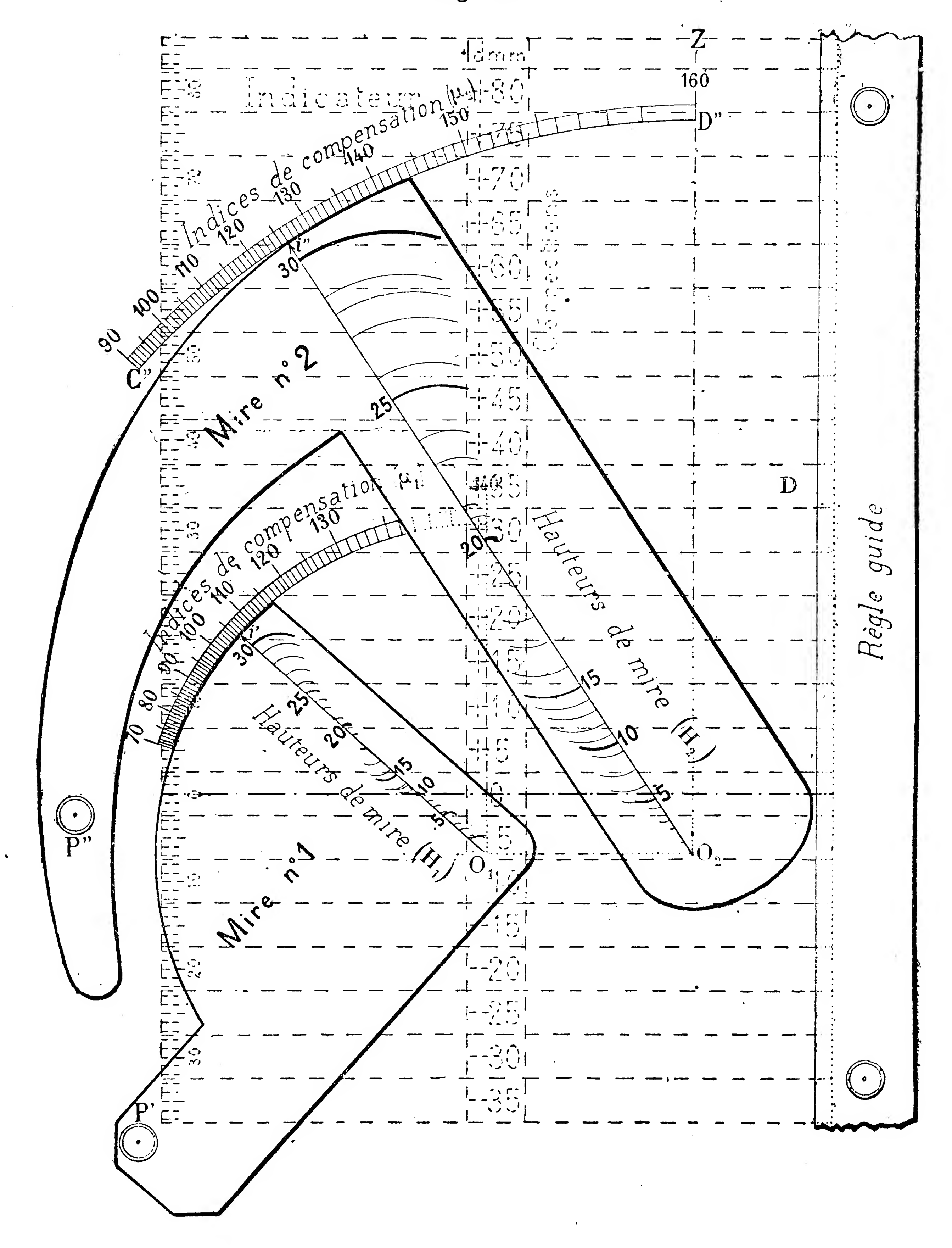
---

(1) Sur cette figure, empruntée à un ouvrage où les notations étaient différentes, on doit lire O′, H′, μ', O″, H″, μ'', au lieu de O_1, H_1, μ_1, O_2, H_2, μ_2.

(2) Cette échelle prête à l'observation que voici : Comme on n'a besoin que des valeurs arrondies de ε, au lieu d'élever, au support de l'échelle, des perpendiculaires par les points de cote ronde, on les mène par les points moyens entre ceux-ci, en constituant de cette façon des *cases* à tout l'intérieur de chacune desquelles s'applique la cote ronde qui s'y trouve comprise.

ments sont guidés par une règle le long de laquelle s'applique un bord du transparent.

Fig. 166.



La disposition de la figure 166 correspond aux données

$$\mu' = 106^{\text{cm}}, \qquad \mu'' = 126^{\text{cm}},$$
$$H' = 11^{\text{dm}},9, \qquad H'' = 24^{\text{dm}}.$$

Les indices i' et i'' ayant été placés aux points cotés 106 et 126 des

échelles (μ') et (μ'') et l'horizontale o de l'échelle transparente étant amenée tangentiellement au cercle coté 11 de l'échelle (H'), on voit que la tangente horizontale au cercle coté 24 de l'échelle (H") correspond à la division 40 de l'échelle transparente. On a donc ici

$$\varepsilon = 40^{\text{dm}}.$$

137. *Exemple d'éléments mixtes engendrés par une rotation : vibration de la lumière diffusée.* — Cet exemple est emprunté à la Thèse du lieutenant-colonel (alors capitaine) Lafay pour le doctorat ès Sciences physiques (¹).

$\mathcal{A}$ désignant un angle qui définit la vibration rectiligne incidente, $\mathcal{P}$ un angle qui définit la direction du grand axe de la vibration elliptique diffusée, les mêmes lettres affectées des indices 1 et 2 les mêmes angles pour le cas où la vibration diffusée devient rectiligne, a et b des variables liées aux directions des rayons incidents et diffusés et dépendant de la nature de la surface, l'équation à traduire en nomogramme est

$$\frac{\sin^2(\mathcal{P}-\mathcal{P}_2)\sin 2(\mathcal{A}-\mathcal{A}_1)}{a}+\frac{\sin^2(\mathcal{P}-\mathcal{P}_1)\sin 2(\mathcal{A}-\mathcal{A}_2)}{b}$$
$$= 2\sin(\mathcal{P}-\mathcal{P}_1)\sin(\mathcal{P}-\mathcal{P}_2)\sin(2\mathcal{A}-\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2).$$

Posant

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2 &= \alpha,\\ 2\mathcal{A}-\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2 &= \beta,\\ \mathcal{P}_1-\mathcal{P}_2 &= 2\alpha',\\ 2\mathcal{P}-\mathcal{P}_1-\mathcal{P}_2 &= 2\beta', \end{aligned}$$

on la transforme en

$$\frac{\sin^2(\alpha'+\beta')\sin(\beta-\alpha)}{a}+\frac{\sin^2(\beta'-\alpha')\sin(\alpha+\beta)}{b}$$
$$= 2\sin(\beta'-\alpha')\sin(\alpha'+\beta')\sin\beta,$$

et M. Lafay a remarqué que cette équation pouvait être mise sous la forme

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{tang}\beta} & \cos\alpha & 1 \\ -a\,\dfrac{\operatorname{tang}\beta'-\operatorname{tang}\alpha'}{\operatorname{tang}\beta'+\operatorname{tang}\alpha'} & a\,\dfrac{\operatorname{tang}\beta'-\operatorname{tang}\alpha'}{\operatorname{tang}\beta'+\operatorname{tang}\alpha'} & 1 \\ b\,\dfrac{\operatorname{tang}\beta'+\operatorname{tang}\alpha'}{\operatorname{tang}\beta'-\operatorname{tang}\alpha'} & b\,\dfrac{\operatorname{tang}\beta'+\operatorname{tang}\alpha'}{\operatorname{tang}\beta'-\operatorname{tang}\alpha'} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(¹) *Annales de Chimie et de Physique*, 7ᵉ série, t. XVI, p. 503 (1899).

On voit donc qu'elle exprime l'alignement des trois points X, U, V définis par

(X) $$x = \mu \frac{\sin\alpha}{\tang\beta}, \qquad y = \mu\cos\alpha,$$

(U) $$x = -\mu a \frac{\tang\beta' - \tang\alpha'}{\tang\beta' + \tang\alpha'}, \qquad y = \mu a \frac{\tang\beta' - \tang\alpha'}{\tang\beta' + \tang\alpha'},$$

(V) $$x = \mu b \frac{\tang\beta' + \tang\alpha'}{\tang\beta' - \tang\alpha'}, \qquad y = \mu b \frac{\tang\beta' + \tang\alpha'}{\tang\beta' - \tang\alpha'},$$

μ étant le module à la fois sur Ox et sur Oy.

Le point X, qui dépend des deux cotes α et β, est à la rencontre de la droite

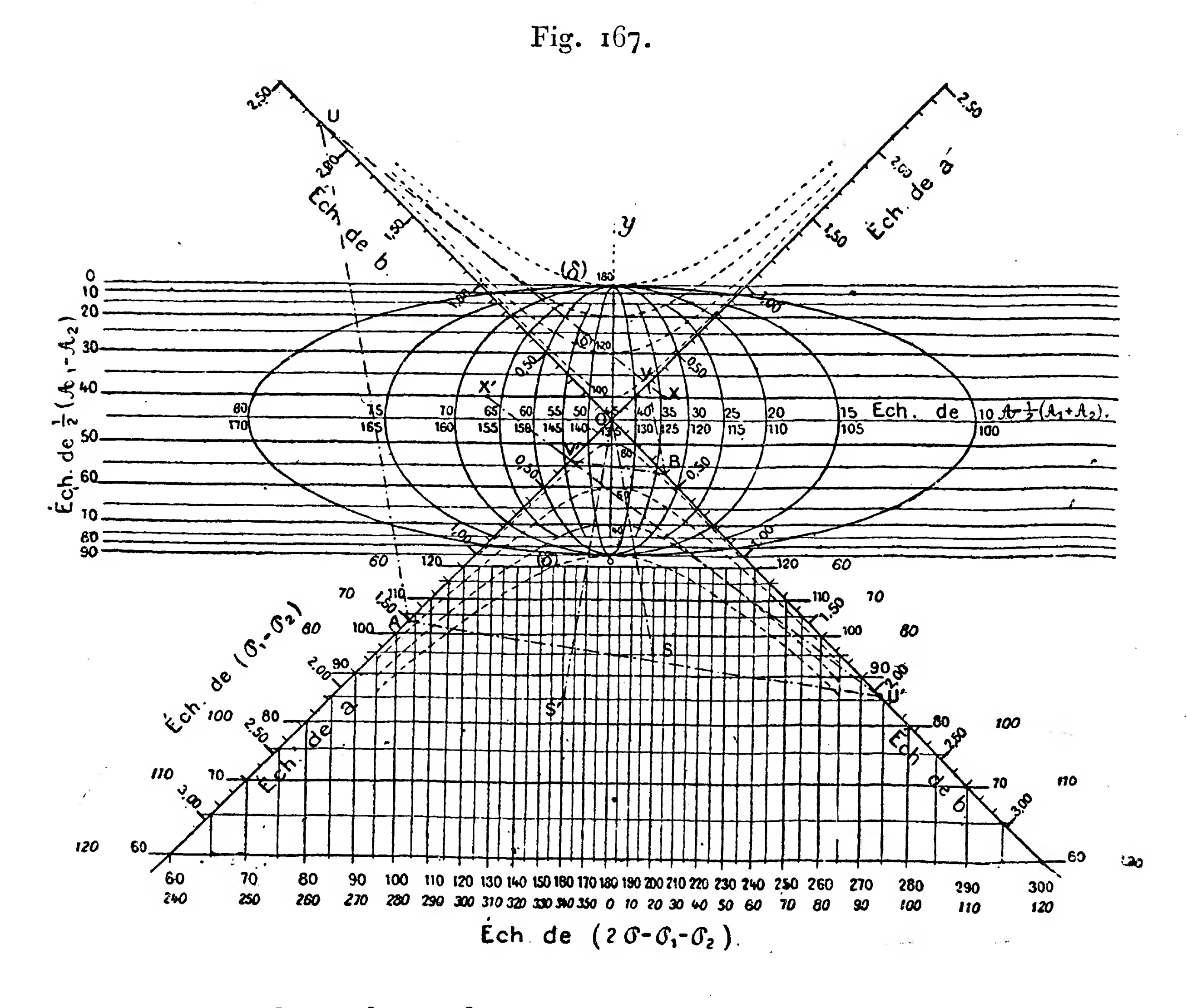
(α) $$y = \mu\cos\alpha$$

avec l'ellipse

(β) $$y^2 + x^2\tang^2\beta = \mu^2.$$

Les droites et les ellipses correspondantes, cotées sur la figure 167 respecti-

Fig. 167.



vement au moyen des valeurs de

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2)$$

et de

$$\frac{\beta}{2} = \mathcal{A} - \frac{1}{2}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2),$$

sont faciles à tracer.

Le point U est, on le voit immédiatement, à la rencontre de la seconde bissectrice des axes Ox et Oy avec la droite menée, par le point $A(x = -a, y = -a)$ de la première bissectrice, parallèlement à la direction OS dont le coefficient angulaire est

$$\mu = \frac{\text{tang}\,\beta'}{\text{tang}\,\alpha'}.$$

De même, le point V est à la rencontre de la première bissectrice avec la droite menée, par le point $B(x = b, y = -b)$ de la seconde, parallèlement à la même direction OS.

Les points A et B donnent naissance sur les bissectrices à des échelles métriques (a) et (b) faciles à marquer.

Pour définir la direction OS, on peut tracer sur le nomogramme le réseau (α', β'), défini par

$$x = -\mu \cot \beta', \qquad y = -\mu \cot \alpha',$$

ainsi que cela a été fait sur la figure 167. La direction OS est alors celle qui va du point O au point (α', β'), et il suffit de mener par les points cotés a et b des parallèles à cette direction pour obtenir les points U et V dont l'alignement donne X. Pour n'avoir pas à tracer ces parallèles, on aura évidemment recours à un transparent portant des index parallèles équidistants suffisamment rapprochés.

Finalement, le nomogramme se trouve ainsi constitué : le réseau (α, β) des parallèles (α) à Ox et des ellipses (β); le réseau (α', β') des parallèles (α') à Ox et des parallèles (β') à Oy; les échelles métriques (a) et (b) ayant pour supports les bissectrices OA et OB des axes Ox et Oy.

Le transparent à index parallèles permet de transporter de OA sur OB en U, et de OB sur OA en V, parallèlement à OS (direction qui dépend de α' et β') les points cotés a et b sur ces supports.

Il n'y a plus ensuite qu'à prendre au moyen d'un index l'alignement des points U, V et (α, β).

Il est toutefois plus simple, ainsi que M. Lafay l'a remarqué lui-même, de recourir à une échelle (α', β') tournante.

Supposons construit sur un transparent, dont l'origine O' reste en coïncidence avec O, et dont les axes $O'x'$ et $O'y'$ sont d'abord en coïncidence avec Ox et Oy, le réseau (α', β') défini par

$$x' = \mu \cot \beta', \qquad y' = -\mu \cot \alpha',$$

symétrique, dans cette position initiale, du réseau (α', β') précédent, par rapport à Oy. Lorsqu'on fera tourner ce transparent autour du point O, de manière à amener le point (α', β') à se trouver sur Oy, il est bien clair que son axe Oy' se confondra alors avec la direction OS précédemment définie.

Par suite, les droites mêmes de ce transparent, parallèles à Oy', qui passeront par les points cotés a et b, détermineront les points U et V.

Ce sont, en somme, les droites cotées (β') qui, considérées indépendamment de leurs cotes, engendrent par leur rencontre avec OB et OA les points mixtes U et V dont, par leur intermédiaire, les cotes a et b sont empruntées aux échelles de la partie fixe du nomogramme.

Remarquons que, si la direction OS passe par le point (α', β'), la direction OS′, qui lui est perpendiculaire, passe par le point

$$x = \mu \operatorname{tang} \beta', \qquad y = -\mu \operatorname{tang} \alpha'.$$

On obtient ainsi, dans le cas où les variables α' et β' sont représentées sur la partie fixe du nomogramme, un nouveau réseau, que nous désignerons par $(\alpha', \beta')_1$; il ne diffère du précédent que par ses cotes, qui pourront être inscrites à côté des premières, mais en chiffres penchés, afin de les en distinguer nettement.

Cela permet de ne faire usage que des points situés à l'intérieur de l'angle AOB. Si, en effet, la direction OS est extérieure à cet angle, la direction OS′ lui est intérieure. On prend alors les droites AU et BV perpendiculaires, au lieu de parallèles, à cette direction.

Si l'on a recours à des points (α', β') marqués sur le transparent mobile, le réseau $(\alpha', \beta')_1$, symétrique du précédent par rapport à Oy, est défini par

$$x' = -\mu \operatorname{tang} \beta', \qquad y' = -\mu \operatorname{tang} \alpha'.$$

Puisque ici les droites AU et BV sont alors perpendiculaires à OS′, elles sont données cette fois par les parallèles à Ox', au lieu des parallèles à Oy'.

L'emploi du nomogramme se résumera donc comme suit :

On amène le point d'intersection des droites cotées $2\mathfrak{P} - \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2$ *et* $\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2$ *du transparent sur l'axe* Oy. *Si, pour que ce point soit à l'intérieur de* AOB, *on a dû lire ses cotes dans le premier système, on prend les points de rencontre* U *et* V *des bissectrices* OA *et* OB *avec les droites du transparent parallèles à* Oy', *qui passent respectivement par les points cotés* a *et* b. *Si, au contraire, les cotes* $2\mathfrak{P} - \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2$ *et* $\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2$ *ont été lues dans le second système, on prend les points* U *et* V *au moyen des droites du transparent passant par* a *et* b, *mais parallèles à* Ox'.

Une droite tendue entre les points U *et* V *coupe alors la droite cotée* $\dfrac{\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2}{2}$ *sur une ellipse dont la cote fait connaître* $\mathcal{A} - \dfrac{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2}{2}$, *d'où,* $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_2$ *étant donnés, l'on déduit immédiatement* $\mathcal{A}$.

Sur la figure 167, construite dans l'hypothèse d'un système (α', β') fixe, on a, en traits pointillés, tracé les droites AU et BV correspondant aux exemples numériques suivants :

1° *Direction* OS.

Les données sont :

$$a = 1{,}5, \qquad b = 0{,}4;$$
$$\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2 = 95^\circ, \qquad \tfrac{1}{2}(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2) = 40^\circ;$$
$$2\mathfrak{P} - \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2 = 200^\circ, \qquad \tfrac{1}{2}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = 50^\circ.$$

On lit sur le nomogramme

$$\mathcal{A} - \tfrac{1}{2}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = 34^\circ,$$

d'où

$$\mathcal{A} = 84^\circ.$$

2° *Direction* OS'.

Données :

$$a = 1,5, \qquad b = 0,4;$$
$$\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 = 95^\circ, \qquad \tfrac{1}{2}(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2) = 40^\circ;$$
$$2\mathcal{P} - \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 = 340^\circ, \qquad \tfrac{1}{2}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = 50^\circ$$

On lit sur le nomogramme

$$\mathcal{A} - \tfrac{1}{2}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = 67^\circ,$$

d'où

$$\mathcal{A} = 117^\circ.$$

On remarque aussi sur la figure 167 des hyperboles tracées en pointillé et marquées δ. Leur signification est la suivante :

Aux variables a et b est liée la variable δ, différence de phase introduite par la diffusion entre les deux composantes d'une vibration, par l'équation

$$ab = \cos^2\delta.$$

Or, les distanees OU et OV des points U et V à l'origine sont données, d'après les expressions écrites plus haut des coordonnées de ces points par

$$\text{OU} = a\sqrt{2}\,\frac{\operatorname{tang}\beta' - \operatorname{tang}\alpha'}{\operatorname{tang}\beta' + \operatorname{tang}\alpha'}, \qquad \text{OV} = b\sqrt{2}\,\frac{\operatorname{tang}\beta' + \operatorname{tang}\alpha'}{\operatorname{tang}\beta' - \operatorname{tang}\alpha'}.$$

Donc

$$\text{OU}.\text{OV} = 2ab = 2\cos^2\delta.$$

Il en résulte que la droite UV est tangente à une hyperbole ayant Ox et Oy pour asymptotes. Ce sont les hyperboles correspondant aux diverses valeurs de δ qu'on a tracées en pointillé sur la figure 167. Celle d'entre elles qui est tangente à la droite UV fait connaître la valeur de δ [1].

B. — Systèmes mobiles a deux degrés de liberté.

138. *Système à double translation. Résolution des équations trinomes à exposants quelconques.* — On peut combiner la translation de l'échelle dans le sens de sa longueur avec une translation perpendiculaire à cette longueur.

---

(1) Ce complément du nomogramme rentre, comme l'on voit, à une homographie près, dans le type des abaques tangentiels généraux (n° 59).

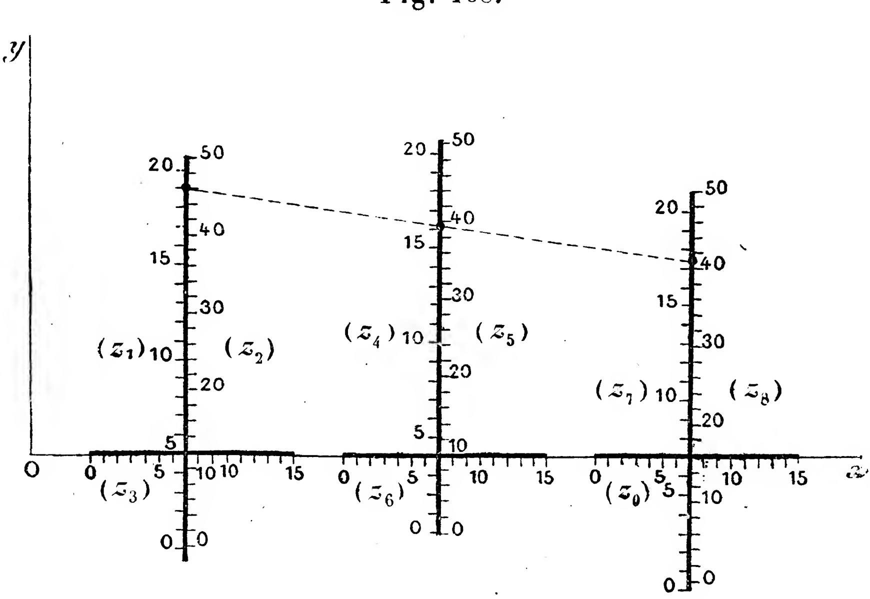
Si, par exemple, nous prenons un nomogramme à points alignés, constitué au moyen de trois échelles rectilignes parallèles (Ch. IV, sect. II, A), nous pouvons rendre chacune des trois échelles mobile : 1° dans le sens de sa longueur; 2° dans le sens perpendiculaire à cette longueur.

Pour définir la première translation, on peut accoler à l'échelle (z_1) une échelle (z_2) dont on amène un point de cote donnée sur l'axe Ox; pour définir la seconde, il suffit de faire passer le support de l'échelle (z_2) par un point de cote donnée sur une échelle (z_3) accolée à Ox. Dès lors, les coordonnées du point z_1 sont

$$y = \mu_1(f_1 - f_2), \qquad x = \mu_2 f_3.$$

Par suite, en supposant les modules μ_1 et μ_2 les mêmes pour les diverses échelles parallèles, on voit que l'alignement des points z_1,

Fig. 168.



z_4, z_7 (*fig.* 168) donnera une représentation de l'équation

$$\begin{vmatrix} f_1 - f_2 & f_3 & 1 \\ f_4 - f_5 & f_6 & 1 \\ f_7 - f_8 & f_9 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En remplaçant les neuf échelles qui viennent d'être définies par des échelles binaires, on a un nomogramme à dix-huit variables.

On pourra, sur les trois supports parallèles, supposer les échelles (z_1) et (z_2), (z_4) et (z_5), (z_7) et (z_8) respectivement confondues.

On pourra aussi attribuer à plusieurs des variables des valeurs constantes. Supposons, par exemple, le point z_7 constamment confondu avec l'origine et le point z_4 variable sur une échelle fixe. La forme correspondante de l'équation sera, en supposant les fonctions f_1 et f_2 identiques,

$$\begin{vmatrix} f_1 - f_2 & f_3 & 1 \\ f_4 & h & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$h(f_1 - f_2) - f_3 f_4 = 0,$$

h étant une constante.

En particulier, prenons pour f_1, f_2 et f_4 la fonction logarithmique, et pour f_3 la fonction $h z_3$. Nous aurons

$$\log z_1 - \log z_2 - z_3 \log z_4 = 0$$

ou

$$z_1 = z_2 z_4^{z_3}.$$

Si l'on remplace les lettres z_1, z_2, z_3 et z_4 respectivement par s, m, μ et z, on peut décrire le nomogramme correspondant de la manière suivante :

L'axe Ox *portant une échelle métrique quelconque, on lui élève au point coté* 1 *une perpendiculaire sur laquelle on porte une échelle logarithmique fixe* E *dont le point* 1 *se trouve sur* Ox; *puis on amène une échelle logarithmique mobile* E_m, *de même module que la précédente et qui lui reste parallèle, à passer par le point coté* μ *de* Ox, *son point coté* m *se trouvant sur* Ox. *Si alors une droite, tendue à partir du point* O, *coupe les échelles* E *et* E_m *aux points respectivement cotés* z *et* s, *on a*

$$s = m z^{\mu}.$$

Prenons une seconde échelle mobile E_n pour laquelle nous remplacerons s, m, μ respectivement par t, n, ν. Nous aurons de même

$$t = n z^{\nu}.$$

De là l'ingénieux procédé de M. L. Torres pour la résolution des équations trinomes d'ordre quelconque (1). Une telle équation peut toujours être mise

---

(1) Ce procédé graphique constitue le schéma d'une curieuse machine conçue par M. Torres Quevedo en vue de cette résolution. On sait, au reste, que le savant ingénieur espagnol a créé une nouvelle espèce de machines à calculer, dites par lui *algébriques* (par opposition avec les machines ordinaires dites *arithmétiques*), dans lesquelles des index reliés mécaniquement se déplacent devant des échelles graduées réalisées matériellement de telle sorte qu'à chaque instant les cotes lues sous les index satisfassent à une relation algébrique donnée. Ce sont là, suivant la propre remarque de M. Torres Quevedo, de véritables nomogrammes mécaniques.

Dans un Mémoire vraiment fondamental, inséré en 1901 au *Recueil des savants étrangers* de l'Académie des Sciences, ce savant ingénieur a démontré que n'importe

sous la forme

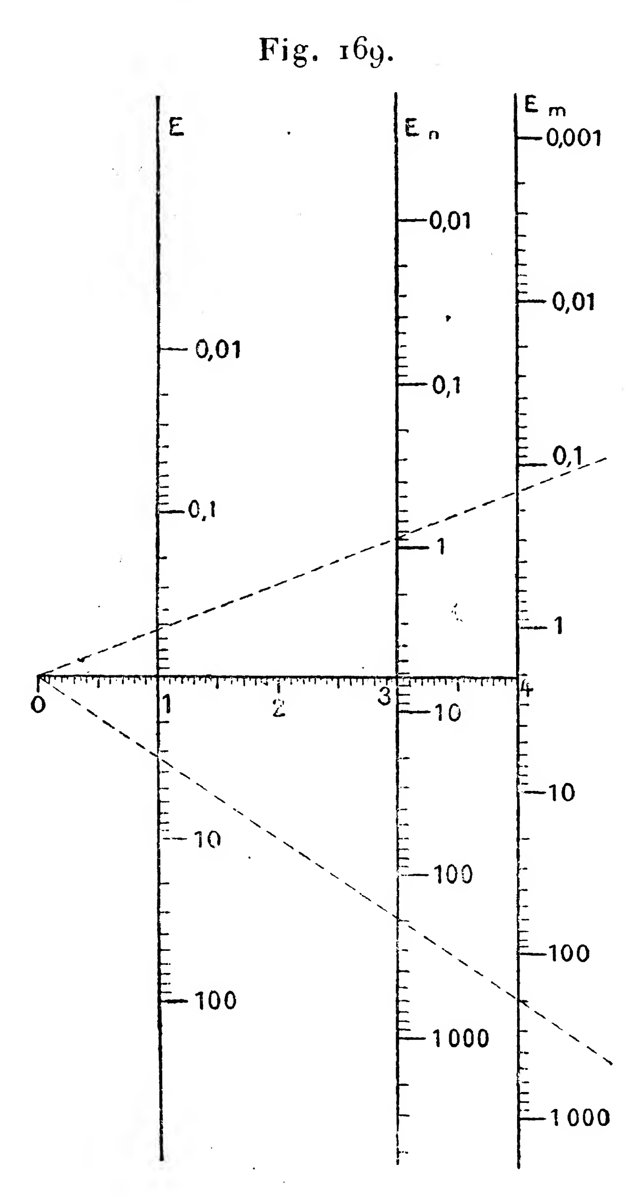
$$m z^{\mu} \pm n z^{\nu} = 1.$$

Disposons nos deux échelles E_m et E_n comme il vient d'être dit (*fig.* 169). Si nous tendons à partir du point O une droite qui coupe ces échelles en des points dont les cotes s et t soient telles que l'on ait

$$s \pm t = 1,$$

la valeur de z lue sur l'échelle E, à son intersection avec cette droite, est une racine de l'équation ci-dessus.

Fig. 169.



La disposition des échelles de la figure 169 répond au cas où l'on a

$$m = 2,1, \qquad n = 6,5,$$
$$\mu = 4, \qquad \nu = 3.$$

---

quel calcul arithmétique ou analytique (comme l'intégration des équations différentielles de type quelconque) pouvait être effectué à l'aide de tels mécanismes.

Pour plus de détail sur l'œuvre mécanique, vraiment extraordinaire de M. Torres Quevedo, nous renverrons à l'article que nous lui avons consacré dans la *Revue générale des Sciences*, 2[e] sem. 1916, p. 547.

On voit que la position de l'index marquée en pointillé au-dessus de Ox coupe les échelles E_m et E_n en des points dont les cotes 0,11 et 0,89 ont une somme égale à 1. Par suite, la cote

$$z = 0,51$$

du point où cet index rencontre l'échelle E est racine de l'équation

$$2,1x^4 + 6,5x^3 = 1.$$

De même, la position de l'index marquée en pointillé au-dessous de Ox coupe les échelles E_m et E_n en des points dont les cotes 200 et 199 diffèrent de 1 [1]. Par suite, la cote

$$z = 3,11$$

du point où cet index rencontre l'échelle E est racine de l'équation

$$2,1x^4 - 6,5x^3 = 1.$$

139. *Extension de l'usage de l'anamorphose logarithmique grâce à une translation quelconque. Images logarithmiques.* — L'ingénieuse méthode due à M. R. Mehmke [2] fournit des nomogrammes qui comportent, comme on va voir, des systèmes à translation quelconque, par suite à deux degrés de liberté.

Étant donnée une équation entre deux variables

$$F_{12} = 0,$$

M. Mehmke appelle *image logarithmique* de cette équation la courbe obtenue par anamorphose logarithmique (n° 26) de celle qui la représenterait en coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire celle qui est définie par

$$x = \mu \log z_1, \qquad y = \mu \log z_2.$$

μ étant un module quelconque.

Cela posé, le principe de la méthode peut s'énoncer ainsi :

Les images logarithmiques d'une équation de la forme [3]

$$\pm z_1^{m_1} z_2^{m_2} \pm c' z_1^{m'_1} z_2^{m'_2} \pm c'' z_1^{m''_1} z_2^{m''_2} \pm c''' z_1^{m'''_1} z_2^{m'''_2} = 0,$$

---

(1) Le nomogramme dont on s'est réellement servi était muni d'échelles logarithmiques dont celles de la figure 169 sont la réduction dans le rapport de 1 à 6,25.

(2) *Civilingenieur*, t. XXXV, col. 617 (1889), et *Z. S.*, t. XXXV, p. 174 (1890). Dans un Mémoire plus récent, M. Mehmke a étendu l'application de ces ingénieux principes aux grandeurs complexes (*Z. S.*, t. XL, p. 15; 1895).

(3) L'anamorphose logarithmique ne s'appliquant qu'aux *valeurs absolues* des variables, il est nécessaire de mettre en évidence les signes des différents termes.

que nous désignerons par $[c', c'', c''']$, *peuvent toutes s'obtenir par translation de l'image logarithmique d'une équation de la forme*

$$\pm z_1^{m_1} z_2^{m_2} \pm z_1^{m'_1} z_2^{m'_2} \pm z_1^{m''_1} z_2^{m''_2} \pm \gamma z_1^{m'''_1} z_2^{m'''_2} = 0,$$

que nous désignerons par $[\gamma]$.

Supposons, en effet, ce système rapporté à des axes $O'x'$ et $O'y'$ mobiles relativement aux premiers tout en leur restant respectivement parallèles, et soient x_0, y_0 les coordonnées de l'origine de ces axes mobiles, dans le premier système.

Le point (z'_1, z'_2) du système mobile aura donc, après la translation qui amène l'origine mobile en coïncidence avec le point (x_0, y_0), les coordonnées

$$x = x_0 + \mu \log z'_1, \qquad y = y_0 + \mu \log z'_2$$

ou, en posant

$$x_0 = \mu \log X_0, \qquad y_0 = \mu \log Y_0,$$

les coordonnées

$$x = \mu \log X_0 \alpha'_1, \qquad y = \mu \log Y_0 \alpha'_2.$$

Il s'ensuit que, si ce point se trouve maintenant en coïncidence avec le point (z_1, z_2) du système fixe, on a

$$z_1 = X_0 z'_1, \qquad z_2 = Y_0 z'_2.$$

Par suite, z_1 et z_2 sont liés par l'équation

$$\pm \frac{z_1^{m_1} z_2^{m_2}}{X_0^{m_1} Y_0^{m_2}} \pm \frac{z_1^{m'_1} z_2^{m'_2}}{X_0^{m'_1} Y_0^{m'_2}} \pm \frac{z_1^{m''_1} z_2^{m''_2}}{X_0^{m''_1} Y_0^{m''_2}} \pm \gamma \frac{z_1^{m'''_1} z_2^{m'''_2}}{X_0^{m'''_1} Y_0^{m'''_2}} = 0,$$

et il suffit de poser

$$\frac{X_0^{m_1} Y_0^{m_2}}{X_0^{m'_1} Y_0^{m'_2}} = c', \qquad \frac{X_0^{m_1} Y_0^{m_2}}{X_0^{m''_1} Y_0^{m''_2}} = c'', \qquad \frac{\gamma X_0^{m_1} Y_0^{m_2}}{X_0^{m'''_1} Y_0^{m'''_2}} = c''',$$

pour que l'image $[\gamma]$ transportée comme il vient d'être dit coïncide avec l'image $[c', c'', c''']$.

Remarquons que ces trois équations de condition, lorsqu'on se reporte à la définition de X_0 et Y_0, peuvent s'écrire

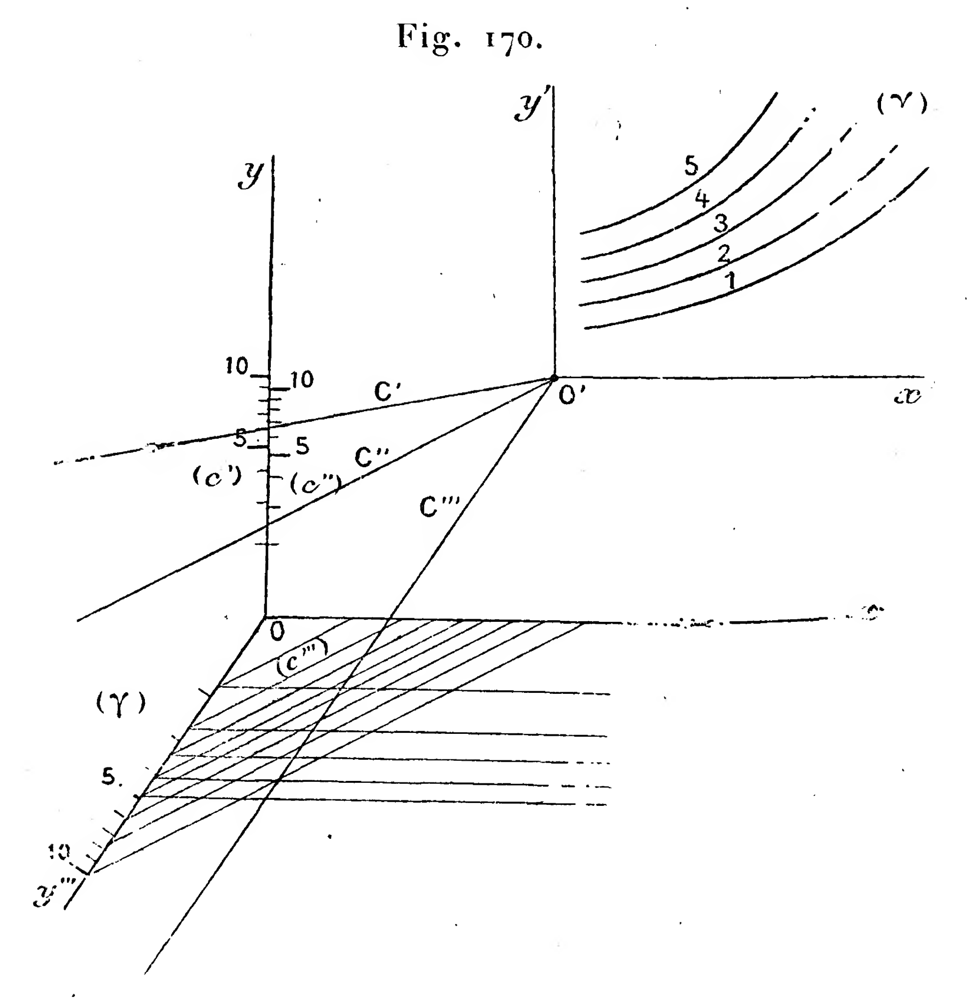
(1) $$(m_1 - m'_1)x_0 + (m_2 - m'_2)y_0 = \mu \log c',$$

(2) $$(m_1 - m''_1)x_0 + (m_2 - m''_2)y_0 = \mu \log c'',$$

(3) $$(m_1 - m'''_1)x_0 + (m_2 - m'''_2)y_0 = \mu \log \frac{c'''}{\gamma}.$$

Les équations (1) et (2) montrent que les droites C′ et C″, dont les coefficients angulaires ont respectivement les valeurs fixes $\frac{m_1 - m'_1}{m'_2 - m_2}$

Fig. 170.



et $\frac{m_1 - m''_1}{m''_2 - m_2}$, et qui passent par l'origine mobile (x_0, y_0), coupent l'axe Oy respectivement aux points dont les ordonnées sont

$$y = \frac{\mu \log c'}{m_2 - m'_2} = \mu' \log c', \qquad y = \frac{\mu \log c''}{m_2 - m''_2} = \mu'' \log c'',$$

l'équation (3) que la droite C‴, dont le coefficient angulaire est égal à $\frac{m_1 - m'''_1}{m'''_2 - m_2}$, et qui passe également par l'origine mobile (x_0, y_0), coupe l'axe Ox au point dont l'abscisse est

$$x = \frac{\mu}{m_1 - m'''_1} \log \frac{c'''}{\gamma} = \mu''' \log \frac{c'''}{\gamma} = \mu''' \log \gamma'''.$$

Construisons le long de Oy les échelles logarithmiques (c') et (c'') de modules μ' et μ'' et le long de Ox l'échelle logarithmique (γ''') de module μ'''.

Les trois remarques ci-dessus nous permettent alors d'obtenir facilement l'image logarithmique $[c', c'', c''']$ lorsqu'on a construit sur un transparent le système des images logarithmiques $[\gamma]$, ainsi que les

droites C', C'' et C''' (*fig.* 170), que nous appellerons les *index* de ce transparent.

Il en résulte, en effet, que *si le transparent, tout en conservant son orientation, est déplacé de façon que les index C' et C'' soient amenés à passer par les points cotés c' et c'' respectivement sur les deux échelles de Oy* (¹), *et si, dans cette position, l'index C''' passe par le point coté γ''' de l'échelle de Ox, l'image $[\gamma]$ dont la cote γ est égale à $\frac{c'''}{\gamma'''}$ coïncide avec l'image $[c', c'', c''']$.*

On conçoit, d'après cet énoncé, pourquoi le système (γ) peut être dit *fondamental* pour les images $[c', c'', c''']$.

On peut, pour éviter le calcul de $\frac{c'''}{\gamma'''}$ (²), recourir à l'artifice suivant :

Les diverses positions de l'index C''', *qui se déplace parallèlement à lui-même*, donnent sur Ox, ainsi qu'on vient de le voir, les valeurs de

$$x = \mu''' \log \frac{c'''}{\gamma}.$$

Nous pouvons construire le long de Ox une échelle binaire de cette fonction (nº 50) en prenant, pour définir cette échelle, *un axe Oy''' parallèle à la direction fixe de C'''*. Cette échelle sera, dès lors, définie par

$$y = \mu''' \log \gamma$$

et

$$x + y = \mu''' \log c''',$$

et la détermination de γ, une fois le transparent mis en place au moyen de c' et c'', se réduira à ceci : *la cote γ est celle de l'horizontale de l'échelle binaire (γ, c''') passant par le point où la droite C''' coupe l'oblique cotée c'''.*

On conçoit immédiatement comment ce principe permet la résolu-

---

(¹) Pour fixer avec précision la position du transparent, il est bon de constituer celui-ci d'une matière rigide (celluloïd) ayant un bord B_1 parallèle à Oy et un bord B_2 parallèle à C'. Le bord B_1 étant appliqué sur Oy, on le fait glisser le long d'une règle jusqu'à ce que C' passe par le point (c') de Oy, puis on applique une règle le long du bord B_2 et l'on fait glisser le transparent contre cette règle jusqu'à ce que C'' passe par le point (c'').

(²) Il est à peu près aussi simple, et cela a l'avantage de dégager le tableau, d'effectuer ce petit calcul auxiliaire, soit au moyen d'un des nombreux nomogrammes pour la multiplication décrits dans cet ouvrage, soit au moyen de la règle à calcul.

tion d'un système de deux équations simultanées telles que

$$\pm z_1^{m_1} z_2^{m_2} \pm c' z_1^{m'_1} z_2^{m'_2} \pm c'' z_1^{m''_1} z_2^{m''_2} \pm c''' z_1^{m'''_1} z_2^{m'''_2} = 0,$$
$$\pm z_1^{n_1} z_2^{n_2} \pm d' z_1^{n'_1} z_2^{n'_2} \pm d'' z_1^{n''_1} z_2^{n''_2} \pm d''' z_1^{n'''_1} z_2^{n'''_2} = 0,$$

où les exposants sont considérés comme constants et les coefficients comme variables.

Pour résoudre ce système d'équations, il suffit de tracer sur le quadrillage logarithmique défini par

$$x = \mu \log z_1, \qquad y = \mu \log z_2$$

les images $[c', c'', c''']$ et $[d', d'', d''']$ des deux équations ci-dessus. Les cotes z_1 et z_2 des différents points de rencontre de ces images sont les systèmes de solutions cherchés. Or, ces images peuvent être obtenues par translation du système fondamental (γ), qui vient d'être défini ci-dessus, et du système fondamental analogue (δ) pour la seconde équation.

Les cotes (z_1) et (z_2) des deux systèmes de parallèles constituant le quadrillage pouvant être rejetées sur des parallèles à ces axes, on dispose des axes Ox et Oy pour y accoler d'une part l'échelle binaire (c''', γ), de l'autre les échelles simples (c') et (c''). Si l'on a

$$\begin{aligned} m_2 - m'_2 &= n_2 - n'_2, \\ m_2 - m''_2 &= n_2 - n''_2, \\ m_1 - m'''_1 &= n_1 - n'''_1, \\ m_2 - m'''_2 &= n_2 - n'''_2, \end{aligned}$$

ces diverses échelles sont identiques aux échelles (d''', δ), (d') et (d'') relatives à la seconde équation et peuvent, par suite, servir également pour elle.

S'il n'en est pas ainsi, on fixe la position de l'image $[\delta]$ coïncidant avec $[d', d'', d''']$ sur un second tableau, puis on transporte le transparent de ce second tableau sur le premier où est déjà disposée l'image $[c', c'', c''']$ en repérant sa position au moyen des points où ses index D' et D'' coupent les axes portant les graduations (z_1) et (z_2) qui sont les mêmes sur les deux tableaux.

Remarque. — Si $c''' = 0$, on a $\lambda = 0$, quels que soient c' et c''. Par suite, toutes les images $[c', c'', 0]$, que nous représentons plus simplement par $[c', c'']$, sont obtenues par *translation de la seule*

image [o], c'est-à-dire que les images logarithmiques de toutes les équations telles què

$$\pm z_1^{m_1} z_2^{m_2} \pm c' z_1^{m'_1} z_2^{m'_2} \pm c'' z_1^{m''_1} z_2^{m''_2} = 0$$

sont obtenues par translation de la seule équation

$$\pm z_1^{m_1} z_1^{m_2} \pm z_1^{m'_1} z_2^{m'_2} \pm z_1^{m''_1} z_2^{m''_2} = 0.$$

Il suffit, pour obtenir l'image $[c', c'']$ *de faire passer les index* C′ *et* C″ *respectivement par les points cotés* c' *et* c'' *sur les échelles portées par* Oy.

Dans ce cas, par conséquent, le troisième index C‴ disparaît.

140. *Images logarithmiques de polynomes à une variable.* — La méthode précédente se simplifie lorsqu'il s'agit des images logarithmiques d'équations de la forme

$$z_2 = \pm c' z_1^{m'} \pm c'' z_1^{m''} \pm c''' z_1^{m'''}.$$

Ici, en effet, on a, en se reportant aux notations du numéro précédent :

$$m_1 = 0, \qquad m'_1 = m', \qquad m'_1 = m'', \qquad m'''_1 = m''',$$
$$m_2 = 1, \qquad m'_2 = 0, \qquad m''_2 = 0, \qquad m'''_2 = 0.$$

Par suite, les coefficients angulaires des index C′, C″, C‴ se réduisent à m', m'', m''', les modules μ', μ'' à μ, et *les échelles* (c') *et* (c'') *coïncident avec l'échelle* (z_2).

Pour déterminer γ, on peut prendre le point de rencontre de C‴ non plus avec Ox, mais avec Oy, *ce qui, pour* (γ'''), *donne encore l'échelle* (z_2).

On voit donc que le nomogramme se réduit en ce cas au quadrillage logarithmique (z_1, z_2) complété par le transparent portant : 1° les index C′, C″, C‴, droites de coefficients angulaires m', m'', m''', menées par son origine; 2° les courbes fondamentales $[\gamma]$, images logarithmiques des équations

$$z_2 = \pm z_1^{m'} \pm z_1^{m''} \pm \gamma z_1^{m'''},$$

Pour avoir l'image $[c', c'', c''']$, *on place le transparent sur le quadrillage, de façon que les index* C′ *et* C″ *passent respectivement par les points cotés* c' *et* c'' *de l'échelle* (z_2) *portée sur* Oy,

et l'on prend parmi les images $[\gamma]$ *celle dont la cote est donnée par*

$$\gamma = \frac{c'''}{\gamma'''},$$

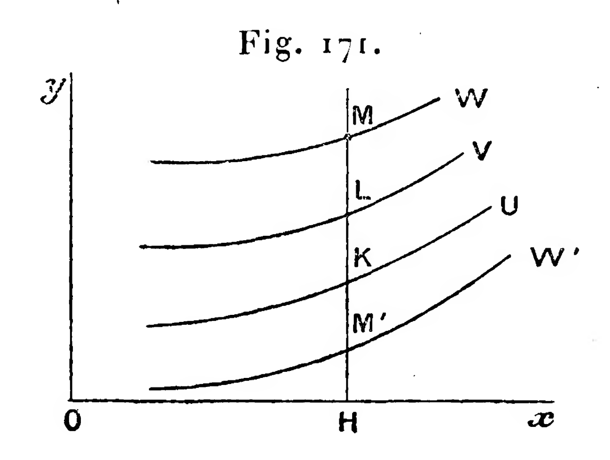
γ''' *étant la cote du point où l'index* C''' *coupe la même échelle.*

On peut, pour éviter le calcul de γ, recourir, comme dans le cas général, à l'emploi d'une échelle binaire accolée cette fois à Oy.

En outre, la remarque terminant le numéro précédent s'applique encore et montre que si l'on ne prend que deux termes dans le second membre de l'équation ci-dessus, on obtient les diverses images logarithmiques par les translations d'une seule courbe ([1]).

Avant d'indiquer quelques exemples de nomogrammes fondés sur l'emploi des images logarithmiques de polynomes, nous dirons quelques mots de la construction de ces images, d'après M. Mehmke.

Fig. 171.



Supposons que deux courbes U et V (*fig.* 171) soient les images logarithmiques des fonctions

$$z_2 = U_1$$

et

$$z_2 = V_1,$$

c'est-à-dire que, sur l'ordonnée correspondant à l'abscisse z_1, on ait

$$HK = \mu \log U_1,$$
$$HL = \mu \log V_1.$$

Soit, en outre, W l'image logarithmique de la fonction

$$z_2 = U_1 + V_1,$$

de telle sorte que l'on ait

$$HM = \mu \log(U_1 + V_1).$$

([1]) En supposant, bien entendu, que les signes des divers termes restent les mêmes. Pour chaque combinaison de signes, il faut avoir recours à une courbe spéciale.

On a

$$HM = \mu \log V_1 + \mu \log\left(1 + \frac{1}{\frac{V_1}{U_1}}\right),$$

d'où

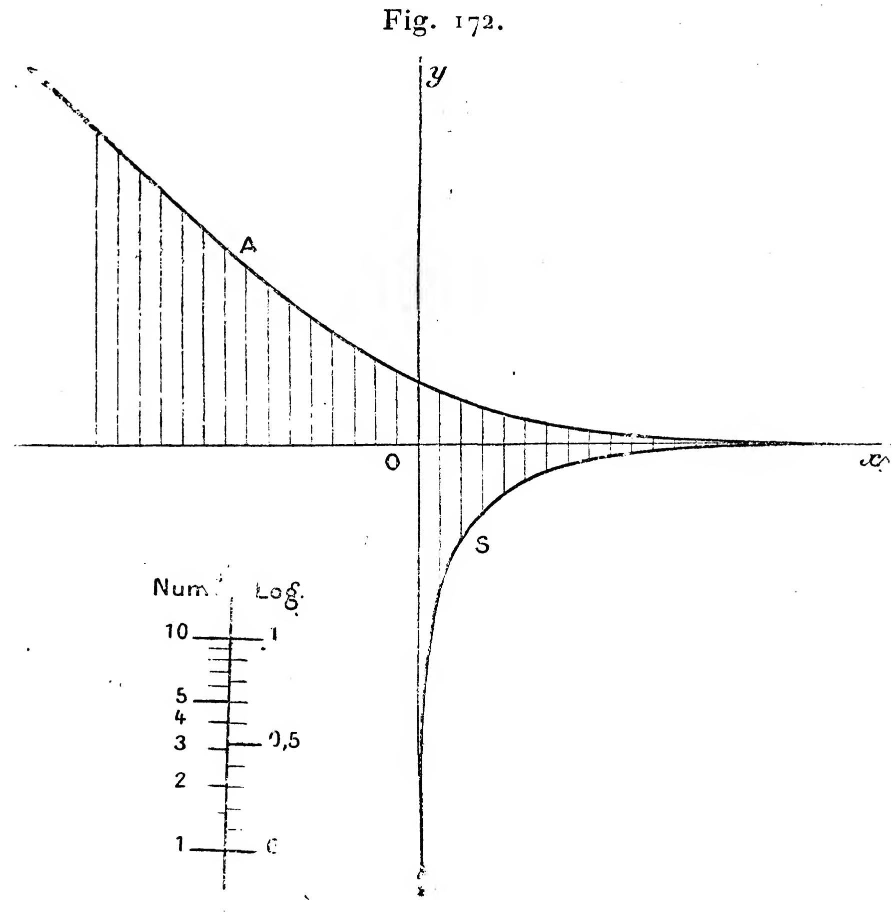
$$HM - HL = LM = \mu \log\left(1 + \frac{1}{\frac{V_1}{U_1}}\right).$$

Supposons construite la courbe représentative des logarithmes d'addition de Gauss, définie par

$$x = \mu \log t, \qquad y = \mu \log\left(1 + \frac{1}{t}\right),$$

courbe que nous appellerons *logarithmique d'addition* (¹), et qui est représentée sur la figure 172 par la courbe A lorsqu'on prend $\mu = 2^{cm}$.

Fig. 172.



On voit que si $t = \frac{U_1}{V_1}$, l'ordonnée correspondante doit être égale

(¹) La remarquable *machine à résoudre les équations algébriques*, de M. Torres Quevedo est fondée en partie sur une traduction mécanique du mode de liaison défini géométriquement par cette courbe.

à LM. Or, si t a cette valeur, on a

$$x = \mu \log t = \mu \log U_1 - \mu \log V_1 = KL.$$

Ainsi donc, *pour déduire le point* M *des points* K *et* L, *il suffit de prendre* KL *en abscisse de la courbe* A *sur la figure* 172; *l'ordonnée correspondante est égale à* LM.

S'il s'agissait de construire l'image logarithmique W' de

$$z_2 = V_1 - U_1,$$

on verrait de même que M'K *serait l'abscisse de* A *correspondant à l'ordonnée* KL. Mais, afin d'éviter toute confusion, il vaut mieux recourir à la courbe *logarithmique de soustraction* définie par

$$x = \mu \log t, \qquad y = \mu \log\left(1 - \frac{1}{t}\right)$$

et représentée par S sur la figure 172.

Le segment LM' *est alors égal à l'ordonnée de la courbe* S *correspondant à l'abscisse* KL (¹).

Dès lors, pour construire l'image logarithmique de

$$z_2 = \pm z_1^{m'} \pm z_1^{m''},$$

nous commençons par construire les images logarithmiques de

$$z_2 = z_1^{m}$$

et de

$$z_2 = z_1^{m''},$$

qui sont précisément les index C' et C''. De ces droites, par le procédé qui vient d'être décrit, nous déduisons immédiatement l'image demandée. Cette image, à son tour, jointe à celle de

$$z_2 = \gamma z_1^{m'''},$$

c'est-à-dire à une droite, permet d'obtenir, toujours par le même procédé, celle de

$$z_2 = \pm z_1^{m'_1} \pm z_1^{m''_1} \pm \gamma z_1^{m'''_1}.$$

(¹) M. E.-A. Brauer a imaginé un curieux appareil dit *compas logarithmique*, muni de trois pointes en ligne droite telles que si deux de ces pointes sont placées sur les points K et L de la figure 171, la troisième vient automatiquement se placer au point M. Ce compas est décrit dans le *Supplément* au *Katalog der mathematischer Modelle* de M. Walter Dyck (p. 40).

141. *Principe des nomogrammes à images logarithmiques.* — Le principe des nomogrammes à images logarithmiques est le suivant :

Soit une équation de la forme

$$f(z) = g(z),$$

f et g étant des polynomes de la forme indiquée au début du numéro précédent. Posons

$$z_2 = f(z) = g(z).$$

Nous pourrons obtenir les images I_f et I_g de ces polynomes sur un quadrillage logarithmique par le procédé indiqué au numéro précédent si nous avons pour chacun de ces polynomes un transparent portant soit le système des images fondamentales, s'il s'agit d'un polynome à trois termes, soit l'image fondamentale unique.

Les cotes z_1 des verticales du quadrillage passant par les points de rencontre des images I_f et I_g sont les racines positives de l'équation donnée, dont les racines négatives pourront, s'il est besoin, s'obtenir de même en valeur absolue comme racines positives de la transformée en $-z$.

Puisque seules les parallèles à Oy du quadrillage interviennent dans le mode d'emploi du nomogramme, on pourra se dispenser de tracer les parallèles à Ox dont les seules cotes devront subsister sur Oy pour permettre, comme on l'a vu au numéro précédent, de fixer la position des index ainsi que la valeur de γ lorsqu'on a affaire à un polynome à trois termes. D'ailleurs, comme on pourrait avoir, pour les deux polynomes, des échelles binaires différentes pour le calcul de γ, il vaudra mieux, en général, se contenter d'effectuer ce petit calcul à part ainsi qu'on l'a dit dans le second renvoi de la page 417.

Nous plaçant donc dans le cas général, nous pourrons décrire comme suit un nomogramme à images logarithmiques :

Le nomogramme se compose : 1° *d'un plan fixe dont les axes Ox et Oy portent des échelles logarithmiques de même module et sur lequel on a tracé une série de droites (z) parallèles à Oy et passant par les points de division de l'échelle de Ox;* 2° *de deux transparents portant respectivement les images logarithmiques $[\gamma]$ et $[\delta]$ construites comme il a été dit au n° 140 avec leurs index C', C'', C''' pour l'un, D', D'', D''' pour l'autre.*

Quant au mode d'emploi, il se réduit à ceci : *Si les polynomes f et g ont respectivement pour coefficients c', c'', c''' et d', d'', d''', on place les transparents, dont l'orientation est maintenue constante* (1), *sur le plan fixe, de façon que les index C' et C'' d'une part, D' et D'' de l'autre, coupent l'échelle de Oy respectivement aux points dont les cotes sont c' et c'', d' et d''. Si, dans cette position, les index C''' et D''' coupent la même échelle aux points dont les cotes sont γ''' et δ''', on prend sur les transparents les images de cotes $\frac{c'''}{\gamma'''}$ et $\frac{d'''}{\delta'''}$. Les cotes des verticales passant par les points de rencontre de ces deux images sont les racines z cherchées.*

Pour distinguer les rôles joués par les divers index, C' et C'' d'une part, D' et D'' de l'autre pourront être dits des *index de position*, C''' et D''' des *index de résolution*.

Nous allons maintenant indiquer quelques exemples de tels nomogrammes, empruntés également à M. Mehmke.

Exemples. — 1° *Résolution des équations trinomes de degré quelconque.* — Une équation trinome de degré quelconque peut toujours se mettre sous la forme

$$z^m = \pm p z^n \pm q$$

ou, en prenant pour inconnue z^n et posant $\frac{m}{n} = \mu$ (2),

$$z^\mu = \pm p z \pm q.$$

Formons les images logarithmiques des deux membres, suivant ce qui a été dit au numéro précédent.

Pour le premier membre, ce sont les droites fixes C_μ passant par l'origine et ayant précisément pour coefficient angulaire μ.

---

(1) *Voir* le premier renvoi de la page 417.

(2) Il est à remarquer qu'une telle équation peut, pour une valeur particulière de μ, être traduite en un nomogramme à points alignés tel que ceux qui ont été construits pour $\mu = 2$ et $\mu = 3$ aux nos 79 et 80. Les points (z), pour cette valeur de μ, seront distribués sur une courbe C_μ, et l'on voit que, pour une certaine valeur de z, les divers points obtenus en faisant varier μ sont distribués sur une parallèle aux axes Au et Bv, attendu que les coordonnées de chaque point (z) sont données par

$$x = \delta \frac{\mu_1 - \mu_2 z}{\mu_1 + \mu_2 z}, \qquad y = \frac{-\mu_1 \mu_2 z^\mu}{\mu_1 + \mu_2 z}.$$

Si donc z et μ sont considérés tous deux comme variables, les points (z, μ) sont donnés par un réseau comprenant les courbes C_μ et des droites (z) parallèles aux axes Au et Bv. Les courbes C_2 et C_3 d'un tel nomogramme (les plus importantes pour la pratique) sont tracées sur la figure 91.

Pour le second, ce sont, en prenant toutes les combinaisons de signes utiles, les images fondamentales des polynomes (¹)

$$z + 1,$$
$$z - 1,$$
$$-z + 1,$$

dessinées sur un transparent avec leurs index D′ et D″ qui, rapportés aux axes mobiles de ce transparent, ont pour équations, puisque les exposants de z sont o et 1,

$$y = x$$

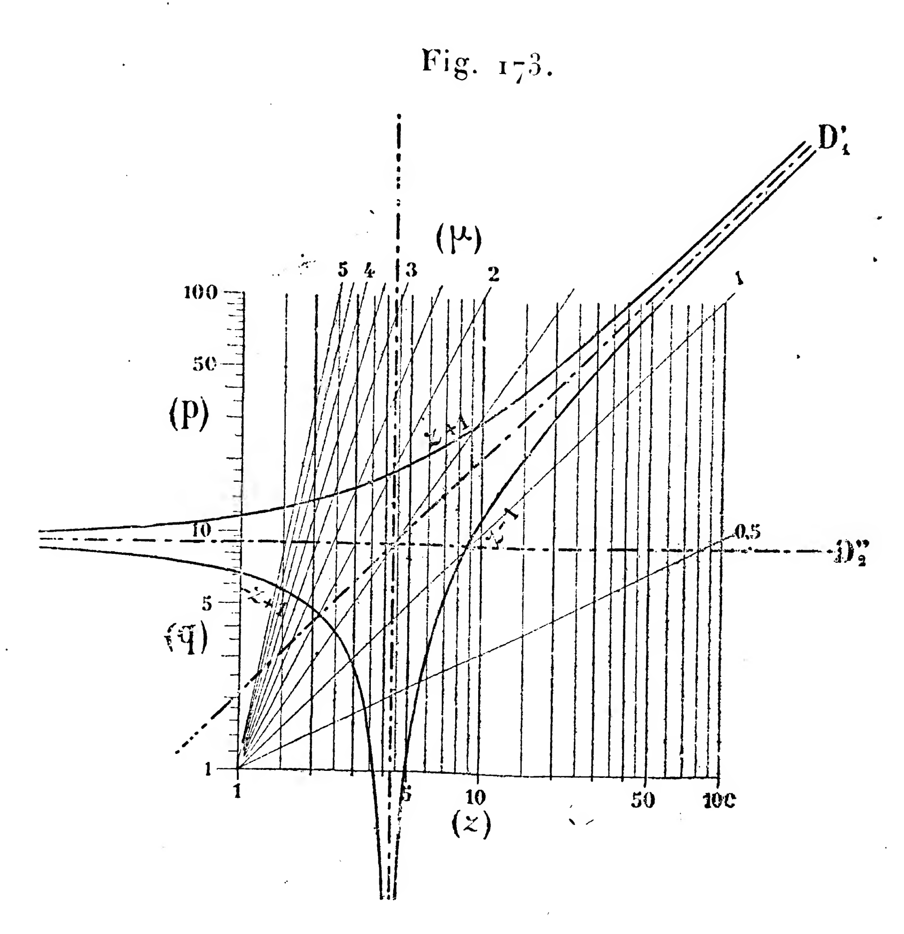
et

$$y = 0.$$

Le nomogramme avec le transparent est représenté par la figure 173 dans le cas de l'équation

$$z^3 = 2,1 z + 9.$$

Fig. 173.



On voit que les index D′ et D″ coupent l'échelle de Oy respectivement aux points cotés 2,1 et 9. Ici il faut prendre, vu les signes, l'intersection de

(¹) La première et la troisième de ces images sont évidemment les courbes A et S de la figure 172. La seconde est la symétrie de A par rapport à l'index D′ qui leur sert d'asymptote commune. Il est inutile d'envisager l'image de $-z-1$, attendu que, si les deux signes du second membre étaient négatifs, l'équation n'aurait pas de racine positive.

l'image de $z+1$ avec la radiante du plan fixe cotée 3, puisque $\mu = 3$. On trouve

$$z = 2,4.$$

2° *Résolution des équations complètes des degrés* 3,4 *et* 5. — Les équations complètes des degrés 3,4 et 5 peuvent s'écrire respectivement

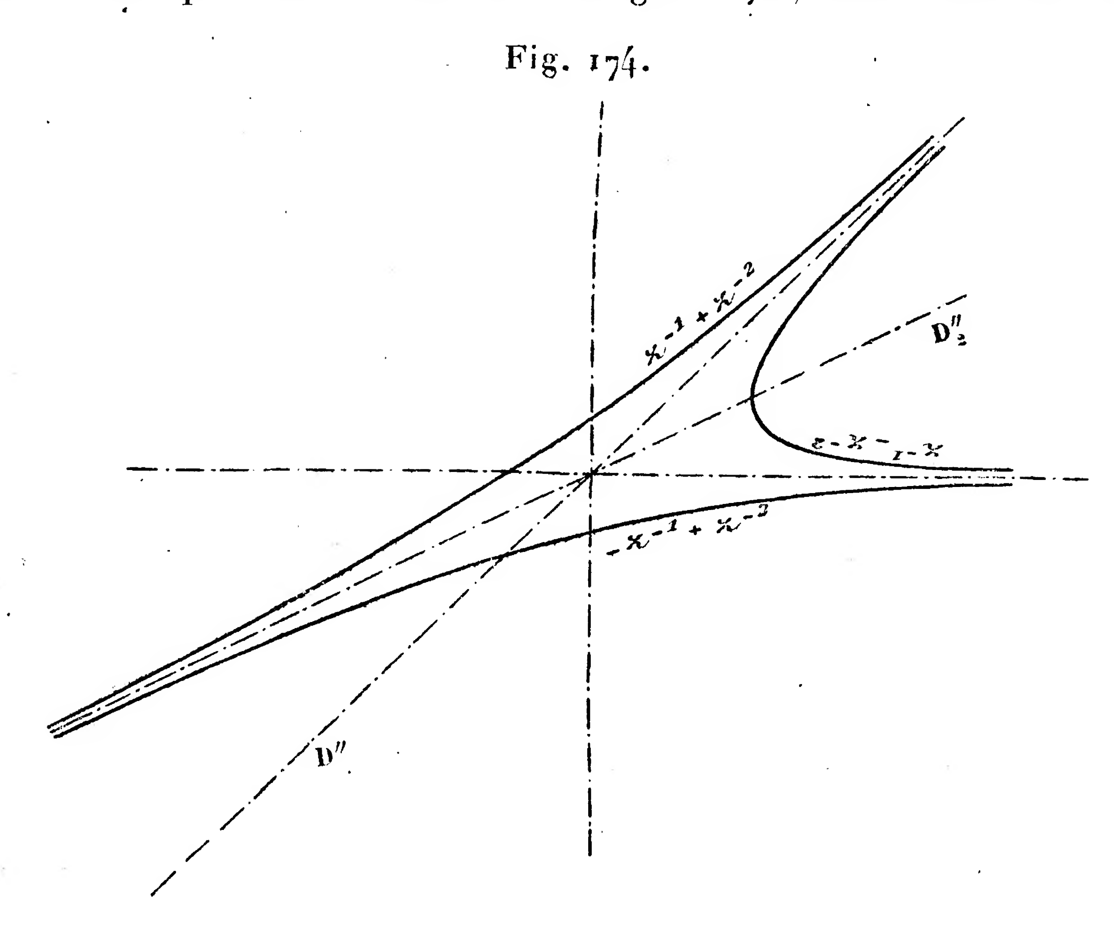
$$\pm z \quad \pm n = \pm p z^{-1} \pm q z^{-2},$$
$$\pm z^2 \pm m z \pm n = \pm p z^{-1} \pm q z^{-2},$$
$$\pm z^2 \pm l z \quad \pm m = \pm n z^{-1} \pm p z^{-2} \pm q z^{-3}.$$

On reconnaît donc, suivant ce qui a été vu au n° ci-dessus, qu'on pourra les représenter en appliquant, sur un plan portant simplement l'échelle logarithmique de Oy et les parallèles à cet axe menées par les points de l'échelle logarithmique de Ox, des transparents portant les images logarithmiques des polynomes

$$\pm z \quad \pm 1,$$
$$\pm z^{-1} \pm z^{-2},$$
$$\pm z^2 \quad \pm z \quad \pm \gamma,$$
$$\pm z^{-1} \pm z^{-2} \pm \gamma z^{-3},$$

avec leurs index respectifs. Les images relatives aux polynomes de la première ligne sont celles qui sont tracées sur la figure 173; celles relatives aux poly-

Fig. 174.

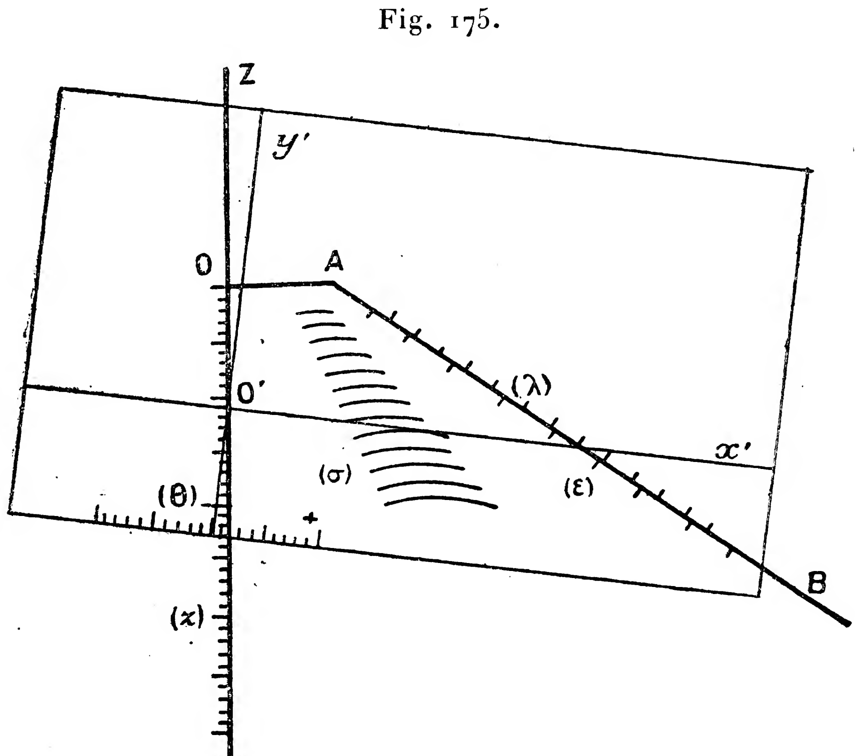


nomes de la seconde sont représentées par la figure 174. Le mode d'emploi ne diffère pas de celui indiqué dans le cas général.

142. *Translation et rotation combinées : Nomogramme tan-*

gentiel pour le calcul des profils de terrassements. — M. Willotte a fait connaître (1) un procédé nomographique de calcul des demi-

Fig. 175.



profils de terrassements, fondé sur la considération des enveloppes des positions de la ligne transverse du terrain correspondant à une aire donnée, limitée au gabarit soit de remblai, soit de déblai. La figure 175 est faite dans l'hypothèse du remblai, avec le gabarit de demi-profil ZOAB.

Il est très facile de déterminer la nature de cette enveloppe. A l'aire de chaque demi-profil considéré on peut, en effet, ajouter une constante, savoir l'aire du triangle que le prolongement de AB ferait avec les droites OA et OZ. L'enveloppe est donc une courbe dont la tangente forme avec les droites OZ et AB, prolongées jusqu'en leur point de rencontre, un triangle d'aire constante; c'est, par suite, comme on sait, une hyperbole ayant OZ et AB pour asymptotes.

Si, pour un certain nombre de valeurs de σ (2) comprises entre

(1) *Ann. des P. et C.*, 2e sem. 1880, p. 303.

(2) On peut choisir soit des valeurs de σ croissant par échelons égaux, soit les valeurs correspondant aux hyperboles qui, entre les limites assignées, ont leurs sommets (situés sur la bissectrice de l'angle de OZ et de AB) séparés par des intervalles égaux, ce qui donne pour ces sommets une graduation isograde (n° 8). Ce

les limites pratiques de cette quantité, on construit la portion utile des hyperboles correspondantes, on obtient le système des enveloppes (σ).

De même, toutes les positions de la ligne du terrain naturel correspondant à une même valeur de ε ou de λ passent nécessairement par un même point de la ligne AB, qui pourra être coté à l'aide de cette valeur de ε ou de λ. On obtient ainsi sur la ligne AB à la fois une échelle (ε) et une échelle (λ).

Pour déterminer la ligne de terrain correspondant à chaque demi-profil, il n'y a qu'à mener par le point de OZ coté z, une droite dont la pente sur l'horizon soit θ. Cette droite peut être constituée par un index marqué sur un transparent susceptible de recevoir à la fois une translation, suivant les variations de z, et une rotation suivant les variations de θ.

Pour cela, l'origine O' d'axes rectangulaires $O'x'$ et $O'y'$ liés à ce transparent, étant maintenue sur OZ et mise en coïncidence avec le point de cote z, on amène sur OZ, par une rotation autour de O', le point θ d'une échelle tracée pour cette pente θ sur une parallèle à $O'x'$. L'axe $O'x'$ coïncide alors avec la ligne du terrain répondant à ces valeurs de z et θ, et il suffit de lire la cote de la courbe (σ) à laquelle il est tangent et les cotes ε et λ des points où il coupe AB, pour avoir les valeurs de ces trois quantités qui constituent les inconnues de la question.

III. — Théorie morphologique générale. Classification de tous les nomogrammes possibles.

143. *Objet de la théorie morphologique des nomogrammes.* — En voyant, au fur et à mesure que l'on avance dans l'étude de la Nomographie, se multiplier les types particuliers de nomogramme, on est conduit à les envisager au seul point de vue de leur structure, sans avoir égard à la nature géométrique spéciale des lignes qui y interviennent non plus qu'à la forme des équations correspondantes, étant bien entendu, d'ailleurs, que lorsqu'on en vient aux applications,

---

second choix, proposé par M. Willotte, donne un dessin plus satisfaisant. Le calcul des cotes se fait d'ailleurs très rapidement, puisque leurs différences secondes sont constantes.

c'est, au contraire, cette double considération qui importe le plus.

C'est donc, en quelque sorte, la morphologie des nomogrammes que nous nous proposons ici de mettre en lumière de façon à en faire sortir une classification générale capable d'embrasser non seulement tous les types de nomogramme qui sont actuellement connus et utilisés, mais même tous ceux qui pourront jamais être proposés.

Les notions sur lesquelles nous allons fonder ici cette théorie sont celles mêmes qui nous ont servi à cet effet dès l'origine ([1]); mais le mode de classification que nous allons indiquer est celui auquel nous avons abouti en second lieu ([2]) et qui n'a égard qu'à la répartition sur le nomogramme des éléments non cotés, ou *constants*, et des éléments *cotés* indépendamment du nombre des variables qui s'y rapportent, ce qui, lorsqu'on y regarde de près, apparaît comme le caractère le plus essentiel de la structure de chaque type de nomogramme.

Convenons tout d'abord de quelques notations que nous emploierons uniformément dans la suite de cette étude. Un élément, point ou ligne, dont la nature restera indéterminée sera représentée par la lettre E qu'on fera, s'il y a lieu, suivre, entre parenthèses, des lettres désignant les cotes y afférentes :

$$E(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n).$$

Parfois, si le nombre seul de ces cotes est intéressant à considérer, c'est ce nombre n que nous mettrons dans la parenthèse :

$$E(n).$$

Il arrivera même, lorsqu'il n'en pourra résulter aucune ambiguïté, que, si c'est la désignation des cotes qui importe le plus, nous écrirons simplement (z_1), (z_2), (z_n), et, si c'est leur nombre, (n) ou même n.

S'il est spécifié qu'un certain élément est une courbe, une droite, ou un point et qu'il soit utile de le mettre en évidence, nous remplacerons la lettre E correspondante par une des lettres C, D ou P; si cet élément appartient à un système de cercles concentriques ou confondus, ou à un système de droites parallèles ou confondues, nous lui attribuerons la lettre Γ ou Δ. La nécessité de considérer à part les éléments de ce genre apparaîtra plus loin (n° 145, Rem. I).

Ajoutons que, dans le cas où le nomogramme se composerait de

([1]) Dans les notes **O.23** et **O.25**.

([2]) **O.39** et **O.40**, n° 12.

plusieurs plans superposés π, π', π'', ..., nous distinguerions les éléments tracés sur chacun d'eux au moyen des mêmes accents E, E', E'', ... Quant aux éléments mixtes, on pourra les désigner comme suit : si un élément E' du plan π' doit être pourvu des cotes z_1, z_2, ..., prises sur π, cela s'indiquera au moyen d'une barre surmontant ces cotes inscrites dans la parenthèse

$$E'(\overline{z_1, z_2, \ldots}).$$

Quant au point mixte provenant de la rencontre de la ligne C de π et de la ligne C' de π', on le désignera par la notation

$$\underline{C.C'}.$$

Enfin certains éléments, comme les pivots du double alignement, pourront être dénotés au moyen de la variable auxiliaire ζ qui s'y rapporte.

144. *La notion de contact.* — Lorsqu'un point se trouve sur une courbe, ou lorsque deux courbes sont tangentes entre elles, nous disons qu'il y a *contact* entre ces éléments.

Pour exprimer qu'il y a contact entre les éléments E et E', nous emploierons la notation

$$E \multimap E'.$$

Il n'est pas nécessaire de réfléchir bien longtemps pour reconnaître que la *seule relation précise de position qui puisse être jugée à vue est le contact de deux éléments*, dans le sens élargi où ce mot vient d'être pris.

En effet, les notions de position qui nous sont données par la vue se ramènent aux seules distances angulaires perçues directement par l'œil, et, parmi ces distances angulaires, les seules dont l'œil puisse évaluer exactement la grandeur, sont celles qui sont nulles.

Donc, *tout mode de représentation graphique d'équation à plusieurs variables ne saurait consister qu'en l'établissement ou la constatation de certains contacts entre divers éléments géométriques*.

Pour rendre cette idée plus claire, revenons aux exemples les plus simples qui se rencontrent au début de cet Ouvrage :

La représentation d'une équation à deux variables au moyen de deux échelles accolées (n° 9) repose sur le contact des points P(z_1)

de l'une des échelles, éléments à une cote, avec les perpendiculaires $\Delta(z_2)$ à la direction de leur support, menées par les points de l'autre, également éléments à une cote. Un tel mode de représentation sera donc dénoté

$$P(z_1) \mapsto \Delta(z_2).$$

La représentation cartésienne au moyen d'une courbe (n° **12**) repose sur le contact de cette courbe C, élément sans cote, avec le point $P(z_1, z_2)$ du quadrillage régulier répondant aux deux variables z_1 et z_2, d'où la notation

$$P(z_1, z_2) \mapsto C.$$

Plus généralement, la notation d'un abaque cartésien à trois variables (n° **116**) sera

$$P(z_1, z_2) \mapsto C(z_3).$$

Si l'on n'a recours qu'aux éléments tracés sur un seul plan, on voit que toute représentation effectuée sur ce plan se ramène à la constatation d'un contact entre deux éléments dépendant respectivement par l'intermédiaire de systèmes ramifiés (n° **52**) de n_1 et de n_2 cotes, ce qui correspond au cas d'une équation à $n_1 + n_2$ variables.

C'est ainsi que la juxtaposition de deux échelles binaires (n° **51**), par le contact des horizontales à deux cotes $\Delta(z_1, z_2)$ de l'une avec les points à deux cotes $P(z_3, z_4)$ de l'autre, permet de représenter des équations à quatre variables, suivant le mode

$$\Delta(z_1, z_2) \mapsto P(z_3, z_4).$$

Si l'on a recours, au contraire, à des systèmes tracés sur des plans variables les uns par rapport aux autres ([1]), leurs positions respectives devront être définies par certains contacts entre éléments appartenant aux uns et aux autres. Il y aura, en outre, un contact à constater sur le tableau formé par les divers systèmes arrêtés dans la position voulue. La répartition des variables se fera alors entre les éléments intervenant dans ces divers contacts.

([1]) Il doit être bien entendu que les divers plans variables intervenant dans la question peuvent ne pas se trouver *matériellement* réalisés dans la construction du nomogramme. Si, par exemple, ce nomogramme comporte un fil tendu sur diverses échelles graduées (points alignés), l'index que constitue ce fil tendu doit être considéré comme faisant corps avec un plan appliqué sur le premier. Bien que l'on n'ait là qu'une droite variable par rapport à un plan, on doit donc, pour la généralité de l'exposition, considérer cette droite comme appartenant à un plan qui glisse sur le premier.

Nous appellerons les premiers des *contacts de position*, le dernier *contact de résolution*.

145. *Nomogrammes à deux plans superposés.* — Si deux plans sont simplement superposés, les déplacements de l'un par rapport à l'autre sont à 3 degrés de liberté, comme on l'a déjà dit (n° 133).

Or, un contact établi entre un élément E appartenant au plan π et un élément E' appartenant au plan π' équivaut à une condition simple. Il faut donc établir trois tels contacts pour y fixer la position du plan π' par rapport au plan π (¹). Cette fixation sera par suite définie, avec la notation du numéro précédent, par les contacts de position

$$E_1 \mapsto E'_1, \qquad E_2 \mapsto E'_2, \qquad E_3 \mapsto E'_3.$$

Les deux plans se trouvant alors dans cette position relative parfaitement déterminée, il ne restera plus qu'à constater un contact entre un élément E_4 de l'un des plans et un élément E'_4 de l'autre, qui sera le contact de résolution

$$E_4 \mapsto E'_4.$$

Le mode d'emploi d'un nomogramme quelconque comportant un plan mobile se résumera donc dans la suite de symboles

$$E_1 \mapsto E'_1, \qquad E_2 \mapsto E'_2, \qquad E_3 \mapsto E'_3, \qquad E_4 \mapsto E'_4.$$

Les quatre contacts ainsi dénotés étant simultanés, on peut évidemment prendre comme contacts de position trois quelconques d'entre eux, le quatrième étant alors le contact de résolution. Mais, en général, sur un même nomogramme, la même variable étant toujours prise

(¹) Exceptionnellement, on pourra, au lieu d'imposer à un élément E'_i l'obligation d'être en contact avec un élément E_i de cote bien déterminée, l'astreindre à être en contact avec deux éléments E_i et E_j entre les cotes desquels existera une certaine relation. Nous n'avons rencontré dans cet Ouvrage qu'un seul exemple de cette circonstance, au n° 138, où la droite pivotant autour du point O (*fig.* 168) a sa position fixée par la condition de rencontrer les échelles E_m et E_n en des points dont la différence des cotes soit égale à 1. *Il est essentiel de remarquer que ce mode de détermination rentre bien cependant dans le mode général ci-dessus défini*, car les positions de l'élément E'_i en contact avec les éléments E_i et E_j, dont les cotes ont entre elles la relation qui vient d'être dite, ont une certaine enveloppe $\mathcal{E}_i$, en sorte que la condition imposée peut se traduire par le contact

$$\mathcal{E}_i \mapsto E'_i,$$

bien que l'élément $\mathcal{E}_i$ ne figure pas sur le tableau.

pour inconnue, le contact de résolution y sera aussi toujours le même, et il devra, de préférence, être inscrit le dernier.

On peut ajouter que, sauf en des cas tout à fait exceptionnels, dont aucun exemple ne s'est présenté à nous au cours du présent exposé, l'un des deux éléments E ou E′ intervenant dans chaque contact est un point ou une droite.

Il n'y a, théoriquement au moins, lorsque les divers éléments en présence sont définis géométriquement, aucune difficulté à former le type d'équation correspondant au nomogramme ainsi construit.

Chaque élément E_i du plan fixe a, par rapport à Ox et Oy, une équation de la forme

$$f_i(x, y, \mathcal{E}_i) = 0,$$

où $\mathcal{E}_i$ représente l'ensemble des cotes correspondantes. De même, chaque élément E'_i a, par rapport à $O'x'$ et $O'y'$, une équation de la forme

$$g_i(x', y', \mathcal{E}'_i) = 0.$$

ou, en passant à Ox et Oy et désignant par λ, μ et ν les paramètres servant à définir l'un des systèmes de coordonnées par rapport à l'autre,

$$g_i(\lambda x + \sqrt{1-\lambda^2}y + \mu, \; -\sqrt{1-\lambda^2}x + \lambda y + \nu, \; \mathcal{E}'_i) = 0,$$

ou encore

$$g_i(x, y, \lambda, \mu, \nu, \mathcal{E}'_i) = 0.$$

Le contact entre les deux éléments s'exprimera dès lors par une équation que nous pourrons écrire

$$h_i(\lambda, \mu, \nu, \mathcal{E}_i, \mathcal{E}'_i) = 0,$$

et l'élimination de λ, μ et ν, entre les quatre équations telles que cette dernière correspondant ainsi aux quatre contacts $i = 1, 2, 3, 4$, fournira, entre les cotes des huit éléments en présence, une relation qui ne sera autre que l'équation représentée.

Remarque I. — Il y a lieu d'examiner à part le cas où les éléments E'_1, E'_2, E'_4 sont des cercles concentriques que nous désignerons alors par la notation Γ'_1, Γ'_2, Γ'_4. Ces cercles peuvent d'ailleurs, si leurs rayons croissent indéfiniment, devenir des droites parallèles Δ'_1, Δ'_2, Δ'_4. Enfin, cercles Γ' ou droites Δ' peuvent se confondre entre eux. Nous considérons tous ces cas particuliers comme compris dans le cas général des trois cercles concentriques Γ'_1, Γ'_2, Γ'_4, ce que nous allons

dire de celui-ci pouvant immédiatement s'étendre à chacun d'eux sous une forme encore plus simple.

Si les cercles Γ'_1 et Γ'_2 sont mis en contact respectivement avec les éléments E_1 et E_2, le seul déplacement possible du plan π' est une rotation autour du centre O'. En effet, F_1 étant l'élément parallèle à l'élément E_1 à une distance égale à la différence des rayons des cercles Γ'_1 et Γ'_2 (cercle de rayon égal à cette distance et de centre E_1 si cet élément se réduit à un point), le cercle Γ'_2 sera en contact avec l'élément F_1. Par suite, ce cercle Γ_2, en contact à la fois avec les éléments E_2 et F_1, ne pourra que tourner autour de son centre O', ce qui démontre la proposition.

Or, dans cette rotation, le cercle Γ'_4, concentrique aux deux premiers, tourne aussi sur lui-même, et s'il se trouve tout d'abord en contact avec l'élément, E_4 il ne cessera pas d'y être pendant toute cette rotation. Le contact $E_3 \mapsto E'_3$ devient alors superflu et pourra être laissé indéterminé.

La notation du nomogramme correspondant sera, par suite, si l'on se sert de guillemets pour indiquer le contact indéterminé,

$$E_1 \mapsto \Gamma', \qquad E_2 \mapsto \Gamma'_2, \qquad \text{»} \mapsto \text{»}, \qquad E_4 \mapsto \Gamma'_4$$

ou, en attribuant, dans ce cas, au contact de résolution, l'indice 3,

$$E_1 \mapsto \Gamma'_1, \qquad E_2 \mapsto \Gamma'_2, \qquad E_3 \mapsto \Gamma'_3, \qquad \text{»} \mapsto \text{»}.$$

Il convient d'ailleurs, pour plus de régularité, de maintenir le symbole du contact devenu ici indéterminé.

Remarque II. — La coïncidence de deux points P et P' ou de deux droites D et D', appartenant à l'un et à l'autre plan, équivaut à deux contacts, car, dans un cas, on peut considérer que deux lignes se coupant en P' sont en contact avec le point P, dans l'autre, que deux points pris sur D' sont en contact avec la droite D. Pour rappeler qu'une telle coïncidence équivaut à un double contact, nous la désignerons par la notation

$$P \leftrightarrows P' \qquad \text{ou} \qquad D \leftrightarrows D'.$$

Si donc, dans le mode d'emploi d'un nomogramme intervient une telle coïncidence, sa notation sera

$$P_1 \leftrightarrows P'_1, \qquad E_2 \mapsto E'_2, \qquad E_3 \mapsto E'_3$$

ou

$$D_1 \sqsupset\!\sqsubset D'_1, \qquad E_2 \mapsto E'_2, \qquad E_3 \mapsto E'_3,$$

146. *Nomogrammes à plusieurs plans superposés.* — Ce qui vient d'être dit s'étend immédiatement au cas de plusieurs plans superposés. Nous pouvons arbitrairement choisir l'un d'eux π comme plan fixe. La position d'un second π' sera alors définie, par rapport au premier, par trois contacts entre éléments correspondants pris sur ces deux plans. Ces plans étant ainsi rendus solidaires l'un de l'autre, nous représenterons leur ensemble par $(\pi\pi')$, et nous définirons ensuite la position du plan π'', par les contacts de trois de ses éléments avec trois éléments appartenant à l'ensemble $(\pi\pi')$, c'est-à-dire pouvant indifféremment faire corps avec le plan π ou avec le plan π', mais généralement, en pratique, encore avec π. De même, trois nouveaux contacts fixeront la position du plan π''' par rapport à l'ensemble $(\pi\pi'\pi'')$, et ainsi de suite jusqu'au plan $\pi^{(m)}$. Ces $3m$ contacts de position étant ainsi établis, on constatera l'existence d'un contact de résolution entre un élément pris sur le plan $\pi^{(m)}$ et un élément appartenant au plan π.

Chacun des $6m+2$ éléments intervenant dans ces $3m+1$ contacts étant muni d'un nombre quelconque de cotes, on engendre ainsi le *nomogramme le plus général* qu'il soit possible de concevoir.

Avant d'aller plus loin dans cette étude, faisons voir pour plus de clarté comment ce mode général de notation des nomogrammes s'applique à quelques-uns de ceux qui ont été précédemment rencontrés.

Prenons en premier lieu les *nomogrammes à double alignement* (n° 88) et appelons I' et I'' les deux positions successives de l'index que nous pouvons supposer marquées sur deux plans π' et π'' superposés au premier. Si l'on désigne d'une manière générale par $P_i(z_i)$ le point coté z_i, par P un pivot pris sur la charnière et si l'on tient compte de la remarque I du n° **145**, on a

$$\begin{array}{llll} P_1(z_1) \mapsto I', & P_2(z_2) \mapsto I', & P \mapsto I', & \text{»} \mapsto \text{»}, \\ P_3(z_3) \mapsto I'', & P_4(z_4) \mapsto I'', & P \mapsto I'', & \text{»} \mapsto \text{»}, \end{array}$$

étant entendu que, dans la première ligne, les contacts de position sont les deux premiers, et, dans la seconde, le troisième avec l'un des deux premiers.

Prenons maintenant l'exemple du n° **136**, qui est à trois plans

mobiles, ceux π' et π'' des échelles tournantes (H′) et (H″) et celui π''' de l'indicateur transparent, les échelles de repérage (μ') et (μ'') étant fixées sur π [1].

Désignons par O_1 et O_2 les points du plan π avec lesquels coïncident respectivement les points O′ et O″ autour desquels tournent les plans π' et π'', par (o''') le trait coté o de l'indicateur transparent, par D le bord de la règle guide, le long duquel glisse le bord D‴ du transparent.

Les trois contacts fixant la position des plans π', π'' et π''' étant écrits les uns au-dessus des autres et le contact de résolution mis à part, on obtient la notation

$$\left.\begin{array}{ll} O_1 \mathrel{\sqsupset\!\sqsubset} O', & (\mu') \mapsto i' \\ O_2 \mathrel{\sqsupset\!\sqsubset} O'', & (\mu'') \mapsto i'' \\ D \mathrel{\sqsupset\!\sqsubset} D''', & (H') \mapsto (o''') \end{array}\right\} (H'') \mapsto (\varepsilon).$$

Prenons enfin le nomogramme du n° **138**, sous sa seconde forme, c'est-à-dire en supposant le réseau (α', β') mobile. Il doit être considéré comme constitué par la superposition de trois plans, le premier π comprenant la partie fixe du nomogramme, c'est-à-dire les points à deux cotes (α, β) et les échelles (a) et (b), le second π' les points (α', β'), le troisième π'' l'index UV servant à faire la lecture.

La fixation de la position de π' par rapport à π résulte d'une rotation de π' autour de son origine O′, qui coïncide avec O, de façon à amener le point ($\alpha'\beta'$) sur l'axe OY, d'où la notation

$$O \mathrel{\sqsupset\!\sqsubset} O', \qquad OY \mapsto (\alpha'\beta').$$

Les points U et V proviennent de la rencontre des bissectrices OU et OV des angles des axes OX et OY avec les parallèles à la direction O′Y′ menées par les points (a) et (b). Si nous désignons par Δ' ces parallèles à O′Y′ nous voyons, en nous reportant aux notations définies à la fin du n° **143**, que les points U et V seront dénotés

$$\underline{OU.\Delta'(\overline{a})} \qquad \text{et} \qquad \underline{OV.\Delta'(\overline{b})}.$$

Par suite, la notation relative au troisième plan, comportant le con-

---

(1) Pour l'exposé général des principes, nous avons affecté chaque élément du même accent que le plan auquel il appartient. Ici, nous conservons les notations du corps de l'Ouvrage; aucune confusion ne peut en résulter.

tact de résolution, sera, si l'on appelle Δ'' l'index dirigé suivant UV,

$$\underline{\mathrm{OU}.\Delta'(\bar{a})} \mapsto \Delta'', \qquad \underline{\mathrm{OV}.\Delta'(\bar{b})} \mapsto \Delta'', \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \Delta'', \qquad \text{»} \mapsto \text{»}.$$

147. *Classification générale des nomogrammes.* — Si, dans le nomogramme plus général défini au numéro précédent, on affecte chacun des éléments en contact d'un certain nombre de cotes, qui d'ailleurs peut être nul, de façon que la somme de tous ces nombres soit égale à n, on a formé un nomogramme d'équation à n variables.

La détermination de tous les types de nomogramme applicables à des équations à n variables, et constitués au moyen d'un certain nombre m de plans superposés, consiste donc : 1° a former toutes les partitions du nombre n ; 2° à distribuer les nombres fournis par ces partitions entre les $6m+2$ éléments intervenant dans les $3m+1$ contacts du nomogramme, en ne comptant que pour une les diverses solutions qui peuvent se ramener les unes aux autres par de simples permutations entre ces contacts.

Cette façon d'envisager les choses peut conduire à un mode de classification des nomogrammes, qui est celui auquel nous nous étions d'abord arrêté (¹) et qui pose, pour la détermination de toutes les variétés correspondant à un nombre donné de variables, un problème de partition résolu d'ingénieuse façon par le major P.-A. MacMahon (²).

Mais, ainsi que nous l'avons déjà dit au n° 143, l'étude approfondie des divers types de nomogramme permet de reconnaître que ce qui, au point de vue morphologique, les distingue essentiellement les uns des autres, c'est la répartition, parmi les éléments intervenant dans les contacts simultanés sur lesquels est fondé leur mode d'emploi, de ceux qui sont pourvus de cotes et de ceux qui ne le sont pas, et c'est, en dernière analyse, ce caractère qui nous a semblé le plus propre à servir de fondement à une classification vraiment rationnelle.

Afin de nous rendre compte des diverses façons dont cette répartition peut se faire, nous désignerons chaque élément coté par l'ensemble Z_i des cotes qui s'y rapportent, en convenant de prendre $Z_i = 0$ pour les éléments non pourvus de cote ou *constants*.

(¹) **O.25.** C'est ce mode de classification qui figurait dans la première édition du présent Ouvrage.

(²) *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXVI, 1918, p. 56.

Le numérotage des contacts étant arbitraire, nous remarquerons d'abord que deux répartitions se ramenant l'une à l'autre par changement de l'ordre des contacts n'en font en réalité qu'une seule. De même, on n'en aura encore qu'une en permutant à la fois dans tous les contacts les deux éléments qui y figurent, ce qui revient simplement à appeler π le plan qu'on avait d'abord appelé π' et réciproquement.

Remarquons aussi tout de suite que si trois des contacts ont lieu entre éléments constants, les plans π et π' immobilisés l'un par rapport à l'autre, n'en forment plus qu'un, ce qui dispense d'envisager la combinaison

$$Z_1 \vdash Z_2, \qquad o \vdash o, \qquad o \vdash o, \qquad o \vdash o,$$

qui désigne tout nomogramme à plan unique.

Cela posé, chaque type canonique étant désigné par le nombre (en chiffre gras) des éléments cotés distincts qui y interviennent, affecté d'un indice d'ordre, voici le tableau complet de ces types pour le cas de deux plans superposés [1] :

$(\mathbf{2}_1)$	$Z_1 \vdash o$,	$Z_2 \vdash o$,	$o \vdash o$,	$o \vdash o$	($\underline{\mathbf{I}}$, $\underline{\mathbf{P}}$)
$(\mathbf{2}_2)$	$Z_1 \vdash o$,	$o \vdash Z'_2$,	$o \vdash o$,	$o \vdash o$	($\underline{\mathbf{I}}$, $\underline{\mathbf{P}}$)
$(\mathbf{3}_1)$	$Z_1 \vdash o$,	$Z_2 \vdash o$,	$Z_3 \vdash o$,	$o \vdash o$	($\underline{\mathbf{I}}$, $\underline{\mathbf{P}}$)
$(\mathbf{3}_2)$	$Z_1 \vdash Z'_1$,	$Z_2 \vdash o$,	$o \vdash o$,	$o \vdash o$	($\underline{\mathbf{I}}$, $\underline{\mathbf{C}}$, $\underline{\mathbf{M}}$)
$(\mathbf{3}_3)$	$Z_1 \vdash o$,	$Z_2 \vdash o$,	$o \vdash Z'_3$,	$o \vdash o$	($\underline{\mathbf{I}}$, $\underline{\mathbf{P}}$)
$(\mathbf{4}_1)$	$Z_1 \vdash o$,	$Z_2 \vdash o$,	$Z_3 \vdash o$,	$Z_4 \vdash o$	(**P**)
$(\mathbf{4}_2)$	$Z_1 \vdash Z'_1$,	$Z_2 \vdash o$,	$Z_3 \vdash o$,	$o \vdash o$	($\underline{\mathbf{I}}$, $\underline{\mathbf{M}}$)
$(\mathbf{4}_3)$	$Z_1 \vdash o$,	$Z_2 \vdash o$,	$Z_3 \vdash o$,	$o \vdash Z'_4$	(**P**)
$(\mathbf{4}_4)$	$Z_1 \vdash Z'_1$,	$Z_2 \vdash Z'_2$,	$o \vdash o$,	$o \vdash o$	(**I**, **C**)
$(\mathbf{4}_5)$	$Z_1 \vdash Z'_1$,	$Z_2 \vdash o$,	$o \vdash Z'_3$,	$o \vdash o$	(**I**, **M**)
$(\mathbf{4}_6)$	$Z_1 \vdash o$,	$Z_2 \vdash o$,	$o \vdash Z'_3$,	$o \vdash Z'_4$	(**P**)
$(\mathbf{5}_1)$	$Z_1 \vdash Z'_1$,	$Z_2 \vdash o$,	$Z_3 \vdash o$,	$Z_4 \vdash o$	(**M**)
$(\mathbf{5}_2)$	$Z_1 \vdash Z'_1$,	$Z_2 \vdash Z'_2$,	$Z_3 \vdash o$,	$o \vdash o$	(**I**)
$(\mathbf{5}_3)$	$Z_1 \vdash Z'_1$,	$Z_2 \vdash o$,	$Z_2 \vdash o$,	$o \vdash Z'_4$	(**M**)
$(\mathbf{6}_1)$	$Z_1 \vdash Z'_1$,	$Z_2 \vdash Z'_2$,	$Z_3 \vdash o$,	$Z_4 \vdash o$	
$(\mathbf{6}_2)$	$Z_1 \vdash Z'_1$,	$Z_2 \vdash Z_2$,	$Z_3 \vdash Z'_3$,	$o \vdash o$	(**I**)
$(\mathbf{7})$	$Z_1 \vdash Z'_1$,	$Z_2 \vdash Z'_2$,	$Z_2 \vdash Z'_3$,	$Z_4 \vdash o$	
$(\mathbf{8})$	$Z_1 \vdash Z'_1$,	$Z_2 \vdash Z'_2$,	$Z_3 \vdash Z'_3$,	$Z_3 \vdash Z'_4$	

---

(1) Les lettres inscrites à la fin de plusieurs des lignes de ce tableau se réfèrent aux explications données dans les remarques qui suivent.

Remarque I. — Pour que l'on puisse rendre l'un des quatre contacts indéterminé [en prenant, sur l'un des plans, comme éléments intervenant dans les trois autres contacts, des Δ ou des Γ (n° 145, Rem. I)], il faut nécessairement que ce contact ne soit affecté d'aucune cote. Cette possibilité n'existera donc que pour les types comportant au moins un contact o — o ; ce sont ceux auxquels se réfère l'indication **I** ajoutée dans la parenthèse au bout de la ligne.

Remarque II. — Parmi les types canoniques de nomogramme à deux plans superposés qui viennent d'être formés, recherchons ceux sur lesquels les seuls éléments cotés soient des points à une cote. Pour cela, supposant que chacune des lettres Z_i ne désigne plus qu'une cote z_i au lieu d'un ensemble de cotes, nous remarquerons que cette cote peut se rapporter à un point dans trois cas :

1° Lorsque dans un contact Z_i — o l'élément constant est une ligne ;

2° Lorsque dans un contact $Z_i — Z'_i$ les deux éléments sont des points à une cote sur des supports constamment en coïncidence (ce qui ne se peut que si ces supports sont des droites ou des cercles de même rayon) ;

3° Lorsque l'élément Z'_i est une ligne mixte (n° 133), prise dans un système du plan π' et empruntant momentanément la cote du point où elle rencontre une échelle tracée sur π.

De là trois variétés de nomogramme à points cotés que nous désignerons comme suit (¹) :

1° *Variété* **P**. — Cette variété se produit quand chacun des quatre contacts a lieu entre point coté et ligne constante.

2° *Variété* **C**. — Cette variété se produit lorsque deux échelles, l'une sur π, l'autre sur π', ont constamment même support rectiligne ou circulaire, cette communauté de support étant d'ailleurs équivalente à un double contact (Rem. II du n° 145) entre éléments constants, ce qui exige que la notation du type correspondant comporte deux contacts o — o.

(¹) La lettre servant à désigner chaque variété a été inscrite au bout de la ligne du tableau général correspondant à chaque type susceptible de cette variété. Lorsque cette variété est compatible avec un contact indéterminé, la lettre correspondante est soulignée en même temps que la letre **I** à laquelle elle doit être associée.

3° *Variété* **M**. — Cette variété se produit lorsque, dans un contact entre éléments cotés, l'un est un point coté, l'autre une ligne à cote momentanée (empruntée au même plan que le premier point), les autres contacts ne comportant comme éléments cotés que des points.

Remarque III. — Chaque type de nomogramme étant désigné par un numéro d'ordre (en chiffre gras) égal au nombre des éléments cotés y intervenant, une équation à n variables sera susceptible d'application de chacun des types dont le numéro d'ordre sera au plus égal à n.

Nous allons maintenant faire l'application de ces généralités aux nomogrammes à deux plans pour équations à trois et quatre variables, qui comprennent la plupart de ceux dont on a à faire un usage courant dans la pratique, en plus, bien entendu, de ceux à un seul plan sur lesquels il n'y a pas lieu d'insister ici.

148. *Nomogrammes à deux plans superposés pour équations à trois variables.* — D'après la remarque III ci-dessus, ces nomogrammes rentrent dans les types suivants :

($\mathbf{2}_1$)........	2 ⟼ 0	1 ⟼ 0	0 ⟼ 0	0 ⟼ 0
($\mathbf{2}_2$)........	2 ⟼ 0	0 ⟼ 1	0 ⟼ 0	0 ⟼ 0
($\mathbf{3}_1$)........	1 ⟼ 0	1 ⟼ 0	1 ⟼ 0	0 ⟼ 0
($\mathbf{3}_2$)........	1 ⟼ 1	1 ⟼ 0	0 ⟼ 0	0 ⟼ 0
($\mathbf{3}_3$)........	1 ⟼ 0	1 ⟼ 0	0 ⟼ 1	0 ⟼ 0

Observons tout d'abord que, conformément au tableau du n° 147, chacun de ces types est susceptible de la variante pour laquelle un des contacts devient indéterminé, les trois éléments de l'un des deux plans qui interviennent dans les autres contacts appartenant à un même système de cercles concentriques Γ' ou de droites parallèles Δ', et que, le quatrième excepté, ils peuvent ne comporter comme éléments cotés que des points.

Cette double variante appliquée au type ($\mathbf{3}_1$) conduit, au reste, au type le plus général du nomogramme à points alignés pour trois variables (n° 57).

Nous signalerons quelques autres types précédemment étudiés se rattachant à cette catégorie de nomogrammes.

Par exemple, pour un abaque hexagonal (n° 31), si I'_1, I'_2, I'_3 désignent les trois index du transparent mis en contact respectivement avec les points cotés (z_1), (z_2), (z_3), et P'_∞ le point à l'infini dans la

direction perpendiculaire à Ox, la notation est

$$(z_1) \mapsto I'_1, \quad (z_2) \mapsto I'_2, \quad (z_3) \mapsto I'_3, \quad P_\infty \mapsto I'_1,$$

qui définit un type ($\mathbf{3}_1$).

Un nomogramme polaire (n° 48), où l'origine O′ de l'échelle (z_1) de support D′ reste en coïncidence avec O quand ce support pivote autour de O, se dénote

$$O \rightleftarrows O', \quad P_2(z_2) \mapsto D', \quad C_3(z_3) \mapsto P'_1(z_1),$$

du type ($\mathbf{3}_2$).

L'index en équerre à sommet guidé (n° 129), si S_1 est le support de l'échelle (z_1), a pour notation

$$S_1 \mapsto O', \quad (z_1) \mapsto O', \quad (z_2) \mapsto O'x', \quad (z_3) \mapsto O'y',$$

type ($\mathbf{3}_1$), et la règle à tiroir (n° 134), lorsqu'on appelle D la droite parallèle à O_1x_1 le long de laquelle glisse l'échelle (z_2),

$$D \rightleftarrows O_2x_2, \quad (z_1) \mapsto O_2, \quad (z_3) \mapsto (z_2),$$

type ($\mathbf{3}_2$).

Enfin, le dispositif relatif à la détermination de ε (et, par suite, de λ) dans le profilomètre Siégler (n° 129) nous fournit un exemple de type ($\mathbf{3}_3$), sa notation étant, en effet,

$$Oy \mapsto O', \quad (z) \mapsto O', \quad (\theta) \mapsto O'y', \quad Oy \mapsto (\varepsilon).$$

149. *Nomogrammes à deux plans superposés pour équations à quatre variables.* — La remarque III du n° 147 montre que tous ces nomogrammes rentrent dans les types suivants :

($\mathbf{2}_1$)........	$3 \mapsto 0$	$1 \mapsto 0$	$0 \mapsto 0$	$0 \mapsto 0$
($\mathbf{2}'_1$)........	$2 \mapsto 0$	$2 \mapsto 0$	$0 \mapsto 0$	$0 \mapsto 0$
($\mathbf{2}_2$)........	$3 \mapsto 0$	$0 \mapsto 1$	$0 \mapsto 0$	$0 \mapsto 0$
($\mathbf{2}'_2$)........	$2 \mapsto 0$	$0 \mapsto 2$	$0 \mapsto 0$	$0 \mapsto 0$
($\mathbf{3}_1$)........	$2 \mapsto 0$	$1 \mapsto 0$	$1 \mapsto 0$	$0 \mapsto 0$
($\mathbf{3}_2$)........	$2 \mapsto 1$	$1 \mapsto 0$	$0 \mapsto 0$	$0 \mapsto 0$
($\mathbf{3}'_2$)........	$2 \mapsto 1$	$0 \mapsto 1$	$0 \mapsto 0$	$0 \mapsto 0$
($\mathbf{3}''_2$)........	$2 \mapsto 0$	$1 \mapsto 1$	$0 \mapsto 0$	$0 \mapsto 0$
($\mathbf{3}_3$)........	$2 \mapsto 0$	$1 \mapsto 0$	$0 \mapsto 1$	$0 \mapsto 0$
($\mathbf{3}'_3$)........	$2 \mapsto 0$	$0 \mapsto 1$	$0 \mapsto 1$	$0 \mapsto 0$
($\mathbf{4}_1$)........	$1 \mapsto 0$	$1 \mapsto 0$	$1 \mapsto 0$	$1 \mapsto 0$
($\mathbf{4}_2$)........	$1 \mapsto 1$	$1 \mapsto 0$	$1 \mapsto 0$	$0 \mapsto 0$
($\mathbf{4}_3$)........	$1 \mapsto 0$	$1 \mapsto 0$	$1 \mapsto 0$	$0 \mapsto 1$
($\mathbf{4}_4$)........	$1 \mapsto 1$	$1 \mapsto 1$	$0 \mapsto 0$	$0 \mapsto 0$
($\mathbf{4}_5$)........	$1 \mapsto 1$	$1 \mapsto 0$	$0 \mapsto 1$	$0 \mapsto 0$
($\mathbf{4}_6$)........	$1 \mapsto 0$	$1 \mapsto 0$	$0 \mapsto 1$	$0 \mapsto 1$

Ici la remarque I du n° **147** montre qu'il peut y avoir un contact indéterminé pour chacun de ces types, sauf ($\mathbf{4}_1$), $\mathbf{4}_3$), ($\mathbf{4}_6$).

Il serait facile de former des exemples de ces seize types, mais cela serait sans utilité. Nous nous bornerons à faire voir auxquels de ces types se rattachent quelques-uns des nomogrammes à quatre variables et à deux plans, rencontrés dans le corps de l'Ouvrage.

Si, par exemple, laissant le dernier contact indéterminé, on prend pour éléments E'_1, E'_2, E'_3, une même droite Δ', les éléments E_1, E_2, E_3 étant des points cotés dont le dernier à deux cotes, on a un *nomogramme à points alignés* avec réseau de points à deux cotes (n° **101**) qui se dénotera

$$(z_1) \mapsto \Delta, \qquad (z_2) \mapsto \Delta', \qquad (z_3, z_4) \mapsto \Delta', \qquad \text{»} \mapsto \text{»},$$

type ($\mathbf{3}_1$).

Si, dans cette notation, on remplace les points (z_1) et (z_2) par des courbes C_1 et C_2, cotées au moyen des mêmes variables, on a la notation des *droites à doubles enveloppes* (n° **107**) (¹).

L'index en équerre ordinaire (n° **128**), qui se dénotera

$$(z_1) \mapsto I'_1, \qquad (z_2) \mapsto I'_1, \qquad (z_3) \mapsto I'_3, \qquad (z_4) \mapsto I'_4,$$

est, comme on voit, du type ($\mathbf{4}_1$), ainsi que les index parallèles (n° **125**).

Si l'on cherche à former des types de nomogramme pour quatre variables ne comportant que des points à une cote, il faut, suivant la remarque II du n° **147**, n'avoir recours qu'à des contacts comportant chacun un élément I et un élément O, par suite, aux seuls types ($\mathbf{4}_1$), ($\mathbf{4}_3$) et ($\mathbf{4}_6$).

Les schémas correspondants sont ceux qu'indiquent les figures 176, 177, 178.

Si les courbes C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 de la figure 176, dessinées sur le

---

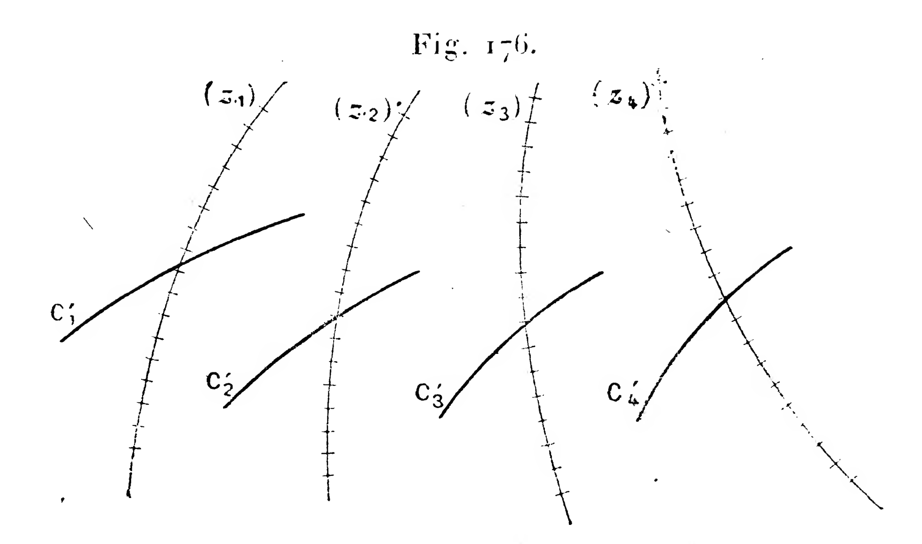
(¹) Quant aux nomogrammes *à trajectoires de contacts* (n° 108), si l'on représente par $C_3(z_3)$ l'enveloppe $\mathfrak{C}_3$ et par (z_3, z_4) le point de rencontre de cette enveloppe et de la trajectoire $\mathfrak{T}_4$, ils se dénotent, Δ' étant toujours l'index pour la lecture,

$$(z_1, z_2) \mapsto \Delta', \quad C_3(z_3) \mapsto \Delta', \quad (z_3, z_4) \mapsto \Delta', \quad \text{»} \mapsto \text{»}.$$

Donc, au point de vue de leur structure, ils doivent être considérés comme des nomogrammes à cinq variables z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 sur lesquels deux des variables z_3 et z_5 sont identiques.

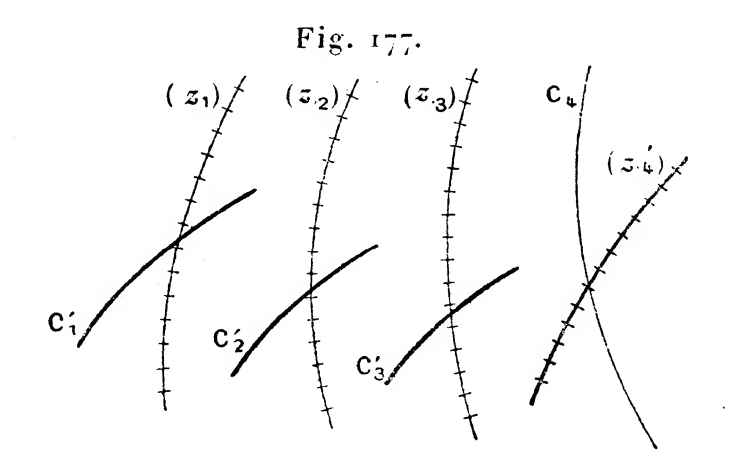
transparent, se reduisent à une seule, on tombe sur le nomogramme à index quelconque de M. Goedseels (nº **124**).

Fig. 176.



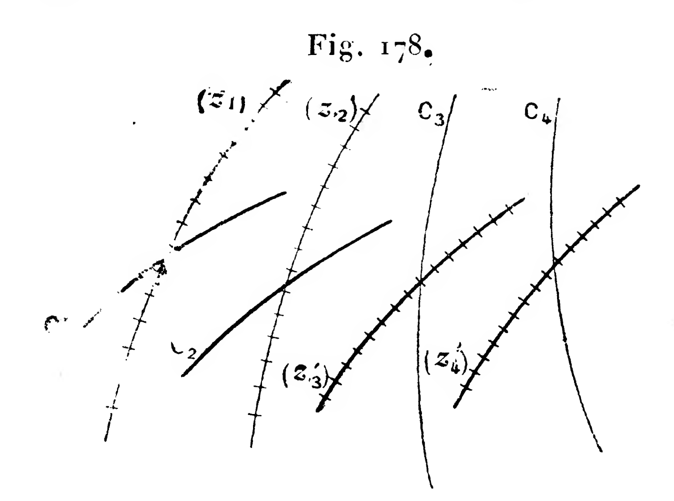
De même, si, dans la cas de la figure 177, les courbes C'_1, C'_2 et C'_3 se confondent avec le support du système (z'_4) et la courbe C_4 avec

Fig. 177.



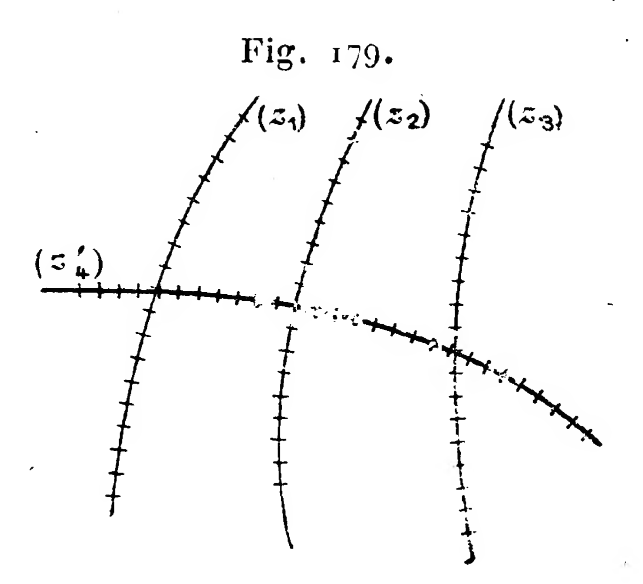
le support du système (z_4), on a un nomogramme du type représenté par la figure 179, qui a également été proposé par M. Goedseels (*loc. cit.*).

Fig. 178.



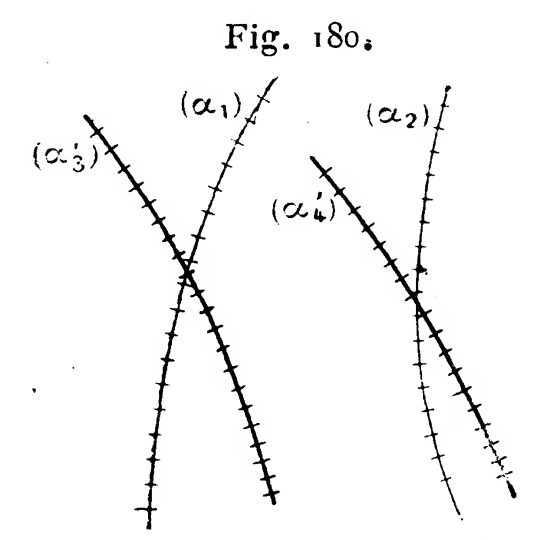
Enfin, si les courbes C_3 et C_4 de la figure 178 se confondent respectivement avec les supports des systèmes (z_1) et (z_2), les courbes C'_1 et C'_2 avec les supports des systèmes (z'_3) et (z'_4), on a un nomo-

Fig. 179.



gramme du type représenté par la figure 180, encore envisagé par M. Goedseels.

Fig. 180.



Il est clair que l'on pourrait, dans le cas de plusieurs plans superposés, développer, en se fondant sur les mêmes principes, une étude analogue à celle qui vient d'être exposée pour le cas de deux seulement; mais il n'y aurait à cela qu'un intérêt purement théorique qui peut ici être négligé.

ANNEXES.

I. — Sur les équations à multiplicateurs correspondants.

Ayant été conduit par voie d'intuition aux types (1) et (3) donnés au n° 20 pour les équations à multiplicateurs correspondants, nous avions posé la question de reconnaître s'ils étaient bien les plus généraux jouissant de la propriété voulue. C'est à M. G. Kœnigs que nous sommes redevable de la réponse affirmative à cette double question. Voici son analyse :

Problème I. — *Trouver des fonctions* φ, ψ, U *telles que*

$$\varphi(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2) \equiv \psi(\lambda_1, \lambda_2, U),$$

U *ne dépendant que de* z_1 *et de* z_2.

Si nous posons

(1) $$\Omega = \varphi(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2),$$

Ω vérifie le système d'équations

(2) $$A(\Omega) = z_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} - \lambda_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_1} = 0,$$

(3) $$B(\Omega) = z_2 \frac{\partial \Omega}{\partial z_2} - \lambda_2 \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_2} = 0,$$

(4) $$C(\Omega) = \frac{\partial U}{\partial z_2} \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} - \frac{\partial U}{\partial z_1} \frac{\partial \Omega}{\partial z_2} = 0.$$

On a identiquement

$$A\big(B(\Omega)\big) - B\big(A(\Omega)\big) = 0$$

et

$$\begin{aligned} & A\big(C(\Omega)\big) - C\big(A(\Omega)\big) \\ &= A\left(\frac{\partial U}{\partial z_2} \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} - \frac{\partial U}{\partial z_1} \frac{\partial \Omega}{\partial z_2}\right) - C\left(z_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial \Omega}{\partial z_2}\right) \\ &= \left[A\left(\frac{\partial U}{\partial z_2}\right) - C(z_1)\right] \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} - A\left(\frac{\partial U}{\partial z_1}\right) \frac{\partial \Omega}{\partial z_2} + C(\lambda_1) \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_1} = 0, \end{aligned}$$

les dérivées secondes disparaissant d'elles-mêmes, comme on sait. Or on a

$$A\left(\frac{\partial U}{\partial z_2}\right) = z_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z_1 \, \partial z_2}, \qquad C(z_1) = \frac{\partial U}{\partial z_2},$$

$$A\left(\frac{\partial U}{\partial z_1}\right) = z_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z_1^2}, \qquad C(\lambda_1) = 0.$$

Donc Ω vérifie l'équation

$$\left(z_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z_1 \partial z_2} - \frac{\partial U}{\partial z_2}\right) \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z_1^2} \frac{\partial \Omega}{\partial z_2} = 0. \tag{5}$$

De même, en partant de

$$B\big(C(\Omega)\big) - C\big(B(\Omega)\big) = 0,$$

on trouve

$$\left(z_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z_1 \partial z_2} - \frac{\partial U}{\partial z_1}\right) \frac{\partial \Omega}{\partial z_2} - z_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z_2^2} \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0. \tag{6}$$

Si l'on tient compte de (4), les équations (5) et (6) deviennent

$$\left(z_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z_1 \partial z_2} - \frac{\partial U}{\partial z_2}\right) \frac{\partial U}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z_1^2} \frac{\partial U}{\partial z_2} = 0,$$
$$\left(z_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z_1 \partial z_2} - \frac{\partial U}{\partial z_1}\right) \frac{\partial U}{\partial z_2} - z_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z_2^2} \frac{\partial U}{\partial z_1} = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial z_1 \partial z_2}}{\dfrac{\partial U}{\partial z_2}} - \frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial z_1^2}}{\dfrac{\partial U}{\partial z_1}} = \frac{1}{z_1},$$
$$\frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial z_1 \partial z_2}}{\dfrac{\partial U}{\partial z_1}} - \frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial z_2^2}}{\dfrac{\partial U}{\partial z_2}} = \frac{1}{z_2},$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \log\left(\frac{\dfrac{\partial U}{\partial z_2}}{\dfrac{\partial U}{\partial z_2}}\right) = \frac{d \log z_1}{dz_1},$$
$$\frac{\partial}{\partial z_2} \log\left(\frac{\dfrac{\partial U}{\partial z_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial z_2}}\right) = \frac{d \log z_2}{dz_2},$$

ou encore

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial z_2}}{\dfrac{\partial U}{\partial z_1}} = X_2 z_1, \qquad \frac{\dfrac{\partial U}{\partial z_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial z_2}} = X_1 z_2,$$

X_1 et X_2 étant respectivement des fonctions de z_1 seul et de z_2 seul, ce qui exige que l'on ait

$$X_1 z_1 X_2 z_2 = 1$$

et, par suite,

$$X_2 z_1 = m, \qquad X_2 z_2 = \frac{1}{m},$$

m étant une constante.

On a donc

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial z_2}}{\frac{\partial U}{\partial z_1}} = \frac{z_1}{m z_2}$$

ou

$$z_1 \frac{\partial U}{\partial z_2} - m z_2 \frac{\partial U}{\partial z_1} = 0,$$

ce qui donne

$$U = f(z_2 z_1^m)$$

ou, plus symétriquement,

$$U = f(z_1^{n_1} z_2^{n_2}),$$

n_1 et n_2 étant des constantes.

L'identité initiale prendra donc la forme

$$\varphi(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2) \equiv \psi\big(\lambda_1, \lambda_2, f(z_1^{n_1} z_2^{n_2})\big).$$

Si l'on fait $\lambda_1 z_1 = z'_1$, $\lambda_2 z_2 = z'_2$, il vient

$$\varphi(z'_1, z'_2) \equiv \psi\left(\lambda_1, \lambda_2, f\left(\frac{z'^{n_1}_1 z'^{n_2}_2}{\lambda'^{n_1}_1 \lambda'^{n_2}_2}\right)\right)$$

ou, en attribuant à λ_1 et λ_2 des valeurs numériques quelconques,

$$\varphi(z'_1, z'_2) = \Delta(z'^{n_1}_1 z'^{n_2}_2),$$

$\Delta(x)$ étant une fonction quelconque de x. Par suite,

$$\varphi(z_1, z_2) = \Delta(z_1^{n_1} z_2^{n_2}).$$

On retombe bien ainsi sur la forme (1) du n° 20.

Problème II. — *Trouver les fonctions* φ, ψ, U *telles que*

$$\varphi(\lambda z_1, \lambda^m z_2) \equiv \psi(\lambda, U),$$

U *ne dépendant que de* z_1 *et* z_2.

Posons encore

$$(1) \qquad \varphi(\lambda z_1, \lambda^m z_2) = \Omega.$$

Ici Ω vérifie les équations

$$(2) \qquad A(\Omega) = z_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} + m z_2 \frac{\partial \Omega}{\partial z_2} - \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = 0,$$

$$(3) \qquad B(\Omega) = \frac{\partial U}{\partial z_2}\frac{\partial \Omega}{\partial z_1} - \frac{\partial U}{\partial z_1}\frac{\partial \Omega}{\partial z_2} = 0.$$

On a identiquement

$$A\big(B(\Omega)\big) - B\big(A(\Omega)\big) = 0,$$

ou

$$\left(z_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z_1 \partial z_2} + m z_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z_2^2} - \frac{\partial U}{\partial z_2}\right) \frac{\partial \Omega}{\partial z_1}$$
$$- \left(z_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z_1^2} + m z_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z_1 \partial z_2} - m \frac{\partial U}{\partial z_1}\right) \frac{\partial \Omega}{\partial z_2} = 0,$$

ou encore, en tenant compte de (3),

$$\left(z_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z_1 \partial z_2} + m z_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z_2^2} - \frac{\partial U}{\partial z_2}\right) \frac{\partial U}{\partial z_1}$$
$$- \left(z_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z_1^2} + m z_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z_1 \partial z_2} - m \frac{\partial U}{\partial z_1}\right) \frac{\partial U}{\partial z_2} = 0,$$

qu'on peut écrire

$$z_1 \left(\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial z_1 \partial z_2}}{\frac{\partial U}{\partial z_2}} - \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial z_1^2}}{\frac{\partial U}{\partial z_1}} \right) + m z_2 \left(\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial z_2^2}}{\frac{\partial U}{\partial z_2}} - \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial z_1 \partial z_2}}{\frac{\partial U}{\partial z_1}} \right) - (1 - m) = 0.$$

Si l'on pose

$$V = \frac{\frac{\partial U}{\partial z_2}}{\frac{\partial U}{\partial z_1}},$$

cette équation devient

$$z_1 \frac{\partial V}{\partial z_1} + m z_2 \frac{\partial V}{\partial z_2} = (1 - m) V.$$

On a donc

$$V = z_1^{1-m} \chi\left(\frac{z_1^m}{z_2}\right).$$

En se reportant à l'expression ci-dessus de V, on conclut de là que l'expression différentielle

$$dz_1 + z_1^{1-m} \chi\left(\frac{z_1^m}{z_2}\right) dz_2$$

ou encore

$$z_1^{m-1}\, dz_1 + \chi\left(\frac{z_1^m}{z_2}\right) dz_2$$

doit admettre un facteur intégrant.

Si nous posons

$$z_2 = u z_1^m,$$

il vient pour cette expression différentielle

$$z_1^{m-1}\, dz_1 + \chi\left(\frac{1}{u}\right) (z_1^m\, du + m z_1^{m-1} u\, dz_1)$$

ou

$$\frac{dz_1}{z_1} + \frac{\chi\left(\frac{1}{u}\right)du}{1 + mu\chi\left(\frac{1}{u}\right)},$$

dont l'intégrale a la forme

$$\log z_1 + \log f(u) = \log z_1 f(u),$$

f étant une fonction arbitraire comme χ.

Donc U est de la forme

$$U = F\left[z_1 f\left(z_1 z_2^{\frac{1}{m}}\right)\right],$$

et l'on en conclut, comme à la fin de la solution précédente, que

$$\varphi(z_1, z_2) = \Delta\left[z_1 f\left(z_1 z_2^{\frac{1}{m}}\right)\right],$$

Δ étant une fonction quelconque de x.

On retombe bien ainsi sur la forme (3) du n° 20.

II. — Sur l'application de l'anamorphose graphique à la représentation approchée par points alignés.

Appréciant l'intérêt qu'il y a, chaque fois que faire se peut, à recourir aux points alignés de préférence à tout autre mode de représentation, le lieutenant-colonel Lafay (alors capitaine) a fait connaître [1] un ingénieux procédé de transformation approchée, par anamorphose graphique, d'un abaque cartésien (au besoin, construit empiriquement) en un abaque anamorphosé à lignes droites de façon à transformer à son tour celui-ci, selon le mode indiqué au n° 60, en un nomogramme à points alignés.

Convenons tout d'abord de la notation suivante : représentant par $z_{i,0}$, $z_{i,1}$, ..., $z_{i,n}$, ... des valeurs particulières attribuées à la variable z_i, nous désignerons de même par $f_{i,0}$, $f_{i,1}$, ..., $f_{i,n}$, ... les valeurs prises par la fonction f_i pour ces diverses valeurs attribuées à z_i.

Cela posé, supposons que l'équation

$$F_{123} = 0$$

[1] *Génie civil*, t. XL, 1902, p. 298.

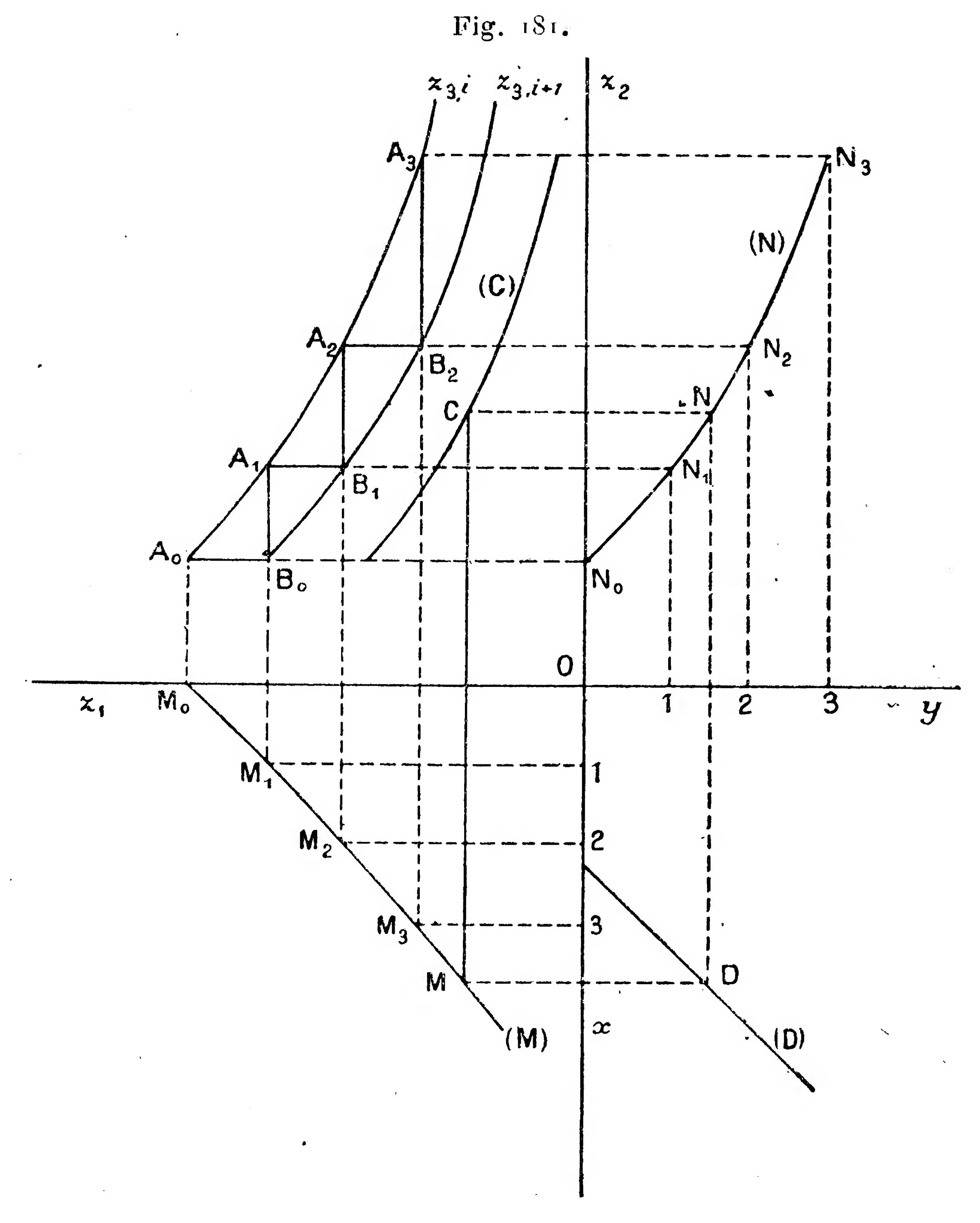
représentée puisse être mise, avec une approximation suffisante, sous la forme

$$f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0, \quad (1)$$

dans laquelle les fonctions composantes sont actuellement indéterminées.

L'équation a été représentée par un abaque cartésien sur lequel, abstraction faite des modules supposés quelconques, les coordonnées ont été prises égales à z_1 et z_2 (*fig.* 181).

Fig. 181.



Sur deux courbes $z_{3,i}$ et $z_{3,i+1}$, prises dans la partie moyenne du système (z_3), choisissons, à partir d'une des extrémités $A_0 B_0$ de la

partie utile de ce système, des points A_0, A_1, A_2, ... d'une part, B_0, B_1, B_2, ... de l'autre, formant les sommets d'une ligne à gradins dont les côtés successifs soient alternativement parallèles aux axes des z_1 et des z_2. Dans ces conditions, les coordonnées des sommets de cette ligne peuvent s'écrire

$$\begin{array}{ll} A_0(z_{1,0},\ z_{2,0}), & B_0(z_{1,1},\ z_{2,0}), \\ A_1(z_{1,1},\ z_{2,1}), & B_1(z_{1,2},\ z_{2,1}), \\ \dots\dots, & \dots\dots, \\ A_n(z_{1,n},\ z_{2,n}), & B_n(z_{1,n+1},\ z_{2,n}), \\ \dots\dots, & \dots\dots \end{array}$$

Exprimant que les points A_{n-2}, A_{n-1}, A_n sont sur la ligne $z_{3,i}$, on a donc les équations

$$(n-2)_i \qquad f_{1,n-2}\, g_{3,i} + f_{2,n-2}\, h_{3,i} + f_{3,i} = 0,$$
$$(n-1)_i \qquad f_{1,n-1}\, g_{3,i} + f_{2,n-1}\, h_{3,i} + f_{3,i} = 0,$$
$$(n)_i \qquad f_{1,n}\, g_{3,i} + f_{2,n}\, h_{3,i} + f_{3,i} = 0.$$

et de même pour les points B_{n-2}, B_{n-1}, B_n sur la ligne $z_{3,i+1}$,

$$(n-2)_{i+1} \qquad f_{1,n-1}\, g_{3,i+1} + f_{2,n-2}\, h_{3,i+1} + f_{3,i+1} = 0,$$
$$(n-1)_{i+1} \qquad f_{1,n}\, g_{3,i+1} + f_{2,n-1}\, h_{3,i+1} + f_{3,i+1} = 0,$$
$$(n)_{i+1} \qquad f_{1,n+1}\, g_{3,i+1} + f_{2,n}\, h_{3,i+1} + f_{3,i+2} = 0.$$

Si l'on divise la différence des équations $(n-1)_{i+1}$ et $(n-2)_{i+1}$ par la différence des équations $(n-1)_i$ et $(n-2)_i$, on a

$$\frac{f_{1,n} - f_{1,n-1}}{f_{1,n-1} - f_{1,n-2}} = \frac{g_{3,i}\, h_{3,i+1}}{g_{3,i+1}\, h_{3,i}},$$

et, de même, si l'on divise la différence de $(n)_i$ et $(n-1)_i$ par la différence de $(n-1)_{i+1}$ et $(n-2)_{i+1}$, on a encore

$$\frac{f_{2,n} - f_{2,n-1}}{f_{2,n-1} - f_{2,n-2}} = \frac{g_{3,i}\, h_{3,i+1}}{g_{3,i+1}\, h_{3,i}}.$$

Par suite, en posant

$$(2) \qquad \frac{g_{3,i}\, h_{3,i+1}}{g_{3,i+1}\, h_{2,i}} = \rho_i,$$

on voit que

$$\frac{f_{1,n} - f_{1,n-1}}{f_{1,n-1} - f_{2,n-1}} = \frac{f_{2,n} - f_{2,n-1}}{f_{2,n-1} - f_{2,n-2}} = \rho_i;$$

d'où, par un facile calcul de proche en proche,

$$\frac{f_{1,n}-f_{1,n-1}}{f_{1,1}-f_{1,0}}=\frac{f_{2,n}-f_{2,n-1}}{f_{2,1}-f_{2,0}}=\rho_i^{n-1},$$

puis

$$\frac{f_{1,n}-f_{1,0}}{f_{1,1}-f_{1,0}}=\frac{f_{2,n}-f_{2,0}}{f_{2,1}-f_{2,0}}=\frac{1-\rho_i^n}{1-\rho_i}.$$

Si donc, prolongeant les axes des z_1 et des z_2 par des axes des y et des x, avec renversement du sens positif, nous prenons les intersections, d'une part, des côtés A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2, ... des gradins avec les droites $y=0, 1, 2, 3, \ldots$, d'autre part, des autres côtés des gradins avec les droites $x=0, 1, 2, 3, \ldots$, nous obtenons, d'un côté, les points N_1, N_2, N_3, ..., de l'autre, les points M_1, M_2, M_3, ... distribués respectivement sur des courbes (N) et (M), obtenues par jonction de ces points au moyen d'un trait continu, dont, en vertu des formules (2), les équations sont, pour (M), en coordonnées z_1 et x,

$$f_1-f_{1,0}=\frac{1-\rho_i^x}{1-\rho_i}(f_{1,1}-f_{1,0}) \tag{3}$$

et, pour (N), en coordonnées z_2 et y,

$$f_2-f_{2,0}=\frac{1-\rho_i^y}{1-\rho_i}(f_{2,1}-f_{2,0}). \tag{4}$$

Prenant maintenant dans le système (z_3) une courbe quelconque (C) sur laquelle le point courant sera désigné par C, faisons-lui subir la transformation suivante : les parallèles à Ox et Oy menées par C rencontrant les courbes (M) et (N) en M et en N, complétons le rectangle MCND.

La ligne (D) ainsi transformée de (C) recevra la même cote z_3 que celle-ci; de plus, les perpendiculaires à Ox et à Oy recevront les cotes z_1 et z_2 des perpendiculaires à Oz_1 et Oz_2, qu'elles rencontrent respectivement sur les courbes (M) et (N). Dans ces conditions, l'abaque obtenu dans le quadrant xOy pourra être considéré comme anamorphosé graphiquement de l'abaque cartésien d'abord construit dans le quadrant z_1Oz_2.

Ici, deux cas sont à considérer :

1° Si les courbes $z_{3,i}$ et $z_{3,i+1}$, d'où l'on est parti, sont assez rapprochées pour que, de l'une à l'autre, l'accroissement de la

fonction $\frac{g_3}{h_3}$ puisse être regardé comme négligeable, la formule (2) montre que ρ_i peut être confondu avec l'unité. Dans ces conditions, les équations (3) et (4), que l'on peut écrire, a, a', b, b' étant des constantes,

(3 *bis*) $$f_1 = a\frac{1-\rho_i^x}{1-\rho_i} + a',$$

(4 *bis*) $$f_2 = b\frac{1-\rho_i^y}{1-\rho_i} + b',$$

deviennent, par application de la règle de L'Hôpital,

$$f_1 = ax + a', \qquad f_2 = by + b'.$$

Il suffit de transporter ces expressions dans (1) pour avoir l'équation de (D)

$$(ax + a')g_3 + (by + b')h_3 + f_3 = 0,$$

qui montre que cette ligne se confond avec une droite. Le résultat cherché se trouve ainsi obtenu.

S'il en est ainsi, le tracé même des lignes (D), effectué comme il vient d'être dit, suffit à faire apparaître ce résultat.

2° Si, par contre, ce tracé conduit à des lignes (D) dont la courbure soit trop accentuée, ce qui signifie que ρ_i s'écarte trop de l'unité, on peut, par une seconde approximation, chercher à se rapprocher davantage du résultat voulu en substituant à ces lignes (D) d'autres lignes (D') plus proches de la ligne droite.

Si l'on connaissait la valeur de ρ_i, les équations (3 *bis*) et (4 *bis*) montrent qu'il suffirait d'effectuer la transformation de coordonnées définie par

$$x' = \rho_i^x, \qquad y' = \rho_i^y,$$

pour avoir des expressions de f_1 et f_2 linéaires en x' et y', et, par suite, en transportant ces expressions dans (1), pour obtenir, après cette seconde anamorphose, comme lignes (z_3), des droites (D').

Mais, pour appliquer cette nouvelle transformation, il faudrait connaître la valeur de ρ_i. On y arrivera, en remarquant que

$$\frac{dx'}{dy'} = \rho_i^{y-x}\frac{dy}{dx}.$$

Si la transformation doit réussir, le coefficient linéaire le long de

chaque ligne (D′) aura une valeur constante k. On aura donc

$$\rho_i^{y-x}\frac{dy}{dx}=k$$

et, par suite,

$$(y-x)\log\rho_i+\frac{dy}{dx}=0.$$

Si donc, dans le cas où le problème est possible, on construit, pour chaque ligne (D), le lieu des points Δ dont les coordonnées sont

$$X=x-y,\qquad Y=\frac{dy}{dx},$$

ce lieu (Δ) devra être une droite passant par l'origine, la même pour toutes les lignes (D), et son coefficient angulaire fera connaître $\log\rho_i$, donc ρ_i.

Si les lieux (Δ) ainsi obtenus pour les diverses lignes (D), sans se confondre absolument, se rapprochent suffisamment d'un tracé rectiligne moyen, on adoptera pour ρ_i la valeur correspondant à ce tracé moyen.

III. — Sur la disjonction des variables dans les équations représentables par simple ou double alignement [1].

A. — Simple alignement.

1. *Principe de la méthode.* — Si une équation à trois variables

---

[1] La matière de cette Note est extraite d'une série de travaux de M. Farid Boulad dont voici la liste (étant fait état des abréviations définies page XIX) :

1. Sur la disjonction des variables des équations nomographiquement rationnelles d'ordre supérieur (*C. R.*, 1er sem. 1910, p. 379).

2. Application de la notion des valeurs critiques à la disjonction des variables dans les équations d'ordre nomographique supérieur (*S. M.*, 1911, p. 105).

3. Sur les équations à quatre variables d'ordre nomographique supérieur (*S. M.*, 1912, p. 383).

4. Extension de la notion des valeurs critiques aux équations à quatre variables d'ordre nomographique supérieur (*Intern. Congress of Math. Cambridge*, 1912).

5. Sur la disjonction des variables des équations représentables par des nomogrammes à points alignés (*C. R.*, 1er sem. 1913, p. 865).

6. Sur la représentation de l'équation d'ordre nomographique 4 à quatre variables par double alignement (*S. M.*, 1913, p. 366).

Les renvois à cette liste, dans la suite de cette Note, seront indiqués au moyen des numéros d'ordre ci-dessus placés après la lettre **B**.

mise d'abord sous la forme

$$F_3 F_{12} + G_3 G_{12} + H_3 H_{12} = 0 \qquad (1)$$

est susceptible de prendre celle du déterminant

$$\begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

on voit que, si l'on y substitue F_1, G_1, H_1 à F_3, G_3, H_3, elle se transforme en une identité. De là, le principe de la méthode de M. Boulad pour opérer la disjonction des variables dans (1) : remplacer dans l'équation mise sous cette forme les fonctions données F_3, G_3, H_3 par les symboles F_1, G_1, H_1, et chercher à déterminer les fonctions représentées par ces symboles de façon à transformer l'équation en une identité; et de même, *mutatis mutandis*, pour la détermination de F_2, G_2, H_2 [1].

M. Boulad a d'ailleurs fait remarquer [2] que si, dans (1), l'une des fonctions de z_3, H_3 par exemple, s'évanouit, on peut néanmoins, pour la détermination telle qu'elle vient d'être indiquée, des F_1, G_1, H_1 et F_2, G_2, H_2, y introduire une fonction H_{12} dont on dispose arbitrairement en vue de certaines simplifications. On en trouvera un exemple plus loin (Remarque du n° 2).

2. *Équations à trois variables d'ordre nomographique 4 et 3 les plus générales* [3]. — Cette équation étant de la forme [4]

$$\begin{aligned} (1) \qquad & F_3(a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3) \\ & + G_3(b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3) \\ & + H_3(c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3) = 0, \end{aligned}$$

où les a_i, b_i, c_i sont des constantes, si l'on applique la méthode ci-dessus, on obtient, pour la détermination des F_1, G_1, H_1

---

[1] **B.2**, p. 112.
[2] **B.3**, p. 388, et **6**.
[3] **B.2**, p. 115.
[4] On voit que le type d'équation envisagé au n° 42 (p. 97) rentre dans celui-ci à titre de cas particulier.

et F_2, G_2, H_2, les deux systèmes d'équations

$$(2)\quad \begin{cases} (a_0 f_1 + a_2)F_1 + (b_0 f_1 + b_2)G_1 + (c_0 f_1 + c_2)H_1 = 0, \\ (a_1 f_1 + a_3)F_1 + (b_1 f_1 + b_3)G_1 + (c_1 f_1 + c_3)H_1 = 0, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} (a_0 f_2 + a_1)F_2 + (b_0 f_2 + b_1)G_2 + (c_0 f_2 + c_1)H_2 = 0, \\ (a_2 f_2 + a_3)F_2 + (b_2 f_2 + b_3)G_2 + (c_2 f_2 + c_3)H_2 = 0. \end{cases}$$

Les échelles (z_1) et (z_2) ainsi obtenues sont portées sur une même conique dont l'équation en coordonnées cartésiennes (si F_i, G_i, H_i sont prises comme coordonnées homogènes du point z_i) peut s'écrire

$$(4)\quad \frac{a_0 x + b_0 y + c_0}{a_1 x + b_1 y + c_1} = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}.$$

En effet, si l'on ordonne le système (2) par rapport à f_1, après y avoir substitué x, y, 1 respectivement à F_1, G_1, H_1, et si, ensuite, on élimine f_1, on obtient précisément l'équation ci-dessus; et si l'on opère par une marche analogue sur le système (3), on retrouve la même équation.

Cette conique se réduit d'ailleurs à un système de deux droites lorsque le discriminant de (4) s'annule.

A titre d'exemple ([1]), reprenons l'équation envisagée aux n^{os} **45** et **86**, c'est-à-dire

$$(5)\quad (1 + l)h^2 - l(1 + p)h - \frac{1}{3}(1 - l)(1 + 2p) = 0.$$

Si nous y posons

$$h^2 \equiv F_3, \qquad -h \equiv G_3, \qquad -\frac{1}{3} \equiv H_3,$$

et que nous représentions par F_1, G_1, H_1 des fonctions de p, nous aurons à rendre identique l'équation

$$(1 + l)F_1 + l(1 + p)G_1 + (1 - l)(1 + 2p)H_1 = 0,$$

ce qui exige

$$(6)\quad \begin{cases} F_1 + (1 + p)G_1 - (1 + 2p)H_1 = 0, \\ F_1 + (1 + 2p)H_1 = 0, \end{cases}$$

([1]) **B.2**, p. 115.

d'où la solution générale

$$F_1 = \lambda, \qquad G_1 = \frac{-2\lambda}{1+p}, \qquad H_1 = \frac{-\lambda}{1+2p},$$

λ étant un nombre arbitraire.

Pour avoir l'équation du support de l'échelle (z_1), substituons x, y, 1 respectivement à F_1, G_1, H_1 dans le système (6), et éliminons p de ce système; nous aurons ainsi l'équation cherchée

$$(7) \qquad \frac{y-2}{2} = \frac{x+y-1}{x+1}.$$

En opérant de même pour déterminer les fonctions F_2, G_2, H_2, on obtient le système d'équations

$$(8) \qquad \begin{cases} lG_2 + 2(1-l)H_2 = 0, \\ (1+l)F_2 + lG_2 + (1-l)H_2 = 0, \end{cases}$$

ayant pour solution générale

$$F_2 = \lambda, \qquad G_2 = \frac{-2\lambda(1+l)}{l}, \qquad H_2 = \frac{\lambda(1+l)}{1-l}.$$

En appliquant la même marche que ci-dessus à la recherche du support de l'échelle (z_2), on retrouve pour ce dernier la même équation (7).

Remarque. — Si, dans l'équation (1) du présent numéro, la fonction H_3 se réduit à zéro, on tombe sur le type d'équation d'ordre nomographique 3 le plus général $\left(\text{en posant, par exemple, } \frac{F_3}{G_3} = f_3\right)$. On pourra, en ce cas, conformément à ce qui a été dit à la fin du n° 1, appliquer le procédé en regardant, dans (2), (3) et (4), les coefficients c_0, c_1, c_2, c_3 comme des paramètres arbitraires dont on sera libre de disposer, par annulation du discriminant de (4), de façon à avoir des échelles rectilignes.

3. *Équations à trois variables d'ordre nomographique 6 et 5 les plus générales.* — Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$f_3(f_1 A_2 + g_1 L_2 + P_2) + g_3(f_1 A'_2 + g_1 L'_2 + P'_2) + h_3(f_1 A''_2 + g_1 L''_2 + P''_2) = 0,$$

dans laquelle on a, d'une manière générale,

$$\begin{aligned} A_2 &= a_2 f_2 + b_2 g_2 + c_2, \\ L_2 &= l_2 f_2 + m_2 g_2 + n_2, \\ P_2 &= p_2 f_2 + q_2 g_2 + r_2, \\ A'_2 &= a'_2 f_2 + b'_2 g_2 + c'_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En appliquant la méthode ci-dessus et en posant

$$\begin{aligned} A &= a_2 x + a'_2 y + a''_2, \\ B &= b_2 x + b'_2 y + b''_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R &= r_2 x + r'_2 y + r''_2, \end{aligned}$$

M. Boulad a établi [1] le théorème suivant :

Si le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ L & M & N \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

est identiquement nul, l'équation d'ordre 6 la plus générale est représentable par un nomogramme à points alignés.

Ce déterminant se développant en un polynome du troisième degré en x et y, on obtient ainsi 10 conditions entre les 27 coefficients de la proposée.

Les équations en coordonnées cartésiennes des supports des deux échelles (z_1) et (z_2) s'obtiennent par élimination de z_1 et z_2 entre les rapports

$$\frac{f_1}{\Delta_a} = \frac{g_1}{\Delta_l} = \frac{1}{\Delta_p} \quad \text{et} \quad \frac{f_2}{\Delta_a} = \frac{g_2}{\Delta_b} = \frac{1}{\Delta_c},$$

dans lesquels les Δ sont les déterminants mineurs figurant dans les deux développements suivants :

$$\Delta = A\,\Delta_a + L\,\Delta_l + P\,\Delta_p = A\,\Delta_a + B\,\Delta_b + C\,\Delta_c.$$

Si, dans l'équation ci-dessus, h_3 se réduit à zéro, l'ordre nomographique de l'équation tombe à 5 et l'on n'a plus que 4 conditions à satisfaire entre les 18 coefficients.

---

[1] **B.1** et **B.2**, p. 117.

4. *Équations à trois variables d'ordre nomographique quelconque.* — Pour le cas où l'équation $F_{123} = 0$ est d'ordre nomographique quelconque par rapport à chacune des variables, M. Boulad étend sa méthode à la réduction de cette équation à la forme [1]

$$(1) \qquad | F_i \quad G_i \quad H_i | = 0,$$

lorsqu'elle est possible, en introduisant un certain nombre de paramètres arbitraires, ce qui a l'avantage de permettre le choix entre diverses variantes. Pour cela, écrivant l'équation donnée sous la forme

$$(2) \qquad F_{123} = 1 \times F_{123} + 0 \times \Phi_{123} + 0 \times \Psi_{123} + 0 \times \chi_{123} = 0,$$

où Φ_{123}, Ψ_{123}, χ_{123} sont trois fonctions *arbitraires*, M. Boulad fait remarquer que, si ces trois fonctions sont telles que les trois identités suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} 1 \times F_{123} + F_1 \Phi_{123} + G_1 \Psi_{123} + H_1 \chi_{123} \equiv 0 & \text{(quels que soient } z_2 \text{ et } z_3\text{)}, \\ 1 \times F_{123} + F_2 \Phi_{123} + G_2 \Psi_{123} + H_2 \chi_{123} \equiv 0 & \text{(quels que soient } z_3 \text{ et } z_1\text{)}, \\ 1 \times F_{123} + F_3 \Phi_{123} + G_3 \Psi_{123} + H_3 \chi_{123} \equiv 0 & \text{(quels que soient } z_1 \text{ et } z_2\text{)}. \end{cases}$$

admettent une solution par rapport à F_i, G_i, H_i, le problème est résolu d'une manière générale, car ces trois identités, avec l'équation (2) donnent, par élimination, un déterminant du quatrième ordre qui se réduit immédiatement au déterminant voulu (1).

L'équation donnée étant ordonnée nomographiquement par rapport à certaines fonctions respectivement de z_1, de z_2 et de z_3, on se donnera pour chacune des fonctions Φ_{123}, Ψ_{123}, χ_{123} des expressions rationnelles par rapport à ces mêmes fonctions des variables séparées, et ce sont les coefficients constants de ces expressions rationnelles qui constitueront les paramètres arbitraires dont il vient d'être question.

L'application de cette méthode à l'équation d'ordre nomographique 3 la plus générale a permis à M. Boulad de retrouver la représentation d'une telle équation au moyen de trois échelles portées sur une même cubique (*voir* la page 232 du présent Ouvrage).

---

[1] **B.5.**

Citons encore ce théorème obtenu par M. Boulad (1) :

Toute équation $F_{123} = 0$ *susceptible d'une représentation en points alignés, symétrique par rapport à un système quelconque de fonctions* f_1, f_2, f_3, *possède la propriété de pouvoir être mise sous la forme dite caractéristique en* x

$$F_{123} = F(x)\Phi_{123} + G(x)\Psi_{123} + H(x)\chi_{123} = 0,$$

qui est satisfaite par $x = f_1$, f_2 *et* f_3. *Les fonctions* Φ_{123}, Ψ_{123}, χ_{123} *sont symétriques par rapport aux lettres* f_1, f_2, f_3 *comme l'est l'équation considérée.*

Les éléments F_i, G_i, H_i *du déterminant correspondant ont pour expressions*

$$F_i = F(f_i), \qquad G_i = G(f_i), \qquad H_i = H(f_i).$$

Si la symétrie est considérée par rapport à deux fonctions f_1 *et* f_2, *les éléments* F_i, G_i, H_i *pour* $i = 1$ *et* 2 *sont donnés comme ci-dessus; quant aux éléments* F_3, G_3, H_3, *ils sont définis par l'identité*

$$F_3\Phi_{123} + G_3\Psi_{123} + H_3\chi_{123} \equiv 0.$$

Soit, par exemple, l'équation du troisième ordre nomographique mise sous la forme canonique

$$F_{123} = f_1 f_2 f_3 + \beta\Sigma f_i f_j + \gamma\Sigma f_i + \delta = 0.$$

Pour amener celle-ci à la forme requise par l'énoncé précédent, admettant pour racines $x = f_1$, f_2, f_3, il est aisé de voir qu'il suffit de lui ajouter l'équation du troisième degré

$$(x - f_1)(x - f_2)(x - f_3) = -f_1 f_2 f_3 + x\Sigma f_i f_j - x^2\Sigma f_i + x^3 = 0$$

admettant les mêmes racines f_1, f_2, f_3. On a ainsi immédiatement la forme cherchée

$$F_{123} = (x + \beta)\Sigma f_i f_j - (x^2 - \gamma)\Sigma f_i + (x^3 + \delta) = 0,$$

d'où

$$F_i = f_i + \beta, \qquad G_i = f_i^2 - \gamma, \qquad H_i = f_i^3 + \delta.$$

---

(1) **B.2**, p. 120.

B. — Double alignement.

5. *Équations à quatre variables d'ordre nomographique* 2 *par rapport à l'une d'elles.* — Soit une telle équation mise sous la forme

$$F_{1234} = F_1 F_{234} + G_1 G_{234} + H_1 H_{234} = 0, \tag{1}$$

d'ordre nomographique quelconque par rapport à z_2, z_3, z_4.

Si cette équation est représentable par double alignement, on sait (n° 91) qu'elle peut être obtenue par élimination de la variable auxiliaire ζ entre les équations

$$\begin{vmatrix} F & G & H \\ F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

et

$$\begin{vmatrix} F & G & H \\ F_3 & G_3 & H_3 \\ F_4 & G_4 & H_4 \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

où F, G, H désignent des fonctions de ζ, et où nous admettrons que les F_1, G_1, H_1 sont les mêmes fonctions de z_1 que dans (1).

L'équation (3) donne ζ en fonction de z_3 et z_4; il en résulte que F, G, H peuvent, si l'on tient compte de cette équation, s'exprimer en fonction de z_3 et z_4, par des équations telles que

$$F = F_{34}, \qquad G = G_{34}, \qquad H = H_{34}. \tag{4}$$

Si les F_i, G_i, H_i sont regardés comme les coordonnées homogènes des points (z_i), nous voyons, en outre, que l'élimination de z_3 et z_4 entre les équations (4) devra donner entre les F, G, H une relation homogène réelle telle que

$$\Phi(F, G, H) = 0 \tag{5}$$

qui ne sera autre que l'équation du lieu du point (ζ), c'est-à-dire la charnière (p. 258).

Pour effectuer la recherche des diverses fonctions F_i, G_i, H_i composantes, voici comment procède M. Boulad [1] :

---

[1] **B.3.**

Les deux systèmes de fonctions (F_2, G_2, H_2) et (F, G, H) s'obtiennent par la résolution des deux identités suivantes (¹) :

(6) $F_2 F_{234} + G_2 G_{234} + H_2 H_{234} \equiv 0$ (quels que soient z_3 et z_4),

(7) $F\, F_{234} + G\, G_{234} + H\, H_{234} \equiv 0$ (quel que soit z_2),

qui, jointes à l'équation (1), donnent, par élimination de z_3 et z_4, le premier déterminant cherché

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} F & G & H \\ F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Connaissant, dès lors, les éléments de ce déterminant, on peut définir les échelles (z_1) et (z_2) par les formules

$$x_i = \frac{F_i}{H_i}, \qquad y_i = \frac{G_i}{H_i}, \qquad H_i \neq 0 \qquad (i = 1 \text{ et } 2).$$

Quant à la *charnière*, elle est définie, comme il a été dit ci-dessus, par l'équation $\Phi(x, y, 1) = 0$ obtenue par substitution à F, G, H respectivement de x, y, 1 dans la relation (5) qui résulte de l'élimination des deux variables z_3 et z_4 entre les expressions (4) de F, G, H fournies par l'identité (7).

Il reste à déterminer les deux systèmes de fonctions (F_3, G_3, H_3) et (F_4, G_4, H_4). Pour cela remarquons que, si

$$(9) \qquad F\varphi_{34} + G\psi_{34} + H\chi_{34} = 0$$

est le développement du déterminant (3) par rapport à F, G, H (²), ces deux systèmes de fonctions inconnues sont définies par les deux identités

(10) $F_3\varphi_{34} + G_3\psi_{34} + H_3\chi_{34} \equiv 0$ (quel que soit z_4),

(11) $F_4\varphi_{34} + G_4\psi_{34} + H_4\chi_{34} \equiv 0$ (quel que soit z_3),

---

(¹) Il convient de remarquer qu'en résolvant les deux identités (6) et (7), on effectue, en même temps, la disjonction des variables de l'équation (1) en vue de sa représentation par un nomogramme à simple alignement, constitué par deux échelles curvilignes (z_1) et (z_2) et un réseau de points à deux cotes (z_3, z_4) (n° 101).

(²) Si l'une des fonctions F, G, H se réduit à zéro, on se reportera a ce qui a été dit dans le dernier alinéa du n° 1, qui a déjà été appliqué dans la remarque du n° 2.

qui, avec l'équation (9), donnent, par élimination, le second déterminant cherché.

Pour avoir les expressions du système des trois fonctions φ_{34}, ψ_{34}, χ_{34} figurant dans les relations ci-dessus, il suffit d'identifier, quels que soient z_1 et z_2, l'équation $F_{1234} = 0$ avec celle que l'on obtient en tirant les valeurs de F, G, H des deux équations (5) et (9), et en les portant dans le développement suivant :

$$(12) \qquad F_{1234} \equiv F\varphi_{12} + G\psi_{12} + H\chi_{12} = 0,$$

du déterminant (8) par rapport à F, G, H.

Il va sans dire que ce développement devra être effectué, après que l'on aura fait disparaître de ce déterminant les facteurs parasites, si, bien entendu, ces derniers ne sont pas contenus dans l'équation proposée (1).

Ces facteurs proviennent, comme on le sait, de la coïncidence de la charnière avec le support d'une ou deux des échelles (z_1) et (z_2).

Il peut arriver, également, que la charnière se confonde avec le support d'une ou des deux échelles (z_3) et (z_4); il y aura lieu, dans ce cas, d'écrire le développement (9) du déterminant (3) sous une forme d'où les facteurs parasites auront aussi été chassés. Ceci va être éclairci par l'application qui suit ([1]) :

Soit l'équation

$$(13) \qquad F_{1234} \equiv f_1 - f_2 + (g_1 f_2 - 1)\left(\frac{f_2}{2} \pm \sqrt{\frac{f_3^2}{4} + \frac{1 - f_3 f_4}{g_4}}\right) = 0,$$

où f_i, g_i désignent des fonctions quelconques de la variable z_i. Pour cela posons, pour abréger,

$$f_{34} = \pm\sqrt{\frac{f_3^2}{4} + \frac{1 - f_3 f_4}{g_4}}$$

et essayons d'effectuer la disjonction de ses variables en prenant

$$F_1 \equiv f_1, \qquad G_1 \equiv 1, \qquad H_1 \equiv g_1.$$

Cette équation s'écrit alors sous la forme

$$F_{1234} \equiv F_1 - G_1\left(f_2 + \frac{f_3}{2} + f_{34}\right) + H_1 f_2\left(\frac{f_3}{2} + f_{34}\right) = 0.$$

([1]) **B.3**, p. 388.

Si maintenant on substitue à F_1, G_1, H_1 respectivement F_2, G_2, H_2, et si l'on rend indéterminés successivement z_3 et z_4 dans l'identité obtenue, on a deux équations linéaires et homogènes ayant pour solution

$$F_2 = f_2^2, \qquad G_2 = f_2, \qquad H_2 = 1.$$

De même, en substituant à F_1, G_1, H_1 respectivement F, G, H et en exprimant que l'identité obtenue doit avoir lieu quel que soit z_2, on a les relations

$$\frac{F}{G} = \frac{G}{H} = \frac{f_3}{2} + f_{34},$$

qui montrent que la charnière est une parabole ayant pour équation

$$x = y^2.$$

On peut, dès lors, exprimer F, G, H en fonction d'une seule variable auxiliaire ζ par les formules

$$F = \zeta^2, \qquad G = \zeta, \qquad H = 1;$$

de là les deux déterminants

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} \zeta^2 & \zeta & 1 \\ f_1 & 1 & g_1 \\ f_2^2 & f_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

et

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} \zeta^2 & \zeta & 1 \\ F_3 & G_3 & H_3 \\ F_4 & G_4 & H_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Il s'agit, maintenant, d'avoir les éléments de ce dernier déterminant. Pour cela, écrivons le développement du déterminant (14), après en avoir chassé le facteur parasite $(\zeta - f_2)$,

$$f_1 - (\zeta + f_2) + g_1 f_2 \zeta = 0,$$

puis remplaçons dans ce développement ζ par sa valeur tirée du développement

$$\zeta^2 \varphi_{34} + \zeta \psi_{34} + 1 \times \chi_{34} = 0,$$

du déterminant (15); nous avons ainsi l'équation

$$f_1 - f_2 + (g_1 f_2 - 1)\left[\frac{-\psi_{34}}{2\varphi_{34}} \pm \sqrt{\left(\frac{\psi_{34}}{2\varphi_{34}}\right)^2 - \frac{\chi_{34}}{\varphi_{34}}}\right] = 0.$$

L'identification de celle-ci, quels que soient z_1 et z_2, avec l'équation (13), donne

$$\varphi_{34} = g_4, \qquad \psi_{34} = f_3 g_4, \qquad \chi_{34} = f_3 f_4 - 1.$$

Finalement, en résolvant les deux identités (10) et (11) après y avoir remplacé φ_{34}, ψ_{34}, χ_{34} par leurs valeurs ci-dessus, nous aurons les éléments cherchés

$$\begin{array}{lll} F_3 = f_2, & G_3 = 1, & H_3 = 0, \\ F_4 = 1, & G_4 = 1, & H_4 = g_4. \end{array}$$

6. *Équations à quatre variables d'ordre nomographique 2 par rapport à deux d'entre elles.* — Il arrive fréquemment que l'équation $F_{1234} = 0$ s'ordonne immédiatement sous chacune des formes

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F_{1234} = F_1 F_{234} + G_1 G_{234} + H_1 H_{234} = 0, \\ F_{1234} = F_4 F_{123} + G_4 G_{123} + H_4 H_{123} = 0. \end{array} \right.$$

Pour obtenir dans ce cas les déterminants (2) et (3) du numéro précédent, M. Boulad fait la remarque [1] que si l'on considère ces formes (1) comme les développements respectifs de ces deux déterminants, on pourra écrire

$$(2) \qquad F_{1234} = \begin{vmatrix} F_{34} & G_{34} & H_{34} \\ F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \end{vmatrix} = 0$$

et

$$(3) \qquad F_{1234} = \begin{vmatrix} F_{12} & G_{12} & H_{12} \\ F_3 & G_3 & H_3 \\ F_4 & G_4 & H_4 \end{vmatrix} = 0$$

avec l'une ou l'autre des conditions suivantes :

1° Ou bien

$$(4) \qquad \frac{F_{34}}{F_{12}} = \frac{G_{34}}{G_{12}} = \frac{H_{34}}{H_{12}};$$

2° Ou bien, si l'on rapporte à un même système d'axes (Ox, Oy) les deux nomogrammes à simple alignement représentatifs des deux équations (2) et (3), les équations des supports des deux échelles (ζ)

---

[1] B 4.

de ces deux nomogrammes sont identiques, de telle sorte que l'on puisse superposer ces deux nomogrammes partiels en faisant coïncider les supports de ces deux échelles sans se préoccuper de leur graduation. On obtiendra ainsi un nomogramme à double alignement représentatif de l'équation (1) et ayant comme charnière le support commun des deux échelles (ζ).

L'équation du support de l'échelle (ζ) du nomogramme ($z_1 z_2 \zeta$) s'obtient par élimination de z_3 et z_4 entre les équations

$$(5) \qquad x = F_{34}, \qquad y = G_{34}, \qquad z = H_{34}$$

qui définissent cette échelle en coordonnées cartésiennes et homogènes. De même l'équation du support de l'échelle (ζ) correspondant au second nomogramme ($\zeta z_3 z_4$) s'obtient par élimination de z_1, z_2 entre les équations de cette dernière échelle, savoir :

$$(6) \qquad x = F_{12}, \qquad y = G_{12}, \qquad z = H_{12}.$$

Il est intéressant de remarquer que chacune des deux conditions (4) n'est autre chose que l'équation (1) mise sous la forme

$$\Phi_{12} = \Phi_{34}.$$

Cela posé, les deux systèmes des fonctions inconnues (F_2, G_2, H_2) et (F_{34}, G_{34}, H_{34}) s'obtiennent par la résolution des deux identités suivantes :

$$(7) \qquad F_2\, F_{234} + G_2\, G_{234} + H_2\, H_{234} \equiv 0 \qquad (\text{quels que soient } z_3 \text{ et } z_4),$$

$$(8) \qquad F_{34} F_{234} + G_{34} G_{234} + H_{34} H_{234} \equiv 0 \qquad (\text{quel que soit } z_2),$$

qui, avec l'équation (1), donnent par élimination le premier déterminant cherché (2).

De même, les deux systèmes des fonctions inconnues (F_3, G_3, H_3) et (F_{12}, G_{12}, H_{12}) sont fournis par les deux identités suivantes :

$$(9) \qquad F_3\, F_{123} + G_3\, G_{123} + H_3\, H_{123} \equiv 0 \qquad (\text{quels que soient } z_1 \text{ et } z_2),$$

$$(10) \qquad F_{12} F_{123} + G_{12} G_{123} + H_{12} H_{123} \equiv 0 \qquad (\text{quel que soit } z_3),$$

qui, avec l'équation (1), donnent également par élimination le second déterminant (3).

Remarque. — Il arrive dans la pratique que les équations des supports des deux échelles (ζ) des nomogrammes ($z_1 z_2 \zeta$) et ($\zeta z_3 z_4$),

rapportés à un même système d'axes, sont réelles et homogènes en x, y, z, mais non identiques. Dans ce cas, si ces équations représentent des droites ou des coniques, les deux nomogrammes pourront être toujours superposés d'une infinité de manières par application de la transformation homographique la plus générale (nº **43**).

Pour cela, il suffira de multiplier les deux déterminants générateurs (2) et (3) respectivement par deux déterminants transformateurs (tels que D du nº **43**) dont on déterminera les paramètres $\lambda, \mu, \ldots, \nu''$ respectifs de façon à réaliser la coïncidence des deux échelles (ζ).

7. *Équation à quatre variables d'ordre nomographique 6 la plus générale.* — Une telle équation rentre dans le type précédent, attendu qu'elle peut se mettre sous les deux formes suivantes [1] :

$$(11)\quad f_1(f_4 A_{23} + G_4 B_{23} + h_4 C_{23}) + g_1(f_4 A'_{23} + g_4 B'_{23} + h_4 C'_{23}) + h_1(f_4 A''_{23} + g_4 B''_{23} + h_4 C''_{23}) = 0,$$

$$(12)\quad f_4(f_1 A_{23} + G_1 A'_{23} + h_1 A''_{23}) + g_4(f_1 B_{23} + g_1 B'_{23} + h_1 B'_{23}) + h_4(f_1 C_{23} + g_1 C'_{23} + h_1 C''_{23}) = 0,$$

dans lesquelles, les a, b, c représentant des constantes, on a, d'une manière générale,

$$\begin{aligned} A_{23} &= a_1 f_2 f_3 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4, \\ B_{23} &= b_1 f_2 f_3 + b_2 f_2 + b_3 f_3 + b_4, \\ C_{23} &= c_1 f_2 f_3 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C''_{23} &= c''_1 f_2 f_3 + c''_2 f_2 + c''_3 f_3 + c''_4. \end{aligned}$$

Pour mettre (11) et (12) sous forme des déterminants (2) et (3) ci-dessus, M. Boulad leur a appliqué les identités (7), (8), (9) et (10). Il est arrivé ainsi, en posant

$$\begin{aligned} A_i &= a_i x + a'_i y + a''_i, \\ B_i &= b_i x + b'_i y + b''_i, \\ C_i &= c_i x + c'_i y + c''_i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_i &= a_i x + b_i y + c_i, \\ \Delta'_i &= a'_i x + b'_i y + c'_i, \\ \Delta''_i &= a''_i x + b''_i y + c''_i, \end{aligned}$$

---

(1) **B.4**, p. 3.

à établir que *si les relations*

$$\frac{B_1}{B_3} = \frac{C_1}{C_3} = \frac{A_2}{A_4} = \frac{B_2}{B_4} = \frac{C_2}{C_4}$$

et

$$\frac{\Delta'_1}{\Delta'_2} = \frac{\Delta''_1}{\Delta''_2} = \frac{\Delta_3}{\Delta_4} = \frac{\Delta'_3}{\Delta'_4} = \frac{\Delta''_3}{\Delta''_4}$$

sont satisfaites, quels que soient x et y, l'équation écrite sous la forme (11) *ou* (12) *est représentable par un nomogramme à double alignement sur lequel la charnière est une conique servant de support commun aux échelles* (z_2) *et* (z_3).

IV. — Calendrier perpétuel nomographique.

A l'époque où il était encore notre élève à l'École des Ponts et Chaussées, M. A. Crépin, ingénieur des Ponts et Chaussées (fils de l'autre ingénieur des Ponts et Chaussées cité page 58), a très ingénieusement exprimé la loi traduite par le calendrier perpétuel sous forme d'un nomogramme à triple alignement [1].

Ce calendrier perpétuel nomographique, reproduit par la figure 182, ne comporte que des échelles rectilignes parallèles, dont quatre relatives aux données (quantième, mois, siècle et année) [2] et une à l'inconnue (jour de la semaine), plus deux charnières E_1 et E_2 également parallèles à ces échelles. C'est, en somme, là un exemple de composition d'échelles parallèles (n° 94).

Le mode d'emploi est le suivant : l'alignement du quantième et du mois donne sur la charnière E_1 le point P_1 ; l'alignement du siècle et de l'année donne sur la charnière E_2 le point P_2 ; l'alignement $P_1 P_2$ coupe la dernière échelle en un point qui correspond au jour cherché.

Les alignements tracés sur la figure en traits interrompus correspondent à l'exemple : 25 *mars* 1880, pour lequel on lit la réponse : *jeudi*.

Nous ferons remarquer que cette ingénieuse disposition de calen-

---

(1) Publié dans *la Nature* (numéro du 12 juillet 1913, p. 122).

(2) Les années ordinaires (sur l'échelle « année ») et séculaires (sur l'échelle « siècle ») qui sont bissextiles sont indiquées par l'encadrement de leur numéro d'ordre.

Fig. 182.

Quantième

Mois

Jour

Siècle

Année

Trimestres 1 2 3 4

E₁ P₁ (I) (II) (III) E₂ P₂

7 14 21 28
6 13 20 27
5 12 19 26
4 11 18 25
3 10 17 24 31
2 9 16 23 30
1 8 15 22 29

Janvier 31 · Octobre 31
Janvier bissext. 31 · Avril 30 · Juillet 31
Sept. 30 · Déc. 31
Juin 30
28 Février · Mars 31 · Nov. 30
Février bissext. 29 · Août 31
Mai 31
Janvier 31 · Oct. 31

S V J M m L D S V J M m L D S V J M m L D S V J M m L D S

5 12 · 16 20
6 13
7 14 · 17
(x) 1 8 15 · (x) → 4 oct 1582
2 9 · 18
3 10
4 11 · (x) 15 19 · (x) depuis le 15 octobre 1582
5 12 · 16 20

05 11 16 22 33 39 44 50 61.67 72 78 89.95
04 10 21 27 32 38 49. 55 60 66 77.83 88 94
09.15 20 26 37.43 48 54. 65.71 76 82 (x) 93.99
03 08 14 25 31 36 42 53.59 64 70 81 87 92 98
02 13 19 24 30 41 47 52 58 69.75 80 86 97
01 07 12 18 29 35 40 46 57.63 68 74 85 91 96
00.06 17 23 28 34 45 51 56 62 73.79 84 90

drier perpétuel permet de prendre comme inconnue l'une quelconque des cinq variables qui y interviennent. Proposons-nous, par exemple, de trouver les coïncidences d'un premier jour de siècle (1er janvier X01) avec un premier jour de semaine, c'est-à-dire avec un lundi. L'alignement qui joint le point coté 1 de l'échelle du quantième au point coté *Janvier* (non bissextile puisqu'il s'agit d'une année 01) de l'échelle du mois coupant la charnière E_1 en un point que nous appellerons P'_1 (qui est celui immédiatement au-dessus du point P_1 de la figure), et l'alignement qui joint ce point P'_1 au point L du milieu de l'échelle du jour (les autres points L ne donnant pas de solutions dans les limites de la graduation, comme on le vérifie aisément) coupant la charnière E_2 en un point que nous appellerons P'_2 (qui est, sur cette charnière, le plus voisin de l'année 09), on voit que l'alignement qui joint ce point P'_2 au point de l'échelle de l'année coté 01 coupe l'échelle du siècle en son point le plus élevé qui porte les cotes 5, 12, 16, 20. Par suite, les années 501, 1201, 1601, c'est-à-dire les 6e, 13e et 17e siècles ont commencé un lundi; et il en sera de même du 21e siècle.

M. Crépin a complété ce calendrier par un ingénieux dispositif, encore inédit, également fondé sur le principe des points alignés, qui permet de déterminer la date de Pâques pour une année quelconque.

NOTE ADDITIONNELLE.

A la liste, d'ailleurs, bien incomplète, des principales applications de la méthode des points alignés, publiées par divers auteurs, qui figure au renvoi (3) de la page XII, il convient d'ajouter :

1° L. Jacob. — *Résistance et construction des bouches à feu. Autofrettage* (Ouvrage faisant partie de l'*Encyclopédie scientifique;* 2e édition, 1920). Dans cet Ouvrage, tous les calculs, tant du frettage ordinaire que de l'autofrettage, sont systématiquement traduits en nomogrammes à points alignés. Ces nomogrammes sont d'ailleurs ceux qui, sous la direction de l'auteur lui-même, ont permis, pendant la guerre, aux Établissements Schneider, de mener à bien, dans un temps très court, les études relatives au nouveau matériel d'artillerie.

2° W.-B. Morton et Miss Harvey. — *An application of Nomography to a case of discontinuous Motion of a Liquid* (*Philosophical Magazine*, 1916, p. 130).

On rencontre dans cet intéressant Mémoire un exemple remarquable de problème emprunté à l'Hydrodynamique, où la méthode des points alignés réduit à un extrême degré de simplicité des calculs qui, sans ce secours, seraient à peu près inextricables. « The equations — disent, en effet, les auteurs — which embody the result of the analysis are too complicated to admit of arithmetical calculation of special cases. It is the purpose of this note to point out how numerical results can be obtained by means of the graphical methods developed by M. d'Ocagne. »

INDEX ALPHABÉTIQUE.

Les numéros inscrits sont ceux des pages correspondantes.
Les astérisques renvoient aux notes en bas des pages.
Les noms d'auteurs cités sont imprimés en petite capitale,
les titres d'exemples d'application en italique.

Abaque cartésien, 22, 30.
Abaque hexagonal, 75, 440.
ADLER (A.), 319.
Alignements brisés, 349.
Alignements multiples, 293, 311.
ALLARD (E.), 65.
ALLIX, 30*.
Anamorphose, 26, 52.
» générale, 86.
» graphique, 68, 449.
» logarithmique, 63, 414.
» polaire, 118.
Angle de site, 354.
Angle initial de tir, 361.
Angle tabulaire corrigé, 358.
Annuités, 127.
Arpentage des coupes, 163.
AUBERT (J.), 34*.
Ballast (Volume du), 218.
BASSANTIN, 30*.
BAZIN, 282*.
BEAUREPAIRE (R. DE), XV*.
BEGHIN (M.), 246, 366, 367.
BELHAGUE (Général), 52*
BELLENCONTRE, 30*.
BERTRAND (Colonel), 52*, 273.
BILLLETER, 397*.
BLUM, 74, 328*.
BOUCHER, 396*.
BOULAD (F.), XV*, 102*, 172, 204*, 283*, 286*, 454*, 455, 458, 459, 460, 461, 465, 467.
BOYS (C.-V.), 245*.
BRAUER (E.-A.), 422*.
BUACHE (PH.) 30*.
Calendrier perpétuel, 468.
Cercles concourants, 109.
Césure (Points de), 4.
CHANCEL, 43*, 125, 130.
Charnière, 258.
CHASLES, XII*.
CHENEVIER, 45*.
CHÉRY (Général), 62.
Circulaire (Nomog.), 233.
CLARK, 175, 227, 229*, 232, 284.
COLLIGNON (E.), 59, 64*, 299*.
Compas logarithmique, 422*.
Composition des échelles, 271.
Conique (Nomog.), 228.
Consommation des machines à vapeur, 250.
Contact d'éléments, 430.
Coordonnées parallèles, XI, 158.
Correction barométrique, 199.
Correction des mires, 403, 436.
Corrections dynamiques de niveau, 84.
COUSINERY, XIV*.
CRÉPIN (Auguste), 58.
CRÉPIN (André), 468, 470.
Critiques (Valeurs), 204.
Cubiques cuspidales (Constructions des), 222.
CULMANN, XIV.
DAVAINE, 325.
Débit d'une rivière, 60.
Déblai (Profils de), 322, 383, 427.
Dépression de l'horizon, 15.
Dérive des projectiles, 359.
DERIVRY, 397*.
Déviation du compas, 151.
Disjonction des variables, 94, 96, 454.
Dissociation d'équation, 121, 137.
Distribution d'eau, 273.

Double alignement, 257, 435.
Doubles enveloppes (Droites à), 314, 442.
Droites concourantes, 95, 97.
DUCARLA, 30*.
DUPAIN-TRIEL, 30*.
DUPLAIX (M.), 127*.
DUPORCQ (E.), 115*.
DURAND (F.-W.), 64*.
Écarts (Nombre probable des), 15, 18, 23, 24, 26, 27.
Échelle binaire, 123, 143.
» circulaire, 176.
» de repérage, 402.
» dérivée 11.
» glissante, 395,
» homographique, 12.
» isograde, 13.
» logarithmique, 9.
» métrique, 9.
» mobile, 25, 34, 393.
» multiple, 133.
» normale, 1.
» projective, 12.
» segmentaire, 13.
» tournante, 400.
» transformée, 12.
Échelles accolées, 15, 19, 404.
» binaires accolées, 125.
» circulaires concentriques, 372.
» (Composition des), 271.
» (Construction géométrique des), 7.
» (Inversion des), 17.
Échelon, 2.
Écoulement de l'eau, 280, 287, 369, 378.
» *des gaz*, 268.
EICHHORN, XII*.
Éléments à n cotes, 133.
Éléments initiaux du tir, 352.
Éléments mixtes, 394, 406.
Épaisseur des lentilles, 218.
» *d'un tuyau*, 236.
Équation de Képler, 223.
» *du second degré*, 216, 392
» *du troisième degré*, 46, 221, 302, 316, 321, 384, 426.
» *du quatrième degré*, 306, 321, 384, 426.
» *du cinquième degré*, 311, 426.
» *quadratique*, 113.
Équation trinome à exposants quelconques, 410, 424.
Erreur de réfraction, 147.
Erreur probable d'une nivelée, 20.
Étalon de graduation, 13.
EVERETT, 397*.
FAVARO (A.), 30*, 35*.
FAVÉ (L.), 17, 35.
FONTENÉ, 203*, 237.
Fractionnement des abaques hexagonaux, 80.
Fractionnement des échelles binaires, 125.
Fractionnement des nomogrammes à points alignés, 172, 182.
FROCHOT, 45.
FULLER, (G.), 397*.
FULLER (J.), 396*.
GANGUILLET (E.), 294*.
GARIEL, 57*.
GENAILLE, 51.
Genre d'un nomogramme à points alignés, 158.
GERCEVANOFF (N.), XVI*, 389, 390, 391, 393.
Glissement (Ab. hex. à), 138.
GOEDSEELS, 187, 375, 377, 387*, 443, 444.
GORRIERI (D.), 62*, 222*.
GOULIER (Colonel), 64*, 377*.
GOURSAT, 122*.
GOYBET, 354*.
Graduation (Analyse d'une), 3.
Grille trigonométrique, 300.
GRISON (Capitaine), 29.
GRONWALL, 156*.
GUTTIEREZ DEL ARROYO (L.), XV*.
HARVEY (Miss), 471.
GUNTER, 1*, 9*.
HELMERT, 64*.
HERMANN, (G.), 64*.
Heures de lever et du coucher du Soleil, 59.
HEZLET (R.-K.), XV*.
Homographique (Transformation), 99, 168.
Homologique (Transformation), 103.
Images logarithmiques, 414.
» de polynomes, 419.
Index circulaire, 386.

Index concentriques, 388.
» en équerre, 375, 378, 441, 442.
» parallèles, 365.
Intérêts composés, 144, 298.
Interpolation à vue, 7, 88*, 95.
Intervalle, 2.
Inversion des échelles, 17.
Isoplèthe (Courbe), 31, 88.
Isoplèthes (Points), 155*.
JACOB, XIII*, 470.
Jauge des yachts français, 129.
JEAN-FRANÇOIS (Père), 30*.
JOMARD, 396*.
JONESCO (J.), XVI*.
JOUFFRET (Commandant), 19.
KAPTEYN (A.), 64*
KŒNIGS (G.), 43, 445.
KRAÏTCHIK (M.), XIII*.
KUTTER (W.-R.), 294.
LAFAY (Colonel), 169, 213*, 249, 406, 408, 449.
LALANNE (LÉON), VIII, 28, 31, 46, 63, 69, 155*, 326.
LALLEMAND (CH.), IX, 15, 19, 21*, 69, 75, 78*, 83, 86, 123, 126*, 134, 135, 141, 150, 154, 220*, 403, 404.
LANGENSHELD (Colonel), 249*.
LASKA (W.), XVI*.
LEADBETTER, 396*.
LECORNU, 156*.
Lentilles sphériques, 56, 211.
Levers tachéométriques, 375.
LÉVY (MAURICE), XIV.
Liaison (Systèmes de), 137.
Lignes condensées à deux cotes, 119.
Logarithmiques d'addition et de soustraction (Courbes), 421.
LUCKEY, XV*.
Lumière diffusée (*Vibration de la*), 406, 436.
MAC-MAHON (Major P.-A.), 437.
MANDL (Lieutenant J.), 265, 267.
MANNHEIM (Colonel), 397.
Marche d'une troupe en colonne, 186.
MAREY, 35.
MARGETTS, 30*.
MASSAU, IX, XIV, 87, 89*, 96, 97, 106, 156*, 204*, 384.
MEHMKE (R.), 64, 319, 321, 414, 420.
MILBURNE, 397*.
Miroirs sphériques, 56, 211.
MÖBIUS, 155*.
Module, 2.
Moments d'inertie des rectangles, 185.
MONGE (G.), XIV.
MORTON (W.-B.), 471.
MOUNIER (J.), XIII*.
Multiplicateurs correspondants, 41, 445.
Multiplication, 35, 44, 58, 64, 83, 100, 184, 194, 197.
Mur de réservoir, 47.
Murs de soutènement (*Épaisseur des*), 111, 367, 381.
Murs de soutènement (*Fruit intérieur des*), 105, 239, 456.
MUYDEN (A. VAN), 64*.
Navigation (*Problèmes de*), 36, 117, 318, 343*.
Nivellement barométrique, 276.
Nomogramme général à courbes concourantes, 93.
Nomogramme le plus général, 435.
OBENHEIM (D'), 30*.
Ordre nomographique, 201.
Ordre nomographique, 3..., 202, 228, 457.
» » 4 .., 227, 237, 283, 455.
» » 5..., 458.
» » 6..., 457.
» » supérieur, 459.
OUGHTRED, 396*.
PALADINI (B.), 318.
Pales d'hélice (*Épaisseur des*), 311.
PARTRIDGE (SETH), 396*.
PAULIN, 396.
PERRET (E.), XIII*, 343*.
PESCI (G.), XIII*, XVI*, 115, 117, 277*, 301, 318*.
PILLET (J.), 222*.
PIOBERT, 30*.
Pivot, 258.
Plans superposés, 393, 432, 440. 441.
Poids de la vapeur d'eau, 48.
Poids du mètre cube d'air, 356.
Point à la mer, 36, 343*.
Points à deux cotes, 294, 442.
Points alignés, 155. 440.
Points condensés à deux cotes, 122, 289.
Points coplanaires, 259, 319.
Points critiques, 207.

Points équidistants, 389.
Polaires (Nomog.), 115, 441.
Portées lumineuses, 65.
Potin (L.), xiii*.
Pouchet, 30*, 35.
Poulain (R. P.), 314.
Poussée des terres, 146.
Poussin (R.), xiii*.
Poutres chargées, 51, 62, 222*, 265.
Prévot (E.), 123*, 128, 145, 185*, 276*.
Profilomètre, 383, 441.
Quadrangle limite, 168.
Quadrilatère limite, 102.
Quiquet (A.), 163*.
Radau (R.), 53*.
Radiantes (Ab. à), 57.
Rateau, 250, 252, 255.
Règles à un tiroir, 395, 441.
Règles à plusieurs tiroirs, 398.
Remblais (Profils de), 322, 383, 427.
Remous d'une rivière, 305.
Renard (Ch.), 126*, 147.
Ricci (Général), xvi*, 53.
Ricour (Capitaine), 113*.
Rieger, 396.
Rollet de l'Isle, 35.
Ronca (G.), xiii*.
Runge (C.), xv*.
Saint-Robert (P. de), 156*.
Saussure (R. de), 64*.
Scherer, 397*.
Schilling (F.), xv*.
Seco de la Garza (R.), xiii*, xv*.
Seefehlner, xiii*.
Siégler, 383, 441.
Soreau (R.), xii*, 201, 227, 232*, 233, 234, 235, 236, 259, 260, 283, 285, 286, 371, 372, 375, 378, 380, 381, 384.
Steevensz (S.-M.), xiii*.
Superposition des graduations, 39.
Supports des points cotés, 157.
Systèmes à simple translation, 394.
» à double translation, 410.
» de courbes, 87.
» de droites, 89, 90.
» de points cotés, 173.
» ramifiés, 137.
Tangentiels (Nomog.), 160, 410, 427.
Temps de montée d'un avion, 291.
Terquem, 30*, 32.
Thacker, 397*.
Théry, 163.
Tir (Problèmes de), 53, 352.
Torres (L.), 412, 421*.
Toulon, 396.
Traction d'une locomotive, 398.
Trajectoire des contacts, 317, 442*.
Transparent à un index, 157.
» à deux index, 24, 34.
» à trois index, 72.
» à quatre index, 328.
Triangles rectilignes (Résol. des), 132.
» *sphériques quelconques*, 300, 332.
» *sphériques rectangles*, 36.
Trigonométriques (Relations), 19, 141, 212, 213.
Ulkowski (F.), xvi*.
Vaes (F.-J.), xiii*, xv*, 398.
Valeurs critiques, 204.
Vandervin (H.), 61.
Vitesse d'un projectile, 249.
Vitesse d'un train, 246.
Vogler, 31, 64*, 88*.
Voute en dôme, 305.
Wargniez, 396*.
Willotte, 427.
Wingate, 396*.
Wolff (C.-E.), xiii*, 229*, 287.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

INTRODUCTION ... v

Liste des Publications de l'auteur relatives à la Nomographie ... XIX

CHAPITRE I.

Représentation dans le cas de deux variables.

I. — ÉCHELLES FONCTIONNELLES.

1. Échelle normale d'une fonction ... 1
2. Analyse de la graduation ... 2
3. Construction géométrique d'une échelle ... 6
4. Interpolation à vue ... 7
5. Échelles usuelles ... 9
   1° Échelle métrique ... 9
   2° Échelle logarithmique ... 9
6. Échelles dérivées. Étalons de graduation ... 11
7. » transformées. Échelles projectives ... 12
8. » isogrades ... 13

II. — ÉQUATIONS A DEUX VARIABLES.

9. Représentation par échelles accolées ... 15
   Exemples : 1° *Nombre probable des écarts* ... 15
   2° *Dépression de l'horizon de la mer* ... 15
10. Inversion des échelles ... 17
11. Accolement de deux échelles fonctionnelles ... 19
   Exemple : *Erreur probable d'une nivelée* ... 20
12. Représentation cartésienne métrique ... 22
13. Emploi d'un transparent ... 24
14. Emploi d'une échelle mobile ... 25
15. Anamorphose ... 26

CHAPITRE II.

Représentation par lignes concourantes dans le cas de trois variables.

I. — ABAQUES CARTÉSIENS.

16. Abaques cartésiens à trois variables ... 30
17. Rattachement au principe des échelles accolées ... 33

Pages

18. Emploi d'un transparent ou d'une échelle mobile 34
19. Exemples : 1° *Premier type d'abaque de multiplication* 35
2° *Résolution des triangles sphériques rectangles. Point à la mer* 36
20. Superposition des graduations. Multiplicateurs correspondants 39
21. Abaques à lignes droites 43
22. Exemples : 1° *Second type d'abaque de multiplication* 44
2° *Résolution de l'équation trinome du troisième degré* 45
3° *Poids de la vapeur d'eau contenue dans l'air* 48
4° *Graphiques de l'ingénieur* 51

II. — Anamorphose.

23. Principe de l'anamorphose simple 52
Exemple : *Problème de tir* 53
24. Abaques à parallèles 54
Exemple : *Miroirs et lentilles sphériques* 56
25. Abaques à radiantes 57
Exemples : 1° *Troisième type d'abaque de multiplication* 58
2° *Heure de lever et de coucher du Soleil* 59
3° *Débit d'une rivière* 60
4° *Poutres chargées* 62
26. Anamorphose logarithmique 63
27. Exemples : 1° *Quatrième type d'abaque de multiplication* 64
2° *Équation des portées lumineuses* 65
28. Anamorphose graphique 68

III. — Emploi d'un transparent a trois index. Abaques hexagonaux.

29. Desiderata à réaliser dans la lecture d'un abaque 71
30. Transparent à trois index 72
31. Principe des abaques hexagonaux 75
32. Forme géométrique élémentaire du principe précédent 77
33. Déplacement des échelles 78
34. Fractionnement des échelles 80
35. Exemples : 1° *Cinquième type d'abaque de multiplication* 83
2° *Corrections dynamiques de niveau* 84

IV. — Anamorphose générale. Nomogrammes généraux a lignes concourantes.

36. Principe de l'anamorphose générale 86
37. Systèmes de courbes cotées 87
38. Systèmes de droites du premier degré 89
39. Systèmes de droites du second degré 90
40. Nomogramme général à trois systèmes de courbes concourantes 93
41. Nomogramme à droites concourantes 95
42. Type d'équation représentable par droites concourantes, à deux systèmes superposés 97
43. Transformation homographique d'un nomogramme à droites concourantes 99
44. Quadrilatère limite 102
45. Exemple : *Fruit intérieur des murs de soutènement* 105

Pages
46. Nomogrammes à cercles concourants.................................. 109
Exemple : *Murs de soutènement pour des terres profilées suivant leur talus naturel*.. 111
47. Représentation des équations quadratiques par droites et cercles concourants. 113
48. Nomogrammes polaires.. 115

CHAPITRE III.

Représentation par lignes concourantes dans le cas de plus de trois variables.

I. — Systèmes ramifiés. Échelles multiples.

49. Équations à quatre variables. Lignes condensées à deux cotes............. 119
50. Échelles binaires.. 122
51. Représentation d'équations à quatre variables par échelles binaires accolées. 125
Exemples : 1° *Annuités*... 127
2° *Formule de jauge de l'Union des yachts français*...... 129
3° *Résolution des triangles rectilignes dont un angle au moins est connu*... 132
52. Éléments à *n* cotes. Échelles multiples................................ 133

II. — Abaques hexagonaux a échelles multiples.

53. Abaques hexagonaux à glissement... 138
Exemple : *Analogies des sinus et des tangentes*.......... 141
54. Abaques hexagonaux à échelles binaires.................................. 142
Exemples : 1° *Intérêts composés*...................................... 144
2° *Poussée des terres*.................................... 146
55. Combinaison des deux types précédents... 147
Exemple : *Erreur de réfraction dans le nivellement*.................. 147
56. Abaques hexagonaux à échelles multiples : *Déviation du compas*......... 151

CHAPITRE IV.

Représentation par points alignés dans le cas de trois variables.

I. — Nomogrammes généraux a points alignés.

57. Principe des points alignés............... 155
58. Emploi des coordonnées parallèles.. 158
59. Nomogrammes tangentiels généraux............. 160
60. Transformation géométrique des droites concourantes en points alignés.... 162
61. Construction directe des nomogrammes à points alignés.................. 165
62. Emploi des coordonnées cartésiennes..................................... 167
63. Transformation homographique des nomogrammes à points alignés. Quadrangle limite.. 168
64. Fractionnement des nomogrammes à points alignés......................... 172
65. Systèmes algébriques de points cotés.................................... 173
66. Système particulier du second degré..................................... 176

II. — Nomogrammes de genre zéro.

A. — *Nomogrammes à trois échelles parallèles.*

Pages
67. Type des équations correspondantes 178
68. Disposition et limitation des échelles 180
69. Fractionnement des échelles 182
70. Exemples : 1° *Sixième type de nomogramme pour la multiplication* 184
2° *Moments d'inertie des rectangles* 185
3° *Marche d'une troupe en colonne* 186

B. — *Nomogrammes à trois échelles rectilignes dont deux parallèles.*

71. Type des équations correspondantes 189
72. Disposition des échelles 190
73. Exemples : 1° *Septième type de nomogramme pour la multiplication* . . . 194
2° *Huitième type de nomogramme pour la multiplication* . . . 197
3° *Correction barométrique* 199

C. — *Nomogrammes à trois échelles rectilignes quelconques.*

74. Types des équations correspondantes. Valeurs critiques 201
75. Détermination des valeurs critiques 205
76. Emploi effectif des échelles des fonctions composantes 208
77. Exemples : 1° *Miroirs et lentilles sphériques* 211
2° *Sinus produit de sinus* 213
3° *Sinus produit de tangentes* 213

III. — Nomogrammes de genre non nul.

A. — *Nomogrammes de genre un.*

78. Type des équations correspondantes 214
79. Premier exemple : *Résolution de l'équation du second degré* 216
Cas particuliers : 1° *Épaisseur des lentilles plan-convexes* 218
2° *Volume du ballast* 218
80. Second exemple : *Résolution de l'équation trinome du troisième degré* . . 221
81. Troisième exemple : *Équation de Képler* 223
82. Condition de représentabilité d'une équation d'ordre nomographique 4 par un nomogramme de genre un 227

B. — *Nomogrammes de genre deux et trois.*

83. Nomogrammes coniques de genre deux pour équations d'ordre nomographique 3 228
84. Construction des nomogrammes coniques de genre deux. Nomogrammes circulaires 233
85. Nomogrammes coniques de genre trois pour équations d'ordre nomographique 4 237
86. Exemple : *Fruit intérieur des murs de soutènement* 239

IV. — Application de la méthode des points alignés à la représentation des lois empiriques.

87. Manière de traduire certaines lois empiriques en nomogrammes à points alignés 244

Pages
88. Premier exemple : *Vitesse d'un train remorqué par une locomotive de type connu* 246
89. Deuxième exemple : *Vitesse initiale d'un projectile* 249
90. Troisième exemple : *Consommations théoriques d'une machine à vapeur.* 250

CHAPITRE V.

Représentation par points alignés dans le cas de plus de trois variables.

I. — Alignements multiples et points condensés.

91. Principe du double alignement 257
92. Échelles rectilignes et parallèles 260
93. Exemples : 1° *Poutres uniformément chargées* 265
2° *Écoulement des gaz par des tuyaux* 268
94. Composition des échelles parallèles 271
Exemple : *Distribution d'eau* 273
95. Échelles rectilignes non parallèles 276
Exemple : *Nivellement barométrique* 276
96. Échelles curvilignes 279
Exemple : *Vitesse d'écoulement de l'eau dans les canaux découverts.* 280
97. Représentation des équations à quatre variables d'ordre nomographique 4 par double alignement 283
98. Nomogrammes coniques à double alignement pour équations à quatre variables d'ordre nomographique 4 286
Exemple : *Vitesse d'écoulement dans un canal à section trapézoïdale...* 287
99. Nomogrammes à points condensés 289
Exemple : *Temps de montée d'un avion* 291
100. Nomogrammes à alignements multiples 293

II. — Points a deux cotes.

101. Principe des points alignés à deux cotes 294
102. Premier exemple : *Intérêts composés* 298
103. Deuxième exemple : *Grille trigonométrique* 299
104. Troisième exemple : *Résolution de l'équation complète du troisième degré.* 302
Exemples pratiques : 1° *Voûte en dôme* 305
2° *Remous d'une rivière* 305
105. Quatrième exemple : *Resolution de l'équation du quatrième degré....* 306
106. Combinaison des deux principes de l'alignement multiple et des points à deux cotes 311
Exemple : *Épaisseurs minima des pales d'hélice d'avion vers le moyeu...* 311
107. Droites à doubles enveloppes 313
108. Trajectoires de contacts 317
109. Nomogrammes à points coplanaires 319

III. — Applications diverses de la méthode des points alignés.

A. — *Calcul des profils de remblai et de déblai.*

110. Rappel des formules. Distinction des cas 322
111. Solution générale par lignes concourantes. Variantes diverses 324
112. Solution par points alignés 328

B. — *Résolution générale des triangles sphériques.*

Pages

113. Cas à considérer 332
114. Nomogramme pour la disposition (**2**,**2**) 335
115. Nomogramme pour la disposition (**3**,**1**) 337
116. Nomogramme pour la disposition (**4**) 341
117. Nomogrammes particuliers 345
118. Note additionnelle sur les alignements brisés 349

C. — *Préparation du tir de l'Artillerie.*

119. Éléments initiaux du tir et corrections 352
120. Angle de site 354
121. Poids du mètre cube d'air 356
122. Angle tabulaire corrigé et dérive 358
123. Angle initial de tir 361

CHAPITRE VI.

Représentation au moyen d'éléments mobiles.

I. — Index mobiles divers.

124. Index mobiles en général 365
125. Index parallèles 365
Exemple : *Mur de soutènement des terres profilées suivant leur talus naturel* 367
126. Rattachement au principe du double alignement 369
Exemple : *Vitesse d'écoulement de l'eau dans les tuyaux découverts.* 369
127. Couples successifs d'index parallèles. Cas des échelles circulaires concentriques 372
128. Index en équerre 375
Exemple : *Coordonnées rectangulaires dans les levers tachéométriques.* 375
129. Index en équerre à pivot fixe ou a sommet guidé 378
Exemple d'index en équerre à pivot fixe : *Vitesse de l'écoulement de l'eau par un orifice rectangulaire noyé* 378
Exemples d'index en équerre à sommet guidé :
1° *Mur de soutènement pour des terres profilées suivant leur talus naturel* 381
2° *Profilomètre Siégler* 383
130. Nomogramme à index en équerre pour la *résolution des équations complètes du troisième et du quatrième degré* 384
131. Index circulaire 386
132. Index concentriques. Points équidistants 388
Exemple : *Résolution de l'équation du second degré* 392

II. — Systèmes cotés mobiles.

133. Généralités. Plans superposés. Éléments mixtes 393

A. — *Systèmes mobiles à un degré de liberté.*

134. Systèmes à translation. Échelles glissantes. Règles à un tiroir 394
135. Règle à plusieurs tiroirs 398
Exemple : *Règle à calcul pour la traction d'une locomotive* 398

Pages
136. Systèmes à rotation. Échelles tournantes.... 400
Exemple : *Corrections des mires du nivellement*.... 403
137. Exemple d'éléments mixtes engendrés par une rotation : *Vibration de la lumière diffusée*.... 406

B. — *Systèmes mobiles à deux degrés de liberté.*

138. Systèmes à double translation. *Résolution des équations trinomes à exposant quelconque*.... 410
139. Extension de l'usage de l'anamorphose logarithmique grâce à une translation quelconque. Images logarithmiques.... 414
140. Images logarithmiques de polynomes à une variable.... 419
141. Principe des nomogrammes à images logarithmiques.... 423
Exemples : 1° *Résolution des équations trinomes de degré quelconque.* 424
2° *Résolution des équations complètes des degrés 3, 4 et 5*... 426
142. Translation et rotation combinées : *Nomogramme tangentiel pour le calcul des profils de terrassements*.... 427

III. — Théorie morphologique générale. Classification de tous les nomogrammes possibles.

143. Objet de la théorie morphologique des nomogrammes.... 428
144. La notion de contact.... 430
145. Nomogrammes à deux plans superposés.... 432
146. Nomogrammes à plusieurs plans superposés.... 435
147. Classification générale des nomogrammes.... 437
148. Nomogrammes à deux plans superposés pour équations à trois variables.. 440
149. Nomogrammes à deux plans superposés pour équations à quatre variables. 441

ANNEXES.

I. Sur les équations a multiplicateurs correspondants.... 445
II. Sur l'application de l'anamorphose graphique a la représentation approchée par points alignés.... 449
III. Sur la disjonction des variables dans les équations représentables par simple ou double alignement.... 454

A. — *Simple alignement.*

1. Principe de la méthode.... 454
2. Équations à trois variables d'ordre nomographique 4 et 3 les plus générales. 455
3. Équations à trois variables d'ordre nomographique 6 et 5 les plus générales.... 457
4. Équations à trois variables d'ordre nomographique quelconque.... 459

B. — *Double alignement.*

5. Équations à quatre variables d'ordre nomographique 2 par rapport à l'une d'elles.... 461
6. Équations à quatre variables d'ordre nomographique 2 par rapport à deux d'entre elles.... 465
7. Équations à quatre variables d'ordre nomographique 6 la plus générale. 467
IV. Calendrier perpétuel nomographique.... 468
Note additionnelle.... 470